Pullback-аттракторы модели движения растворов полимеров с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности*

В. Г. ЗВЯГИН
Воронежский государственный университет
e-mail: zvg_vsu@mail.ru

А. В. ЗВЯГИН
Воронежский государственный университет
e-mail: zvyagin.a@mail.ru

УДК 517.9

Ключевые слова: pullback-аттракторы, пространство траекторий, неньютоновская жидкость, слабые решения, теоремы существования.

Аннотация

В работе на основании теории pullback-аттракторов пространств траекторий изучается качественная динамика слабых решений неавтономной модели движения растворов полимеров (с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности). Для этого в рассматриваемой модели устанавливается существование слабых решений, определяется семейство пространств траекторий, вводится понятие траекторного и минимального pullback-аттракторов и доказывается существование этих аттракторов.

Abstract

V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin, Pullback attractors for a model of polymer solutions motion with rheological relation satisfying the objectivity principle, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 5, pp. 129—157.

On the base of the trajectory pullback attractors theory, this paper studies the dynamics of weak solutions for a nonautonomous model of the polymer solutions motion (with the rheological relation satisfying the objectivity principle). For this model, we establish the existence of weak solutions, determine a family of trajectory spaces, introduce the concepts of trajectory and minimal pullback attractors, and prove the existence of these attractors.

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете, результаты теоремы 2.6), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-31-60075мол_а_дк) и Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014—2016 годы (проект № 1.1539.2014/К).

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 5, с. 129—157.

1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \nu\Delta u - \varkappa\frac{\partial \Delta u}{\partial t} - 2\varkappa \operatorname{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \mathcal{E}(u)}{\partial x_i}\right) -$$
$$- 2\varkappa \operatorname{Div}\big(\mathcal{E}(u)W_\rho(u) - W_\rho(u)\mathcal{E}(u)\big) + \operatorname{grad} p = f, \quad (x,t) \in \Omega \times (\tau, +\infty); \tag{1.1}$$
$$\operatorname{div} u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (\tau, +\infty); \tag{1.2}$$
$$u|_{\partial\Omega \times [\tau, +\infty)} = 0, \tag{1.3}$$
$$u|_{t=\tau} = a. \tag{1.4}$$

Здесь $u(x,t)$ — вектор скорости частицы жидкости, находящейся в точке x в момент времени t; $p(x,t)$ — давление жидкости в точке x в момент времени t; $f(x,t)$ — вектор плотности внешних сил; $\mathcal{E}(u) = \big(\mathcal{E}_{ij}(u)\big)$ — тензор скоростей деформации, который представляет собой симметрическую матрицу порядка n с компонентами $\mathcal{E}_{ij}(u) = (1/2)(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$;

$$W_\rho(u)(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y)W(t,y)\,dy,$$

где $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция с компактным носителем, такая что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\,dy = 1$$

и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами; $W = (W_{ij})$ — тензор завихренности, который является кососимметрической матрицей с компонентами

$$W_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right);$$

$a(x)$ — начальное условие, $\nu > 0$ — кинематический коэффициент вязкости, $\varkappa > 0$ — время ретардации (запаздывания), через Div обозначается взятие дивергенций строк матрицы. Неизвестными функциями являются u и p.

В задаче (1.1)—(1.4) известные параметры ν, $\varkappa$, а также плотность внешних сил $f(x,t)$ мы считаем раз и навсегда зафиксированными. Начальный момент $\tau \in \mathbb{R}$ может выбираться произвольно, начальное условие a также может выбираться произвольно в некотором функциональном пространстве, которое будет уточнено ниже.

В теории пространств траекторий обычно рассматривают траектории, определённые на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. В связи с этим наряду с задачей (1.1)—(1.4) рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa\,\mathrm{Div}\biggl(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\biggr)$$

$$- 2\varkappa\,\mathrm{Div}\bigl(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\bigr) + \mathrm{grad}\, p = F, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty); \quad (1.5)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty); \quad (1.6)$$

$$v|_{\partial\Omega\times[0,+\infty)} = 0, \quad (1.7)$$

$$v|_{t=0} = a. \quad (1.8)$$

Здесь значение правой части F заранее не уточняется. Если $F(x,t) = f(x,t+\tau)$, то задача (1.5)—(1.8) получается из задачи (1.1)—(1.4) линейной заменой независимого переменного t, переводящей τ в 0.

Модель движения слабо концентрированных водных растворов полимеров (1.1)—(1.2) теоретически обоснована в [9] и подтверждена экспериментальными исследованиями [1]. Задача (1.1)—(1.4) на основе аппроксимационно-топологического метода [2] рассматривалась в ряде работ: [3, 4, 6, 8, 17, 20]. В частности, в [3] (и в обзорной статье [18] для частного случая с полной производной в реологическом соотношении) устанавливается существование её минимального траекторного и глобального аттракторов в автономном случае.

2. Постановка задачи и основные обозначения

2.1. Функциональные пространства

Для пространств суммируемых функций и пространств Соболева будем пользоваться стандартными обозначениями.

Опишем шкалу пространств V^α (см. [11, гл. 3, § 4]). Обозначим $C_0^\infty(\Omega)$ множество бесконечно гладких финитных функций, носители которых содержатся в области Ω, и пусть

$$\mathcal{V} = \{v \in C_0^\infty(\Omega)^n\colon\ \mathrm{div}\, v = 0\}.$$

Определим пространства V^0, V^1, V^2.

Пространство V^0 — это замыкание множества $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)^n$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением, индуцированным из $L_2(\Omega)^n$.

Пространство V^1 — это замыкание множества $\mathcal{V}$ по норме пространства $H^1(\Omega)^n$. Норма в V^1 задаётся формулой

$$\|v\|_1 = \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \equiv \biggl(\sum_{i,j=1}^{n} \biggl\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\biggr\|^2_{L_2(\Omega)}\biggr)^{1/2} \quad (2.1)$$

(если v — вектор-функция, то запись ∇v здесь и далее означает её матрицу Якоби). Отметим, что при $n = 2, 3$ имеет место компактное вложение $V^1 \subset L_4(\Omega)^n$.

Обозначим $V^2 = V^1 \cap H^2(\Omega)^n$.

Известно разложение Вейля (см. [10]) пространства $L_2(\Omega)^n$ в ортогональную сумму: $L_2(\Omega)^n = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega)$. Пусть $\pi\colon L_2(\Omega)^n \to V^0$ — ортопроектор. Рассмотрим оператор
$$A = -\pi\Delta.$$
Известно, что оператор A, продолженный до замкнутого оператора в пространстве V^0, является самосопряжённым положительным оператором с вполне непрерывным обратным. Отсюда следует, что он имеет счётное множество собственных значений $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$; соответствующие собственные функции обозначим e_k (они гладкие).

Рассмотрим множество
$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{k=1}^{N} v_k e_k \colon N \in \mathbb{N},\ v_k \in \mathbb{R} \right\}$$
(здесь N зависит от v) и определим пространство V^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме
$$\|v\|_\alpha = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{1/2}. \tag{2.2}$$
Эти нормы порождают скалярные произведения, которые будем обозначать $(\cdot,\cdot)_\alpha$; пространство V^α со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_\alpha$ является гильбертовым.

Можно показать, что для пространств V^0, V^1, V^2 общее определение совпадает с данным выше.

При $\alpha \geqslant 0$ пространство V^α состоит из функций, принадлежащих V^0; при $\alpha < 0$ пространство V^α шире, чем V^0. Если $\alpha \geqslant 0$, то пространство $V^{-\alpha}$ естественно изометрично пространству, сопряжённому к V^α, поэтому эти пространства можно отождествлять, что мы и будем делать. При $\alpha > \beta > 0$ имеет место плотное вложение $V^\alpha \subset V^\beta$.

При $\alpha \geqslant 0$ имеет место непрерывное вложение $V^\alpha \subset H^\alpha(\Omega)^n$, причём норма $\|\cdot\|_\alpha$ эквивалентна норме, индуцированной на V^α из $H^\alpha(\Omega)^n$ (см. [11, гл. 3, § 4]). В частности, отсюда следует, что при $\alpha > \beta \geqslant 0$ имеет место компактное вложение $V^\alpha \subset V^\beta$.

Нас будут особо интересовать пространства V^0, V^1, V^3 и сопряжённые к ним. При $\alpha = 1$ норма (2.2) имеет выражение (2.1), а при $\alpha = 3$ норма определяется формулой
$$\|v\|_3 = \left(\int\limits_\Omega \nabla(\pi\Delta v) \colon \nabla(\pi\Delta v)\, dx \right)^{1/2}$$
(для двух матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ порядка n полагаем $A : B = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$).

Можно построить максимальное замыкание оператора A, которое будем обозначать той же буквой и которое осуществляет топологический изоморфизм пространств V^α и $V^{\alpha-2}$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Оператор $A\colon V^1 \to V^{-1}$ действует по правилу

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \nabla u : \nabla v \, dx \quad (u, v \in V^1).$$

Мы будем пользоваться стандартными обозначениями для пространств суммируемых функций на отрезке числовой оси со значениями в банаховом пространстве. Все производные по времени будут пониматься в смысле распределений $\mathcal{D}(0, T; V^{-1})$.

Для определения слабого решения на отрезке введём следующие пространства:

$$W_1[0,T] = \{v\colon v \in L_\infty(0,T;V^1),\ v' \in L_2(0,T;V^{-1})\}$$

с нормой

$$\|v\|_{W_1[0,T]} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$$

и

$$W_2[0,T] = \{v\colon v \in C([0,T];V^3),\ v' \in L_2(0,T;V^3)\}$$

с нормой

$$\|v\|_{W_2[0,T]} = \|v\|_{C([0,T];V^3)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}.$$

Для определения слабого решения на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем рассматривать пространство $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v, определённых почти всюду на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в V^1, таких что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_1[0,T]$, и пространство $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v класса $C(\mathbb{R}_+, V^3)$, таких что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_2[0,T]$.

Большое значение имеет следующая теорема о компактности. Пусть имеется тройка банаховых пространств $X_0 \subset F \subset X_1$, причём первое из вложений компактно, а пространство X_0 рефлексивно; пусть $T > 0$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$ $(i = 1, 2)$. Рассмотрим пространство

$$W(0,T;p_0,p_1;X_0,X_1) = \{v\colon v \in L_{p_0}(0,T;X_0),\ v' \in L_{p_1}(0,T;X_1)\}$$

(производная понимается в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в X_1); норма в $W(0,T;p_0,p_1;X_0,X_1)$ задаётся формулой

$$\|v\|_W = \|v\|_{L_{p_0}(0,T;X_0)} + \|v'\|_{L_{p_1}(0,T;X_1)}.$$

Теорема 2.1. *Если $p_0 < \infty$, то имеет место компактное вложение*

$$W(0,T;p_0,p_1;X_0,X_1) \subset L_{p_0}(0,T;F);$$

если $p_0 = \infty$, $p_1 > 1$, то имеет место компактное вложение

$$W(0,T;p_0,p_1;X_0,X_1) \subset C([0,T];F).$$

Доказательство можно найти, например, в [10, 14].

2.2. Постановка задачи и формулировка результата существования слабого решения

Определение 2.1. *Слабым решением* задачи (1.5)—(1.8) на отрезке $[0,T]$ будем называть функцию $v \in W_1[0,T]$, такую что тождество

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v(t)\varphi\,dx + \varkappa\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \nabla v(t):\nabla\varphi\,dx +$$
$$+\nu\int\limits_\Omega \nabla v(t):\nabla\varphi\,dx - \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i(t)v_j(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx -$$
$$-\varkappa\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega v_k(t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t)\,\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx - \varkappa\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega v_k(t)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(t)\,\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx +$$
$$+2\varkappa\int\limits_\Omega\big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big):\nabla\varphi\,dx = \int\limits_\Omega F\varphi\,dx \tag{2.3}$$

выполнено почти всюду на $(0,T)$ для любой функции $\varphi \in V^3$ и выполнено начальное условие

$$v(0) = a. \tag{2.4}$$

Слабым решением задачи (1.5)—(1.8) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, такую что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0,T]$ является слабым решением этой задачи на этом отрезке.

Замечание 2.1. Заметим, что для функции $v \in W_1[0,T]$ все члены, стоящие в левой части тождества (2.3), имеют смысл. Согласно теореме 2.1 всякая функция из $W_1[0,T]$ принадлежит пространству $C([0,T];V^{-1})$, поэтому для функции v класса $W_1[0,T]$ имеет смысл значение в точке и, следовательно, начальное условие (1.8).

Тождество (2.3) получается из системы (1.5)—(1.7) стандартным образом: в предположении, что имеется классическое решение, уравнение (1.5) умножается на пробную функцию $\varphi \in V^3$ скалярно в $L_2(\Omega)$, после чего в некоторых членах производится интегрирование по частям.

Введём постоянную

$$\alpha = \frac{\nu}{K_0^2 + \varkappa}, \tag{2.5}$$

которую будем использовать до конца работы (здесь K_0 — постоянная, не зависящая от v).

Имеет место теорема существования слабых решений.

Теорема 2.2. *При любых* $F \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;V^0)$ *и* $a \in V^1$ *задача* (1.5)—(1.8) *имеет слабое решение на полуоси* $\mathbb{R}_+$*, удовлетворяющее при почти всех* $t > 0$

неравенству

$$\|v(t)\|_1^2 \leqslant e^{-\alpha t}\left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa}+1\right)\|a\|_1^2+\frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_0^t e^{\alpha\xi}\|F(\xi)\|_{-1}^2\,d\xi\right). \tag{2.6}$$

Доказательство данной теоремы будет приведено ниже в разделе 3.4.

Для определения пространств траекторий нужна следующая лемма.

Лемма 2.1. *Для всякого слабого решения v на $\mathbb{R}_+$ задачи* (1.5)—(1.8) *с функцией $F \in L_2(0,T;V^0)$ имеем $v' \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;V^{-1})$, причём имеет место неравенство*

$$\|v'(t)\|_{-1} \leqslant C(\|F(t)\|_{-3}+\|v(t)\|_1+\|v(t)\|_1^2) \tag{2.7}$$

при почти всех $t>0$ с постоянной C, не зависящей от t, v и f.

Доказательство данной леммы будет приведено ниже в разделе 3.4.

2.3. Постановка задачи и формулировка результата существования pullback-аттракторов

Ряд задач для дифференциальных уравнений в частных производных не имеет теорем единственности. Предельные режимы таких задач можно исследовать на основе теории траекторных аттракторов. Эта теория была развита М. И. Вишиком и В. В. Чепыжовым (см. [12]). Близкий метод был независимо предложен Дж. Селлом (см. [13]).

Однако для моделей движения растворов полимеров (как и для многих других моделей неньютоновской гидродинамики) не всегда удаётся найти траекторные пространства, инвариантные относительно сдвигов. Поэтому в [16] была предложена конструкция теории траекторных аттракторов, не требующая инвариантности траекторных пространств относительно сдвигов (см. также [21]). Далее данная теория была развита для pullback-аттракторов математических уравнений гидродинамики, не имеющих единственности решений [15], и применена к ряду моделей неньютоновской гидродинамики [7, 19].

Приведём основные определения и результаты абстрактной теории pullback-аттракторов пространств траекторий [15].

Пусть E и E_0 — банаховы пространства. Кроме того, предположим, что $E \subset E_0$ и E рефлексивно. Каждому $\tau \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие непустое множество

$$\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T} := C(\mathbb{R}_+;E_0) \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E).$$

Множества $\mathcal{H}_\tau^+$ называются *пространствами траекторий*, а их элементы — *траекториями*. Семейство $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}_\tau^+\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ будем называть *семейством пространств траекторий*.

Зададим класс семейств множеств $\mathfrak{D}$ над E, причём будем считать, что для каждого семейства $\mathbf{D} = \{D_t\} \in \mathfrak{D}$ имеем $D_t \neq \varnothing$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Для каждого

$\mathbf{D} = \{D_\tau\} \in \mathfrak{D}$ рассмотрим семейство $\mathbf{H}^+(\mathbf{D}) = \{\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D})\}$, где

$$\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) = \{v \in \mathcal{H}_\tau^+ : v(0) \in D_\tau\}.$$

Обозначим через $\mathrm{T}(h)$ оператор сдвига, который действует на функции по правилу

$$(\mathrm{T}(h)g)(s) = g(s+h).$$

Определение 2.2. Семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$ ($P_\theta \subset \mathcal{T}$) называется *$\mathfrak{D}$-pull-back-притягивающим* для $\mathcal{H}^+$, если для любого семейства $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и для любого $\theta \in \mathbb{R}$ выполняется предельное соотношение

$$\sup_{u \in \mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D})} \inf_{v \in P_\theta} \|\mathrm{T}(\theta - \tau)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)} \to 0 \quad (\tau \to -\infty).$$

Определение 2.3. Семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$ ($P_\theta \subset \mathcal{T}$) называется *$\mathfrak{D}$-pullback-поглощающим* для $\mathbf{H}^+$, если для любого семейства $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и для любого $\theta \in \mathbb{R}$ существует число $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leqslant \theta$, такое что для всех $\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$

$$\mathrm{T}(\theta - \tau)\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) \subset P_\theta$$

и функция $\tau_{\mathbf{D}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не убывает.

Определение 2.4. Семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$ ($P_\theta \subset \mathcal{T}$) называется *$\mathcal{T}$-относительно-компактным*, если

1) P_θ относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ при каждом $\theta \in \mathbb{R}$;
2) для каждого $\theta \in \mathbb{R}$ существует непрерывная функция $\varphi_\theta \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, такая что для каждой траектории $v \in P_\theta$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство $\|v(t)\|_E \leqslant \varphi_\theta(t)$.

Такое семейство называется *$\mathcal{T}$-компактным*, если множество P_θ замкнуто (и, таким образом, компактно) в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ при каждом $\theta \in \mathbb{R}$.

Для семейства $\mathbf{P} = \{P_\tau\}$ ($P_\tau \subset \mathcal{T}$) и для $h \in \mathbb{R}$ обозначим $\mathrm{T}(h)\mathbf{P}$ семейство множеств

$$(\mathrm{T}(h)P)_\tau = \mathrm{T}(h)P_{\tau-h} \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Также будем считать, что включение семейств $\mathbf{P} \subset \mathbf{P}'$, где $\mathbf{P} = \{P_\tau\}$, $\mathbf{P}' = \{P'_\tau\}$ ($P_\tau, P'_\tau \subset \mathcal{T}$) по определению означает, что $P_\tau \subset P'_\tau$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$.

Определение 2.5. Семейство $\mathbf{P}$, состоящее из непустых множеств в $\mathcal{T}$, называется *траекторным $\mathfrak{D}$-pullback-полуаттрактором* для $\mathbf{H}^+$, если

1) $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$-компактным;
2) $\mathrm{T}(h)\mathbf{P} \subset \mathbf{P}$ для всех $h \geqslant 0$;
3) $\mathbf{P}$ является $\mathfrak{D}$-pullback-притягивающим.

Определение 2.6. Траекторный $\mathfrak{D}$-pullback-полуаттрактор $\mathbf{P}$ для $\mathbf{H}^+$ называется *траекторным $\mathfrak{D}$-pullback-аттрактором* для $\mathbf{H}^+$, если $\mathrm{T}(h)\mathbf{P} = \mathbf{P}$ для всех $h \geqslant 0$.

Определение 2.7. Траекторный $\mathfrak{D}$-pullback-аттрактор $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_\theta\}$ ($\mathcal{U}_\theta \subset \mathcal{T}$) для $\mathbf{H}^+$ называется *минимальным*, если он содержится в любом траекторном $\mathcal{D}$-pullback-аттракторе $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$.

Определение 2.8. Семейство $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_\theta\} \subset E$ называется *минимальным* $\mathfrak{D}$*-pullback-аттрактором* для $\mathbf{H}^+$, если

1) $\mathcal{A}_\theta$ компактно в E_0 и ограниченно в E при всех $\theta \in \mathbb{R}$;
2) для всех $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ выполняется условие pullback-притягивания
$$\sup_{v \in \mathcal{H}^+_\tau(\mathbf{D})} \inf_{a \in \mathcal{A}_\theta} \|v(\theta - \tau) - a\|_{E_0} \to 0 \quad (\tau \to -\infty);$$
3) $\mathbf{A}$ содержится в любом семействе $\mathbf{A}' = \{\mathcal{A}'_\theta\}$ $(\mathcal{A}'_\theta \subset E)$, удовлетворяющем условиям 1) и 2).

Теорема 2.3. *Пусть для* $\mathbf{H}^+$ *существует относительно* $\mathcal{T}$*-компактное* $\mathfrak{D}$*-pullback-поглощающее семейство* $\mathbf{P}$, *и пусть* $\bar{\mathbf{P}}$ — *замыкание* $\mathbf{P}$ *в топологии* $C(\mathbb{R}_+; E_0)$. *Тогда существует минимальный траекторный* $\mathfrak{D}$*-pullback-аттрактор* $\mathbf{U} \subset \bar{\mathbf{P}}$.

Теорема 2.4. *Пусть существует траекторный* $\mathfrak{D}$*-pullback-полуаттрактор* $\mathbf{P}$ *для* $\mathbf{H}^+$. *Тогда существует минимальный траекторный* $\mathfrak{D}$*-pullback-аттрактор* $\mathcal{U} \subset P$.

Теорема 2.5. *Пусть* $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_\theta\}$ — *минимальный траекторный* $\mathfrak{D}$*-pullback-аттрактор для* $\mathbf{H}^+$. *Тогда семейство* $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_\theta\}$, *где* $\mathcal{A}_\theta = \{u(0)\colon u \in \mathcal{U}_\theta\} \subset E$, *является минимальным* $\mathfrak{D}$*-pullback-аттрактором для* $\mathbf{H}^+$.

Перейдём теперь к pullback-аттракторам рассматриваемой гидродинамической модели.

Будем предполагать, что плотность внешних сил f в уравнении (1.1) принадлежит пространству $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; V^0)$ и удовлетворяет условию
$$\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\alpha\xi} \|f(\xi)\|^2_{-3}\, d\xi < \infty \tag{2.8}$$
для всех $t \in \mathbb{R}$ (здесь α определяется формулой (2.5)).

Зафиксируем число $\delta \in (0, 1]$. В качестве банаховых пространств, необходимых для введения класса $\mathcal{T}$, возьмём $E = V^1$ и $E_0 = V^{1-\delta}$.

Теорема 2.6. *Пусть* $f \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, V^0)$ *удовлетворяет условию* (2.8). *Тогда семейство пространств траекторий имеет минимальный траекторный* $\mathfrak{D}$*-pullback-аттрактор* $\mathbf{U}$ *и минимальный* $\mathfrak{D}$*-pullback-аттрактор* $\mathbf{A} = \mathbf{U}(0)$.

Доказательство данной теоремы будет приведено ниже в разделе 4.

3. Разрешимость начально-краевой задачи

3.1. Аппроксимационная задача

Для изучения системы (1.1)—(1.3) используется аппроксимационная задача. Чтобы сформулировать эту задачу, введём следующие операторы:

$$A^3\colon V^3 \to V^{-3},$$

$$\langle A^3 u, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla(\pi\Delta u) : \nabla(\pi\Delta\varphi)\, dx \quad (u \in V^3,\ \varphi \in V^3);$$

$$B_1\colon L_4(\Omega)^n \to V^{-1},$$

$$\langle B_1(u), \varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \quad (u \in L_4(\Omega)^n,\ \varphi \in V^1);$$

$$B_2\colon V^1 \to V^{-3},$$

$$\langle B_2(u), \varphi\rangle = \sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \quad (u \in V^1,\ \varphi \in V^3);$$

$$B_3\colon V^1 \to V^{-3},$$

$$\langle B_3(u), \varphi\rangle = \sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\, \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \quad (u \in V^1,\ \varphi \in V^3);$$

$$D\colon V^1 \to V^{-3},$$

$$\langle D(u), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \big(\mathcal{E}(u) W_\rho(u) - W_\rho(u)\mathcal{E}(u)\big) : \nabla\varphi\, dx \quad (u \in V^1,\ \varphi \in V^3).$$

Операторы определены корректно, так как в любом случае $u_i \in L_4(\Omega)$; $\partial u_j/\partial x_i, \partial\varphi_j/\partial x_i \in L_2(\Omega)$, и в силу вложения $V^3 \subset H^3(\Omega)^n$ также имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \in H^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$$

при $\varphi \in V^3$.

Введём обозначение для экспоненциальной функции: для $\beta \in \mathbb{R}$ обозначим

$$e_\beta(t) = e^{\beta t}.$$

Для данной функции $F \in L_2(0,T;V^0)$ рассмотрим семейство уравнений, зависящее от параметра $\lambda \in [0,1]$:

$$(I + \varepsilon e_{-\lambda\alpha} A^3 + \varkappa A)v' + \lambda\big(\nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v)\big) = \lambda F, \quad (3.1)$$

где $\varepsilon \in (0,1]$. Аппроксимацией уравнения (2.3) служит уравнение (3.1), соответствующее значению $\lambda = 1$:

$$(I + \varepsilon e_{-\alpha} A^3 + \varkappa A)v' + \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v) = F. \quad (3.2)$$

Семейство (3.1) рассматривается для того, чтобы доказать разрешимость уравнения (3.2).

Определение 3.1. *Решением* уравнения (3.1) на отрезке $[0,T]$ будем называть функцию $v \in W_2[0,T]$, такую что при подстановке v в уравнение (3.1) оно превращается в равенство в $L_\infty([0,T];V^{-3})$. *Решением* уравнения (3.2) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, такую что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0, T]$ является решением уравнения (3.2) на этом отрезке.

Для уравнения (3.1) имеет смысл начальное условие

$$v(0) = b \tag{3.3}$$

с $b \in V^3$, поскольку его решения рассматриваются в классе $W_2[0, T]$, состоящем из непрерывных функций со значениями в V^3.

Рассмотрим также следующее семейство операторов, зависящее от параметра $\lambda \in [0, 1]$:

$$L_\lambda \colon W_2[0, T] \to L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3,$$
$$L_\lambda(v) = \big((I + \varepsilon e_{-\lambda\alpha} A^3 + \varkappa A)v', v(0)\big);$$

и оператор

$$K \colon W_2[0, T] \to L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3,$$
$$K(v) = (\nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v), 0).$$

Заметим, что теперь аппроксимационная задача (3.1) эквивалентна задаче

$$L_\lambda v + \lambda K(v) = \lambda(F, b). \tag{3.4}$$

3.2. Свойства операторов

В этом разделе будут рассмотрены некоторые свойства операторов A, B_i и D, введённых в предыдущих разделах. Эти свойства будут приведены без доказательств, поскольку их можно найти в [5, 8, 17].

Лемма 3.1. *Выполнены следующие свойства операторов*:

1) *оператор* $A \colon W_2[0, T] \to L_\infty(0, T; V^{-3})$ *непрерывен, компактен и имеет место оценка*
$$\|Av\|_{-1} \leqslant \|v\|_1;$$
2) *оператор* $A^3 \colon L_2(0, T; V^3) \to L_2(0, T; V^{-3})$ *ограничен;*
3) *отображение* $B_1 \colon W_2[0, T] \to L_\infty(0, T; V^{-3})$ *непрерывно, компактно и имеет место оценка*
$$\|B(v)\|_{-1} \leqslant C\|v\|^2_{L_4(\Omega)^n};$$
4) *отображения* $B_i \colon W_2[0, T] \to L_\infty(0, T; V^{-3})$ $(i = 2, 3)$ *непрерывны, компактны и имеют место оценки*
$$\|B_i(v)\|_{-3} \leqslant C\|v\|_1^2;$$
5) *отображение* $D \colon W_2[0, T] \to L_\infty(0, T; V^{-3})$ *непрерывно, компактно и имеет место оценка*
$$\|D(v)\|_{-3} \leqslant C\|v\|_1^2;$$

6) *при любом* $\lambda \in [0,1]$ *оператор* $L_\lambda\colon W_2[0,T] \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ *ограничен и обратим, обратный оператор* $L_\lambda^{-1}(w,b)$ *непрерывен по совокупности переменных* $v \in L_2(0,T;V^{-3})$, $b \in V^3$, $\lambda \in [0,1]$.

Лемма 3.2. *Оператор* $K\colon W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3}) \times V^3$ *является непрерывным и компактным.*

Доказательство. Утверждение следует из непрерывности и компактности операторов A, B_i $(i = 1,2,3)$ и D в соответствующих пространствах (см. пункты 1), 3)—5) леммы 3.1). □

Лемма 3.3. *Оператор* $I + \varkappa A\colon V^{-1} \to V^{-3}$, *действующий по правилу*

$$\langle (I+\varkappa A)g, \varphi\rangle_{V^{-3}\times V^3} = \langle g, \varphi + \varkappa A\varphi\rangle_{V^{-1}\times V^1} \quad (g \in V^{-1},\ \varphi \in V^3),$$

является топологическим изоморфизмом пространств V^{-1} *и* V^{-3}.

Следствие 3.1. *Для* $T > 0$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *оператор*

$$I + \varkappa A\colon L_p(0,T;V^{-1}) \to L_p(0,T;V^{-3})$$

ограничен.

Замечание 3.1. Заметим, что оператор $I + \varkappa A\colon V^{-1} \to V^{-3}$ из леммы 3.3 является продолжением оператора $I + \varkappa A\colon V^3 \to V^1 \subset V^{-3}$ с учётом вложений $V^3 \subset V^0 \equiv (V^0)^* \subset V^{-1}$.

Лемма 3.4. *Линейный оператор* $I + \varepsilon A^3 + \varkappa A\colon V^3 \to V^{-3}$ *ограничен и биективен, и имеет место оценка*

$$\varepsilon\|v\|_3 \leqslant \|(I + \varepsilon A^3 + \varkappa A)v\|_{-3} \leqslant \big((1+\varkappa C) + \varepsilon\big)\|v\|_3$$

с постоянной C, *зависящей только от области* Ω.

3.3. Априорные оценки для аппроксимационной задачи

Лемма 3.5. *Пусть* v — *решение уравнения* (3.1) *на отрезке* $[0,T]$ $(T > 0)$ *при некоторых* $\lambda \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$. *Тогда при всех* $t \in [0,T]$ *имеет место оценка*

$$\varkappa\|v(t)\|_1^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\|v(t)\|_3^2 \leqslant \\ \leqslant e^{-\lambda\alpha t}\bigg((K_0^2 + \varkappa)\|v(0)\|_1^2 + \varepsilon\|v(0)\|_3^2 + \frac{\lambda}{\nu}\int\limits_0^t e^{\lambda\alpha\xi}\|F(\xi)\|_{-1}^2\,d\xi\bigg), \quad (3.5)$$

где K_0 — *постоянная, не зависящая от* v.

Доказательство. Применим обе части уравнения (3.1) к пробной функции $\varphi \in V^3$. Получим

$$\int\limits_\Omega v'(t)\varphi\,dx - \lambda\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega v_i(t)v_j(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \lambda\nu\int\limits_\Omega \nabla v(t):\nabla\varphi\,dx +$$
$$+\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\int\limits_\Omega \nabla\big(\pi\Delta v'(t)\big):\nabla(\pi\Delta\varphi)\,dx + \varkappa\int\limits_\Omega\nabla v'(t):\nabla\varphi\,dx -$$
$$-\lambda\varkappa\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega v_k(t)\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx - \lambda\varkappa\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega v_k(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_i\partial x_k}\,dx +$$
$$+2\lambda\varkappa\int\limits_\Omega\big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big):\nabla\varphi\,dx = \lambda(F(t),\varphi)_0 \tag{3.6}$$

при всех $\varphi\in V^3$. Преобразуем отдельные слагаемые в левой части:

$$\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega v_k(t)\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx + \sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega v_k(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_i\partial x_k}\,dx =$$
$$= 2\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega v_k(t)\mathcal{E}_{ij}\big(v(t)\big)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx = -2\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}\big(v(t)\big)}{\partial x_k}\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx -$$
$$-2\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega\frac{\partial v_k(t)}{\partial x_k}\mathcal{E}_{ij}\big(v(t)\big)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx = -2\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}\big(v(t)\big)}{\partial x_k}\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx.$$

Тогда тождество (3.6) можно записать в виде

$$\int\limits_\Omega v'(t)\varphi\,dx - \lambda\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega v_i(t)v_j(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \lambda\nu\int\limits_\Omega \nabla v(t):\nabla\varphi\,dx +$$
$$+\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\int\limits_\Omega \nabla\big(\pi\Delta v'(t)\big):\nabla(\pi\Delta\varphi)\,dx + \varkappa\int\limits_\Omega\nabla v'(t):\nabla\varphi\,dx +$$
$$+2\lambda\varkappa\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}\big(v(t)\big)}{\partial x_k}\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx +$$
$$+2\lambda\varkappa\int\limits_\Omega\big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big):\nabla\varphi\,dx = \lambda(F(t),\varphi)_0.$$

При почти каждом $t\in[0,T]$ подставим $\varphi = v(t)$. Получим

$$\int\limits_\Omega v'(t)v(t)\,dx - \lambda\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega v_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx + \lambda\nu\int\limits_\Omega \nabla v(t):\nabla v(t)\,dx +$$
$$+\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\int\limits_\Omega \nabla\big(\pi\Delta v'(t)\big):\nabla(\pi\Delta v)\,dx + \varkappa\int\limits_\Omega\nabla v'(t):\nabla v(t)\,dx +$$

$$+ 2\lambda\varkappa \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_{\Omega} v_k(t) \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} \, dx +$$

$$+ 2\lambda\varkappa \int_{\Omega} \big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) : \nabla v(t) \, dx = \lambda\big(F(t), v(t)\big)_0. \qquad (3.7)$$

Преобразуем члены в левой части:

$$\int_{\Omega} v'(t) v(t) \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial |v(t)|^2}{\partial t} \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v(t)|^2 \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_0^2;$$

$$\int_{\Omega} \nabla\big(\pi\Delta v'(t)\big) : \nabla\big(\pi\Delta v(t)\big) \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \Big(\nabla\big(\pi\Delta v(t)\big) : \nabla\big(\pi\Delta v(t)\big)\Big) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_3^2;$$

$$\int_{\Omega} \nabla v'(t) : \nabla v(t) \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla v(t) : \nabla v) \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla v(t) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_1^2;$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} v_i(t) v_j(t) \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} \, dx = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} v_i(t) \frac{\partial (v_j(t)^2)}{\partial x_i} \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial v_i(t)}{\partial x_i} v_j(t)^2 \, dx = 0;$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \int_{\Omega} v_k(t) \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} \, dx = 2 \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_{\Omega} v_k(t) \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) \, dx =$$

$$= 2 \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_{\Omega} v_k(t) \frac{\partial \big(\mathcal{E}_{ij}(v)\big)^2}{\partial x_k} \, dx = -2 \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial v_k(t)}{\partial x_k} \big(\mathcal{E}_{ij}(v)\big)^2 \, dx =$$

$$= -2 \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \operatorname{div} v(t) \, \big(\mathcal{E}_{ij}(v)\big)^2 \, dx = 0;$$

$$\int_{\Omega} \big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) : \nabla v(t) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) : \big(\mathcal{E}(v) + W(v)\big) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) : \mathcal{E}(v)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) : W(v)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \int\limits_\Omega \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik} - (W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ki}\mathcal{E}_{ji}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \int\limits_\Omega \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik} - (W_\rho)_{kj}\mathcal{E}_{ji}W_{ki}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \int\limits_\Omega \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik} - \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \int\limits_\Omega \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik} - \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}\, dx = 0$$

(здесь мы воспользовались симметричностью тензора $\mathcal{E}$ и кососимметричностью тензоров W_ρ и W). Таким образом, тождество (3.7) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0^2 + \frac{\varepsilon}{2} e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_3^2 + \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_1^2 + \lambda\nu\|v(t)\|_1^2 = \lambda\big(F(t), v(t)\big)_0.$$

Умножим обе части на 2:

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0^2 + \varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|_1^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_3^2 + 2\lambda\nu\|v(t)\|_1^2 = 2\lambda\big(F(t), v(t)\big)_0.$$

Оценим правую часть. Имеем

$$\big(F(t), v(t)\big)_0 = \langle F(t), v(t)\rangle_{V^{-1}\times V^1} \leqslant 2\|F(t)\|_{-1}\|v(t)\|_1 \leqslant \frac{1}{2\nu}\|F(t)\|_{-1}^2 + \frac{\nu}{2}\|v(t)\|_1^2.$$

Таким образом, получаем выполняющуюся при почти всех t оценку

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0^2 + \varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|_1^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_3^2 + 2\lambda\nu\|v(t)\|_1^2 \leqslant \frac{\lambda}{\nu}\|F\|_{-1}^2 + \lambda\nu\|v(t)\|_1^2,$$

или

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0^2 + \varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|_1^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_3^2 + \lambda\nu\|v(t)\|_1^2 \leqslant \frac{\lambda}{\nu}\|F\|_{-1}^2. \tag{3.8}$$

Рассмотрим на V^1 вспомогательную норму $\|u\|^2 = \|u\|_0^2 + \varkappa\|u\|_1^2$, эквивалентную норме $\|\cdot\|_1$. Из определения и из неравенства Фридрихса

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant K_0\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)^n} \quad \big(v \in H_0^1(\Omega)\big) \tag{3.9}$$

(здесь K_0 — постоянная, не зависящая от v) следует оценка

$$\varkappa\|u\|_1^2 \leqslant \|u\|^2 \leqslant (K_0^2 + \varkappa)\|u\|_1^2. \tag{3.10}$$

Тогда имеем

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0^2 + \varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|_1^2 = \frac{d}{dt}\|v(t)\|^2$$

и

$$\nu\|v(t)\|_1^2 \geqslant \frac{\nu}{K_0+\varkappa}\|v(t)\|^2 = \alpha\|v(t)\|^2.$$

Таким образом, из неравенства (3.8) мы получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_3^2 + \lambda\alpha\|v(t)\|^2 \leqslant \frac{\lambda}{\nu}\|F\|_{-1}^2.$$

В первом и третьем слагаемых левой части выполним подстановку $v(t) = \bar{v}(t)\exp(-\lambda\alpha t/2)$. Имеем

$$-\lambda\alpha e^{-\lambda\alpha t}\|\bar{v}(t)\|^2 + e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\|\bar{v}(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_3^2 + \lambda\alpha e^{-\lambda\alpha t}\|\bar{v}(t)\|^2 \leqslant \frac{\lambda}{\nu}\|F\|_{-1}^2.$$

Умножив обе части неравенства на $\exp(\lambda\alpha t)$, получим

$$\frac{d}{dt}(\|\bar{v}(t)\|^2 + \varepsilon\|v(t)\|_3^2) \leqslant \frac{\lambda}{\nu}\|F\|_{-1}^2 e^{\lambda\alpha t}.$$

Проинтегрировав последнее неравенство, получим при всех t

$$\|\bar{v}(t)\|^2 + \varepsilon\|v(t)\|_3^2 \leqslant \|v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|_3^2 + \frac{\lambda}{\nu}\int\limits_0^t e^{\lambda\alpha\xi}\|F(\xi)\|_{-1}^2\,d\xi.$$

Умножив обе части на $\exp(-\lambda\alpha t)$, имеем

$$\|v(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\|v(t)\|_3^2 \leqslant e^{-\lambda\alpha t}\biggl(\|v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|_3^2 + \frac{\lambda}{\nu}\int\limits_0^t e^{\lambda\alpha\xi}\|F(\xi)\|_{-1}^2\,d\xi\biggr).$$

Отсюда и из (3.10) следует доказываемая оценка (3.5). □

Лемма 3.6. *Пусть v — решение уравнения* (3.1) *на отрезке* $[0,T]$ ($T>0$) *при некоторых $\lambda \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$. Тогда при почти всех $t \in [0,T]$ имеет место оценка*

$$\|v'(t)\|_{-1} + \varepsilon e^{-\alpha t}\|v'(t)\|_3 \leqslant C(\|F(t)\|_{-3} + \|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2) \tag{3.11}$$

с постоянной C, не зависящей от λ, ε, v, t.

Доказательство. Так как v является решением уравнения (3.1), то при почти всех $t \in [0,T]$ справедливо равенство

$$(I + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}A^3 + \varkappa A)v'(t) =$$
$$= \lambda\Bigl(F(t) - \nu Av(t) + B_1\bigl(v(t)\bigr) + \varkappa B_2\bigl(v(t)\bigr) + \varkappa B_3\bigl(v(t)\bigr) - 2\varkappa D\bigl(v(t)\bigr)\Bigr).$$

Так как $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то, пользуясь свойствами операторов A, B_i и D (лемма 3.1) и вложениями $V^{-1} \subset V^{-3}$ и $L_4(\Omega)^n \subset V^1$, получаем неравенство

$$\|(I + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}A^3 + \varkappa A)v'(t)\|_{-3} \leqslant \|F(t)\|_{-3} + C_1(\|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2)$$

с постоянной C_1, не зависящей от λ, ε, v, t. Далее по лемме 3.4 получаем

$$\varepsilon e^{-\alpha t}\|v'(t)\|_3 \leqslant \|F(t)\|_{-3} + C_1(\|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2). \tag{3.12}$$

Из уравнения (3.1) выводим, что

$$(I+\varkappa A)v'(t) = -\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}A^3 v'(t) + \\ + \lambda\Big(F(t) - \nu A v(t) + B_1\big(v(t)\big) + \varkappa B_2\big(v(t)\big) + \varkappa B_3\big(v(t)\big) - 2\varkappa D\big(v(t)\big)\Big).$$

Так как $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то, снова пользуясь свойствами операторов A, A^3, B_i и D (лемма 3.1), вложениями пространств $V^{-1} \subset V^{-3}$ и $L_4(\Omega)^n \subset V^1$, а также (3.12), получаем неравенство

$$\|(I+\varkappa A)v'(t)\|_{-3} \leqslant e^{-\lambda\alpha t}\|v'(t)\|_3 + \|F(t)\|_{-3} + C_1(\|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2) \leqslant \\ \leqslant 2\big(\|F(t)\|_{-3} + C_1(\|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2)\big). \tag{3.13}$$

По лемме 3.3 оператор $I+\varkappa A\colon V^{-1} \to V^{-3}$ является топологическим изоморфизмом, поэтому оператор $(I+\varkappa A)^{-1}\colon V^{-3} \to V^{-1}$ ограниченный. Следовательно, из неравенства (3.13) получаем

$$\|v'(t)\|_{-1} \leqslant C_2\big(\|F(t)\|_{-3} + C_1(\|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2)\big),$$

где C_2 не зависит от λ, ε, v, t. Складывая последнее неравенство с (3.12), получаем (3.11). □

3.4. Разрешимость задач

Лемма 3.7. *Пусть $F \in L_2(0,T;V^0)$. На любом отрезке $[0,T]$ существует решение уравнения* (3.2), *принадлежащее пространству $W_2[0,T]$ и удовлетворяющее начальному условию* (3.3) *с произвольным $b \in V^3$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство уравнений (3.4), зависящих от параметра $\lambda \in [0,1]$. Уравнения этого семейства эквивалентны уравнениям (3.1), снабжённым начальными условиями

$$v(0) = \lambda b;$$

в частности, уравнение (3.4), соответствующее значению параметра $\lambda = 1$, эквивалентно уравнению (3.2), снабжённому начальным условием (3.3).

Покажем, что уравнение (3.4) не имеет решений на границе шара в пространстве $W_2[0,T]$ достаточно большого радиуса, не зависящего от λ. Пусть v — решение этого уравнения, соответствующее некоторому $\lambda \in [0,1]$.

Из леммы 3.5 следует, что для функции v при всех $t \in [0,T]$ выполняется неравенство

$$\|v(t)\|_3^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon}e^{\alpha T}\left((K_0^2+\varkappa)\|b\|_1^2 + \varepsilon\|b\|_3^2 + \frac{1}{\nu}\int\limits_0^T \|F(\xi)\|_{-1}^2\,d\xi\right) \stackrel{\text{def}}{=} R_1^2.$$

Тогда
$$\|v\|_{C([0,T];V^3)} \leqslant R_1.$$
Отметим, что R_1 не зависит от λ.

Из леммы 3.6 следует, что для решения v при почти всех $t \in (0,T)$ выполняется неравенство
$$\|v'(t)\|_3 \leqslant \frac{Ce^{\alpha T}}{\varepsilon}(\|F(t)\|_{-3} + \|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2).$$
Правая часть квадратично суммируема, поэтому левая также квадратично суммируема и
$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \\ \leqslant \frac{Ce^{\alpha T}}{\varepsilon}\left(\|F\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \sqrt{T}\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V^1} + \sqrt{T}\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V^1}^2\right). \quad (3.14)$$
Ввиду непрерывного вложения $V^3 \subset V^1$
$$\max_{t\in[0,T]}\|v\|_{V^1} \leqslant C_1\|v\|_{C([0,T];V^3)} \leqslant C_1R_1,$$
таким образом, из неравенства (3.14) следует неравенство
$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant R_2, \quad (3.15)$$
где постоянная R_2 также не зависит от λ.

Складывая неравенства (3.14) и (3.15), видим, что всякое решение уравнения (3.4) удовлетворяет оценке
$$\|v\|_{W_2[0,T]} \leqslant R_1 + R_2.$$
Иными словами, при любом $\lambda \in [0,1]$ уравнение (3.4) не имеет решений на границе шара радиуса R, где R — произвольное число, такое что $R > R_1 + R_2$.

Воспользовавшись обратимостью оператора L_λ (лемма 3.1, пункт 6)), перейдём от (3.4) к эквивалентному уравнению
$$v - \lambda L_\lambda^{-1}\big((F,b) - K(v)\big) = 0. \quad (3.16)$$
Рассмотрим отображение $k(\lambda,v) = \lambda L_\lambda^{-1}\big((F,b) - K(v)\big)$ и покажем, что отображение
$$\Phi(\lambda,v) = v - k(\lambda,v)$$
является гомотопией векторных полей $\Phi_0 v = v$ и $\Phi_1 v = v - L_1^{-1}\big((F,b) - K(v)\big)$ на шаре B_R пространства $W_2[0,T]$ радиуса R, определённого выше. Для этого нужно показать, что отображение $k(\lambda,v)$ вполне непрерывно по совокупности переменных (λ,v) и что $\Phi(\lambda,v)$ не принимает нулевых значений на границе шара B_R ни при каких λ.

Непрерывность отображения $k(\lambda,v)$ по совокупности переменных (λ,v) следует из непрерывности отображений K (лемма 3.2) и $(\lambda,w,b) \mapsto L_\lambda^{-1}(w,b)$ (лемма 3.1, пункт 6)).

Пусть последовательность $\{u_m\}$ является ограниченной в $W_2[0,T]$ и $\{\lambda_m\}$ — последовательность чисел из отрезка $[0,1]$. Покажем, что последовательность $\{k(\lambda_m,u_m)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Так как отображение K вполне непрерывно, существует сходящаяся подпоследовательность $\{K(u_{m_k})\}$, предел которой обозначим через w_0. Без ограничения общности $\{\lambda_{m_k}\}$ также сходится к некоторому λ_0. Так как отображение $(\lambda,w,b)\mapsto L_\lambda^{-1}(w,b)$ непрерывно, имеем

$$L_{\lambda_{m_k}}^{-1}\big((F,b)-K(u_{m_k})\big)\to L_{\lambda_0}^{-1}\big((F,b)-w_0\big),$$

и следовательно,

$$k(\lambda_{m_k},u_{m_k})=\lambda_{m_k}L_{\lambda_{m_k}}^{-1}\big((F,b)-K(u_{m_k})\big)\to\lambda_0L_{\lambda_0}^{-1}\big((F,b)-w_0\big).$$

Таким образом, $\{k(\lambda_{m_k},u_{m_k})\}$ — искомая сходящаяся подпоследовательность. Полная непрерывность отображения k доказана.

Невырожденность деформации Φ на границе шара B_R следует из того, что уравнение (3.4), а следовательно, и уравнение (3.16) не имеют решений на границе этого шара ни при каких $\lambda\in[0,1]$.

Из сказанного следует, что Φ_0 и Φ_1 — вполне непрерывные векторные поля в $W_2[0,T]$, гомотопные на шаре B_R. Следовательно, для этих полей определена степень Лере—Шаудера, и в силу гомотопической инвариантности степени

$$\deg_{LS}(\Phi_1,B_R,0)=\deg_{LS}(\Phi_0,B_R,0)=1.$$

Поскольку степень поля $\Phi_1v=v-L_1^{-1}\big((f,b)-K(v)\big)$ отлична от 0, то существует по крайней мере одно решение $v\in W_2[0,T]$ уравнения

$$v-L_1^{-1}\big((f,b)-K(v)\big)=0.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (3.4) с $\lambda=1$, которое, в свою очередь, эквивалентно задаче (3.2), (2.4). Таким образом, разрешимость аппроксимационной задачи доказана. □

Лемма 3.8. *Пусть последовательность $\{v_m\}$ слабо сходится в пространстве $W_1[0,T]$ к функции v_*. Пусть $\delta\in(0,1]$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *имеют место предельные соотношения*

$$v_m\to v_*\ \text{сильно в}\ C(0,T;V^{1-\delta});\tag{3.17}$$

$$Av_m\rightharpoonup Av_*\ \text{слабо в}\ L_4(0,T;V^{-1});\tag{3.18}$$

$$(I+\varkappa A)v_m'\rightharpoonup(I+\varkappa A)v_*'\ \text{слабо в}\ L_2(0,T;V^{-3});\tag{3.19}$$

$$B_1(v_m)\to B_1(v_*)\ \text{сильно в}\ L_\infty(0,T;V^{-1});\tag{3.20}$$

$$B_i(v_m)\rightharpoonup B_i(v_*)\ \text{слабо в}\ L_2(0,T;V^{-3})\ (i=2,3);\tag{3.21}$$

$$D(v_m)\rightharpoonup D(v_*)\ \text{слабо в}\ L_2(0,T;V^{-3});\tag{3.22}$$

2) *если последовательность* $\{v'_m\}$ *является ограниченной в норме пространства* $L_2(0,T,V^3)$, *то*

$$A^3 v'_m \rightharpoonup A^3 v'_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-3}); \tag{3.23}$$

3) *если* $\varepsilon_m \to 0$ — *такая числовая последовательность, что последовательность* $\{\varepsilon_m v'_m\}$ *является ограниченной в норме пространства* $L_2(0,T,V^3)$, *то*

$$\varepsilon_m e_{-\alpha} A^3 v'_m \rightharpoonup 0 \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-3}). \tag{3.24}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из слабой сходимости последовательности $\{v_m\}$ в пространстве $W_1[0,T]$ следует её ограниченность в этом пространстве, а также ограниченность последовательности $\{v_m\}$ в $L_\infty(0,T;V^1)$, ограниченность последовательности $\{v'_m\}$ в $L_2(0,T;V^{-1})$ и сходимость

$$v_m \rightharpoonup v_* \ \ast\text{-слабо в } L_\infty(0,T;V^1), \tag{3.25}$$

$$v'_m \rightharpoonup v'_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-1}). \tag{3.26}$$

Соотношение (3.17) следует из компактного вложения $W_1[0,T] \subset C([0,T],V^{1-\delta})$, которое имеет место по теореме 2.1. Аналогично $v_m \to v_*$ сильно в $C([0,T],V^{3/4})$, что потребуется далее.

Из (3.25), вложения $L_\infty(0,T;V^1) \subset L_4(0,T;V^1)$ и рефлексивности пространства $L_4(0,T;V^1)$ следует, что

$$v_m \rightharpoonup v_* \text{ слабо в } L_4(0,T;V^1).$$

Отсюда следует (3.18), так как оператор $A\colon L_4(0,T;V^1) \to L_4(0,T;V^{-1})$ ограничен.

Соотношение (3.19) следует из (3.26), так как оператор

$$I + \varkappa A\colon L_2(0,T;V^{-1}) \to L_2(0,T;V^{-3})$$

ограничен согласно следствию 3.1.

Так как $\{v_m\}$ сходится к v_* в $C([0,T];V^{3/4})$ и при $n = 2,3$ имеют место вложения $V^{3/4} \subset H^{3/4}(\Omega)^n \subset L_4(\Omega)^n$, то

$$v_m \to v_* \text{ сильно в } L_\infty(0,T;L_4(\Omega)^n),$$

и соотношение (3.20) следует из непрерывности оператора B_1 (лемма 3.1, пункт 4)).

Соотношение (3.21) докажем для B_2 (в случае оператора B_3 рассуждения аналогичны). Компоненты вектор-функции v_m обозначим v_k^m. Требуется доказать, что для всякой функции $\varphi \in L_2(0,T;V^3)$ имеем

$$\int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k^m(t) \frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j(t)}{\partial x_i \partial x_k}\,dx\,dt \to$$

$$\to \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k(t) \frac{\partial (v_*)_i(t)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j(t)}{\partial x_i \partial x_k}\,dx\,dt \quad (l \to \infty).$$

Так как из сильной сходимости последовательности $\{v_m\}$ в $L_\infty(0,T;L_4(\Omega)^n)$ следует её сильная сходимость в $L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)$, а из слабой сходимости последовательности $\{v_m\}$ в $L_4(0,T;V^1)$ следует слабая сходимость последовательности $\{\nabla v_m\}$ в $L_4\Big(0,T;L_2\big(\Omega;M_n(\mathbb{R})\big)\Big)$, то их произведение сходится слабо к произведению пределов. Отсюда и следует сходимость (3.21).

Осталось доказать сходимость (3.22). Для этого рассмотрим первую часть оператора D:

$$\int_0^T\int_\Omega \big(\mathcal{E}(v_k^m)W_\rho(v_k^m)-\mathcal{E}(v_*)W_\rho(v_*)\big):\nabla\varphi\,dx\,dt=$$
$$=\int_0^T\int_\Omega \big(\mathcal{E}(v_k^m)\big(W_\rho(v_k^m)-W_\rho(v_*)\big)+\big(\mathcal{E}(v_k^m)-\mathcal{E}(v_*)\big)W_\rho(v_*)\big):\nabla\varphi\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\|\mathcal{E}(v_k^m)\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^{n^2})}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\int_0^T\|W_\rho(v_k^m-v_*)\|_{L_\infty(\Omega)^{n^2}}\,dt+$$
$$+\|W_\rho(v_*)\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)^{n^2})}\int_0^T\mathcal{E}(v_k^m-v_*):\nabla\varphi\,dt\leqslant$$
$$\leqslant C\bigg(\|\mathcal{E}(v_k^m)\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^{n^2})}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\int_0^T\|(v_k^m-v_*)\|_{L_2(\Omega)^n}\,dt+$$
$$+\|W_\rho(v_*)\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)^{n^2})}\int_0^T\mathcal{E}(v_k^m-v_*):\nabla\varphi\,dt\bigg)\leqslant$$
$$\leqslant C\bigg(\|\mathcal{E}(v_k^m)\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^{n^2})}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}\int_0^T\|(v_k^m-v_*)\|_{L_4(\Omega)^n}\,dt+$$
$$+\|W_\rho(v_*)\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)^{n^2})}\int_0^T\mathcal{E}(v_k^m-v_*):\nabla\varphi\,dt\bigg).$$

Вспомним, что последовательность v_k^m сходится к v_* сильно в $L_\infty(0,T;L_4(\Omega)^n)$, а $\nabla(v_k^m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^{n^2})$. Следовательно, мы доказали, что

$$\int_0^T\int_\Omega \mathcal{E}(v_k^m)W_\rho(v_k^m):\nabla\varphi\,dx\,dt\to\int_0^T\int_\Omega \mathcal{E}(v_*)W_\rho(v_*):\nabla\varphi\,dx\,dt.$$

Утверждение о второй части оператора D доказывается аналогично. Получим

$$\int_0^T \int_\Omega W_\rho(v_k^m)\mathcal{E}(v_k^m) : \nabla\varphi\, dx\, dt \to \int_0^T \int_\Omega W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*) : \nabla\varphi\, dx\, dt.$$

Следовательно, выполнена сходимость (3.22).

При дополнительном условии имеем, что $\{v'_{m_k}\}$ сходится к v'_* слабо в $L_2(0,T,V^3)$. Линейный оператор $A^3\colon L_2(0,T,V^3) \to L_2(0,T,V^{-3})$ является ограниченным, поэтому имеем слабую сходимость (3.23).

Последовательность $\{\varepsilon_m v'_m\}$ слабо сходится в $L_2(0,T,V^3)$ к некоторой предельной функции u. Линейный оператор $A^3\colon L_2(0,T,V^3) \to L_2(0,T,V^{-3})$ является ограниченным, поэтому имеем слабую сходимость

$$A^3(\varepsilon_m v'_m) \rightharpoonup A^3 u \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-3}).$$

Покажем, что $A^3u = 0$. Возьмём некоторую функцию $\varphi \in E_\infty$. Для произвольной функции $\chi \in \mathcal{D}(0,T)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^T \langle A^3\big(\varepsilon_m v'_{m_l}(t)\big), \varphi\rangle\, dt\Big| = \Big|\int_0^T \Big(\int_\Omega \nabla\Big(\pi\Delta\big(\varepsilon_m v'_m(t)\big)\Big) : \nabla(\pi\Delta\varphi)\, dx\Big)\chi(t)\, dt\Big| = \\
&\quad = \varepsilon_m\Big|\int_0^T \Big(\int_\Omega \nabla v_m(t) : \nabla(\pi\Delta^2\varphi)\, dx\Big)\chi'(t)\, dt\Big| \leqslant \\
&\quad \leqslant \varepsilon_m \int_0^T \|v_m(t)\|_1 \|\pi\Delta^2\varphi\|_1 |\chi'(t)|\, dt \leqslant \\
&\quad \leqslant \varepsilon_m \|v_m\|_{L_\infty(0,T;V^1)} \|\pi\Delta^2\varphi\|_1 \int_0^T |\chi'(t)|\, dt \to 0.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Это значит, что последовательность $\{\langle A^3(\varepsilon_m v'_m), \varphi\rangle\}$ сходится к 0 в смысле распределений. Следовательно,

$$\langle A^3 u, \varphi\rangle = 0 \tag{3.28}$$

почти всюду.

Рассмотрим теперь счётное множество $\{\varphi_k\} \subset E_\infty$, плотное в V^3. Из равенства (3.28) следует, что для всех t из некоторого подмножества полной меры отрезка $[0,T]$ имеем

$$\langle A^3 u(t), \varphi_k\rangle = 0$$

при каждом k. Так как множество $\{\varphi_k\}$ плотно, отсюда следует, что $A^3u(t) = 0$ при почти всех t.

Таким образом, мы доказали, что $\varepsilon_m A^3 v'_m \rightharpoonup 0$ слабо в $L_2(0,T;V^{-3})$. Умножение на экспоненциальную функцию, гладкую и ограниченную на отрезке $[0,T]$, не нарушает слабой сходимости, т. е. $\varepsilon_m e_{-\alpha} A^3 v'_m \rightharpoonup 0$ слабо в $L_2(0,T;V^{-3})$, что и требовалось доказать. □

Теорема 3.1. *При любом* $b \in V^3$ *задача* (3.2), (3.3) *имеет решение на полуоси* $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Пусть v_m — решение задачи (3.2), (3.3) на отрезке $[0,m]$ $(m = 1, 2, \dots)$, которое существует согласно лемме 3.7. Продолжим функции v_m на полуось $\mathbb{R}_+$:

$$\hat{v}_m(t) = \begin{cases} v(t), & 0 \leqslant t \leqslant m, \\ v(m), & t \geqslant m. \end{cases}$$

Очевидно, функции v_m принадлежат пространству $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Функция $\hat{v}_m$ на отрезке $[0,m]$ удовлетворяет неравенству (3.5) со значением $v_m(0) = b$, а также неравенству (3.11). Отсюда следует, что для любого $T > 0$ последовательность $\{\hat{v}_m\}$ является ограниченной в $W_2[0,T]$. Пространство $W_2[0,T]$ вложено в $W_1[0,T]$, которое по теореме 2.1 компактно вложено в $C([0,T];V^{1-\delta})$, где $\delta \in (0,1]$, поэтому последовательность $\{\hat{v}_m\}$ относительно компактна в $C([0,T];V^{1-\delta})$. Так как T произвольно, последовательность $\{\hat{v}_m\}$ относительно компактна в $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$ и поэтому имеет подпоследовательность $\{\hat{v}_{m_l}\}$, сходящуюся в $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$ к предельной функции v_*. Покажем, что v_* — искомое решение.

Так как последовательность $\{\hat{v}_{m_l}\}$ является ограниченной в $W_2[0,T]$, она сходится к v_* слабо в $\{\hat{v}_{m_l}\}$. Следовательно, $v_* \in W_2[0,T]$ при любом $T > 0$, т. е. $v_* \in W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

Из сходимости в $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$ следует поточечная сходимость, поэтому функция v_* удовлетворяет начальному условию (3.3).

Остаётся только проверить, что функция v_* удовлетворяет уравнению (3.2) на произвольном отрезке $[0,T]$. В самом деле, для всех $m_l \geqslant T$ имеем

$$(I + \varepsilon e_{-\alpha} A^3 + \varkappa A) v'_{m_l} + \nu A v_{m_l} - B_1(v_{m_l}) - \varkappa B_2(v_{m_l}) - \varkappa B_3(v_{m_l}) = F$$

в $L_2(0,T;V^{-3})$. Так как последовательность $\{v_{m_l}\}$ является ограниченной в $W_2[0,T]$, она сходится к v_* в этом пространстве, поэтому к этой последовательности применима лемма 3.8. Следовательно, в членах последнего уравнения можно перейти к пределу при $l \to \infty$, например слабо в $L_2(0,T;V^3)$. Следовательно, функция v_* удовлетворяет уравнению (3.2) на $[0,T]$. □

Доказательство теоремы 2.2. Выберем последовательности $\{b_m\} \subset V^3$ и $\{\varepsilon_m\}$, $\varepsilon_m > 0$, такие что

$$\|b_m - a\|_1 \to 0, \quad \varepsilon_m \to 0, \quad \varepsilon_m \|b_m\|_3^2 \to 0. \tag{3.29}$$

Последовательность $\{b_m\}$, удовлетворяющую первому свойству, можно выбрать, так как V^3 плотно вложено в V^1, после чего достаточно положить

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m \max\{\|b_m\|_3^2, 1\}}.$$

По теореме 3.1 существуют функции $v_m \in W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, являющиеся решением задачи

$$(I+\varepsilon_m e_{-\alpha} A^3+\varkappa A)v_m'+\nu A v_m - B_1(v_m)-\varkappa B_2(v_m)-\varkappa B_3(v_m) = F, \quad v_m(0) = b_m. \tag{3.30}$$

Из леммы 3.5 следует оценка

$$\|v_m(t)\|_1^2 \leqslant e^{-\alpha t}\left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa}+1\right)\|b_m\|_1^2+\frac{1}{\varkappa}\varepsilon_m\|b_m\|_3^2+\frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_0^t e^{\alpha\xi}\|F(\xi)\|_{-1}^2\,d\xi\right) \tag{3.31}$$

выполняющаяся для всех $t \geqslant 0$. Из леммы 3.6 следует оценка производных

$$\|v_m'(t)\|_{-1} \leqslant C(\|F(t)\|_{-1} + \|v_m(t)\|_1 + \|v_m(t)\|_1^2) \tag{3.32}$$

для почти всех $t > 0$.

Последовательности $\{\|b_m\|_1^2\}$ и $\{\varepsilon_m\|b_m\|_3^2\}$ являются ограниченными, поэтому из неравенств (3.30) и (3.32) следует ограниченность последовательности $\{v_m\}$ в $W_1[0,T]$ при любом $T > 0$. Рассуждая как при доказательстве теоремы 3.1, несложно показать, что, переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что функции v_m сходятся к пределу $v_* \in W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ в топологии $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$ (где $\delta \in (0,1]$) и что в задаче (3.30) можно перейти к пределу при $m \to \infty$:

$$(I+\varkappa A)v_*' + \nu A v_* - B_1(v_*) - \varkappa B_2(v_*) - \varkappa B_3(v_*) = F, \quad v_*(0) = a.$$

Применяя обе части первого уравнения последней задачи к пробной функции $\varphi \in V^3$ и принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}\langle (I+\varkappa A)v_*', \varphi\rangle_{V^{-3}\times V^3} &= \langle v_*'(t), \varphi+\varkappa A\varphi\rangle_{V^{-1}\times V^1} = \\ &= \frac{d}{dt}(v_*(t),\varphi)_{L_2} + \varkappa\frac{d}{dt}(v_*(t), A\varphi)_{L_2} = \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v_*(t)\varphi\,dx + \varkappa\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \nabla v_*(t) : \nabla\varphi\,dx,\end{aligned}$$

мы видим, что v_* является решением задачи (2.3), (2.4).

Остаётся доказать, что для v_* выполняется неравенство (2.6). Фиксируем $t \geqslant 0$. Из сходимости последовательности $\{v_m\}$ в $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$ следует сходимость $v_m(t) \to v_*(t)$ в $V^{1-\delta}$. Из неравенства (3.31) следует, что последовательность $\{v_m(t)\}$ является ограниченной в V^1, поэтому также $v_m(t) \rightharpoonup v_m(t)$ слабо в V^1. Теперь достаточно перейти в (3.31) к пределу при $m \to \infty$, учитывая (3.29) и то, что в силу слабой сходимости имеем $\|v_*(t)\|_1 \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \|v_m(t)\|_1$. $\square$

Доказательство леммы 2.1. Пусть $v \in W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ — слабое решение задачи (1.5)—(1.8). Из самого определения пространства $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ следует, что $v' \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-1})$. Покажем, что имеет место оценка (2.7).

Возьмём $T > 0$. По определению слабого решения функция v удовлетворяет тождеству (2.3) для любой функции $\varphi \in V^3$ почти всюду на $(0, T)$. Также почти всюду на $(0, T)$ имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v(t)\varphi\, dx = \frac{d}{dt}(v(t), \varphi)_0 = (v'(t), \varphi);$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla\varphi\, dx = \frac{d}{dt}(v(t), A^3\varphi)_0 = \langle v'(t), A^3\varphi\rangle_{V^{-1}\times V^1} = \langle A^3 v'(t), \varphi\rangle_{V^{-3}\times V^3}.$$

Таким образом, используя операторы, можно записать

$$\langle (I + \varkappa A)v' + \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) - F, \varphi\rangle_{V^{-3}\times V^3} = 0 \qquad (3.33)$$

для каждой $\varphi \in V^3$ почти всюду на $(0, T)$.

Будем считать, что для функции (точнее говоря, класса эквивалентности функций) $v' \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-1})$ выбран конкретный представитель. Пусть последовательность $\{\varphi_m\}$ плотна в V^3. Пусть для функции φ_m тождество (2.3) выполняется на множестве $(0, T) \setminus Q_m$, где Q_m — некоторое множество меры 0. Множество $Q = \bigcup\limits_m Q_m$ также имеет меру 0, и на множестве $(0, T) \setminus Q$ тождество (3.33) выполняется с $\varphi = \varphi_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ и, следовательно, с любой функцией $\varphi \in V^3$. Таким образом, функция v удовлетворяет операторному уравнению

$$(I + \varkappa A)v' + \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) = F$$

в $L_2(0, T; V^{-3})$. Из последнего уравнения оценка (2.7) выводится с помощью тех же рассуждений, которые были применены в доказательстве леммы 3.6. □

4. Существование pullback-аттракторов

Будем предполагать, что плотность внешних сил f в уравнении (1.1) принадлежит пространству $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; V^0)$ и удовлетворяет условию (2.8) для всех $t \in \mathbb{R}$ (здесь α определяется формулой (2.5)).

Зафиксируем число $\delta \in (0, 1]$. В качестве банаховых пространств, необходимых для введения класса $\mathcal{T}$, возьмём $E = V^1$ и $E_0 = V^{1-\delta}$.

Пусть $\tau \in \mathbb{R}$. В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}_\tau^+$ задачи (1.1)—(1.4) рассматривается множество слабых решений v задачи (1.5)—(1.8) с правой частью $F = \mathrm{T}(\tau)f$ и некоторым начальным условием $a \in V^1$ (своим для каждого v), удовлетворяющих оценке

$$\|v(t)\|_1^2 \leqslant e^{-\alpha t}\left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1\right)\|v(0)\|_1^2 + \frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_0^t e^{\alpha\xi}\|f(\xi + \tau)\|_{-3}^2\, d\xi\right). \qquad (4.1)$$

Эти пространства траекторий образуют семейство пространств траекторий $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}_\tau^+\}$.

Заметим, что для пространств $\mathcal{H}_\tau^+$ имеет место включение $\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T}$. В самом деле, из неравенства (4.1) и условия (2.8) следует равномерная по t оценка траектории $v \in \mathcal{H}_\tau^+$ на произвольном отрезке $[0, T]$:

$$\|v(t)\|_1^2 \leqslant \left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1\right)\|v(0)\|_1^2 + \frac{1}{\nu\varkappa}e^{-\alpha\tau}\int\limits_{-\infty}^{T+\tau} e^{\alpha s}\|f(s)\|_{-3}^2\,ds < \infty,$$

где $v \in L_\infty(0, T; V^1)$. В силу произвольности T получаем, что $v \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V^1)$. Кроме того, по лемме 2.1 $v' \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-1})$, поэтому по теореме 2.1, применённой для тройки пространств $V^1 \subset V^{1-\delta} \subset V^{-1}$, получаем, что $v \in C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$. Включение $\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T}$ доказано.

Теорема 4.1. *Для каждого $a \in V^1$ существует траектория $v \in \mathcal{H}_\tau^+$ $(\tau \in \mathbb{R})$, удовлетворяющая начальному условию $v(0) = a$.*

Доказательство. Теорема является непосредственным следствием теоремы 2.2 о существовании слабых решений. □

Опишем класс $\mathfrak{D}$ притягивающихся семейств множеств. Пусть $\mathcal{R}$ обозначает множество таких функций $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, что функция $\tau \mapsto e^{\alpha\tau}\big(r(\tau)\big)^2$ возрастает и

$$\lim_{\tau \to -\infty} e^{\alpha\tau}\big(r(\tau)\big)^2 = 0.$$

Класс $\mathfrak{D}$ состоит из семейств $\mathbf{D} = \{D_\tau\}$ $(D_\tau \subset V^1)$, для которых существуют функции $r_{\mathbf{D}} \in \mathcal{R}$, такие что $w \in D_\tau$ и $\|w\|_1 \leqslant r_{\mathbf{D}}(\tau)$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 2.6. Мы построим семейство множеств $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$ $(P_\theta \subset \mathcal{T})$, которое является $\mathcal{T}$-относительно компактным и pullback-поглощающим. Тогда утверждение теоремы будет следовать из теорем 2.3 и 2.5.

Пусть множество P_θ состоит из функций $v \in \mathcal{T}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\|v(t)\|_1^2 \leqslant e^{-\alpha t}\left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1 + \frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\alpha s}\|f(s+\theta)\|_{-3}^2\,ds\right), \tag{4.2}$$

$$\|v'(t)\|_{-1} \leqslant C(\|f(t+\theta)\|_{-3} + \|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2) \tag{4.3}$$

(здесь C — постоянная из неравенства (2.7)).

Покажем, что построенное семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$ является $\mathcal{T}$-относительно компактным.

Условие 2) определения 2.4 выполняется с функцией

$$\varphi_\theta(t) = e^{-\alpha t/2}\left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1 + \frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\alpha s}\|f(s+\theta)\|_{-3}^2\,ds\right)^{1/2}.$$

Конечность функции φ_θ следует из условия (2.8), так как

$$\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\alpha s}\|f(s+\theta)\|_{-3}^2\,ds = e^{-\alpha\theta}\int\limits_{-\infty}^{t+\theta} e^{\alpha\xi}\|f(\xi)\|_{-3}^2\,d\xi < \infty.$$

Проверим выполнение условия 2) определения 2.4. Пусть $[0,T]$ — произвольный отрезок. Положим $R_T = \max\limits_{t\in[0,T]} \varphi_\theta(t)$. Тогда для всякой траектории $v \in P_\theta$ имеем $\|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} \leqslant R_T$, а из неравенства (4.3) получаем

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 \leqslant C(\|f\|_{L_2(\theta,T+\theta;V^{-3})} + \sqrt{T}R_T + \sqrt{T}R_T^2).$$

Таким образом, множество P ограничено в норме пространства $L_\infty(0,T;V^1)$, а множество $\{v' \mid v \in P\}$ ограничено в норме пространства $L_2(0,T;V^{-1})$. По теореме 2.1, применённой для случая пространств $V^1 \subset V^{1-\delta} \subset V^{-1}$, получаем, что множество P относительно компактно в $C([0,T];V^{1-\delta})$. Так как T произвольно, получаем, что P_θ относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$, что и требовалось доказать.

Мы доказали, что семейство $\mathbf{P}$ $\mathcal{T}$-относительно компактно.

Проверим, что для $\mathbf{P}$ выполнены условия определения 2.3. Пусть $\mathbf{D} = \{D_\tau\} \in \mathfrak{D}$. Возьмём число θ и покажем, что существует такое $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leqslant \theta$, что при $\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$ выполняется включение

$$\mathrm{T}(\theta-\tau)\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) \subset P_\theta \tag{4.4}$$

и функция $\tau_{\mathbf{D}}$ возрастает.

По определению класса $\mathfrak{D}$ для семейства $\mathbf{D}$ существует функция $r_{\mathbf{D}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, такая что для $w \in D_\tau$ имеет место оценка $\|w\|_1 \leqslant r_{\mathbf{D}}(\tau)$, и что функция $\chi_{\mathbf{D}}(\tau) = e^{\alpha\tau}\big(r_{\mathbf{D}}(\tau)\big)^2$ возрастает и стремится к 0 при $\tau \to -\infty$. Так как функция $\chi_{\mathbf{D}}$ монотонна, она имеет возрастающую обратную функцию $\chi_{\mathbf{D}}^{-1}$.

Рассмотрим неравенство

$$\chi(\tau) \leqslant e^{\alpha\theta}. \tag{4.5}$$

По свойствам функции $\chi_{\mathbf{D}}$ оно выполняется либо на всей оси, либо на луче $(-\infty, \chi^{-1}(e^{\alpha\theta})]$. В первом случае положим $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) = \theta$, а во втором случае положим $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) = \min\{\chi^{-1}(e^{\alpha\theta}), \theta\}$. Ясно, что в любом случае функция $\tau_{\mathbf{D}}$ возрастает, удовлетворяет неравенству $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leqslant \theta$ и при $\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$ выполняется неравенство (4.5) или, что то же самое,

$$e^{-\alpha(\theta-\tau)}\big(r_{\mathbf{D}}(\tau)\big)^2 \leqslant 1 \quad \big(\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)\big). \tag{4.6}$$

Чтобы доказать включение (4.4) для $\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$, возьмём траекторию $v \in \mathcal{H}_\tau^+$, такую что $v(0) \in D_\tau$, и покажем, что $\mathrm{T}(\theta-\tau)v \in P_\theta$.

Покажем, что для функции $\mathrm{T}(\theta-\tau)v$ выполняется оценка (4.2). С помощью оценки (4.1) и неравенства (4.6) получаем

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{T}(\theta-\tau)v(t)\|_1^2=\|v(t+\theta-\tau)\|_1^2\leqslant\\
&\quad\leqslant e^{-\alpha(t+\theta-\tau)}\left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa}+1\right)\|v(0)\|_1^2+\frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_0^{t+\theta-\tau}e^{\alpha\xi}\|f(\xi+\tau)\|_{-3}^2\,d\xi\right)\leqslant\\
&\quad\leqslant e^{-\alpha t}\left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa}+1\right)e^{-\alpha(\theta-\tau)}\big(r_{\mathbf{D}}(\tau)\big)^2+\frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_{-\infty}^{t+\theta-\tau}e^{\alpha(\xi+\tau-\theta)}\|f(\xi+\tau)\|_{-3}^2\,d\xi\right)\leqslant\\
&\quad\leqslant e^{-\alpha t}\left(\frac{K_0^2}{\varkappa}+1+\frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_{-\infty}^{t}e^{\alpha s}\|f(s+\theta)\|_{-3}^2\,ds\right).
\end{aligned}$$

Оценка (4.2) для функции $\mathrm{T}(\theta-\tau)v$ доказана.

Покажем, что для функции $\mathrm{T}(\theta-\tau)v$ выполняется оценка (4.3). Так как v является слабым решением задачи (1.5)—(1.8) с функцией $F=\mathrm{T}(\tau)f$, по лемме 2.1 при почти всех $t>0$ выполняется неравенство

$$\|v'(t)\|_{-1}\leqslant C(\|f(t+\tau)\|_{-3}+\|v(t)\|_1+\|v(t)\|_1^2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\|T(\theta-\tau)v'(t)\|_{-1}&=\|v'(t+\theta-\tau)\|_{-1}\leqslant\\
&\leqslant C(\|f(t+\theta)\|_{-3}+\|v(t+\theta-\tau)\|_1+\|v(t+\theta-\tau)\|_1^2)=\\
&=C(\|f(t+\theta)\|_{-3}+\|\mathrm{T}(\theta-\tau)v(t)\|_1+\|\mathrm{T}(\theta-\tau)v(t)\|_1^2).
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем, что $\mathrm{T}(\theta-\tau)v\in P_\theta$, и включение (4.4) доказано.

Мы установили, что семейство $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$-относительно компактным и $\mathfrak{D}$-pullback-поглощающим, что достаточно для доказательства теоремы. □

Авторы благодарны рецензенту за сделанный ряд полезных замечаний.

Литература

[1] Амфилохиев В. Б., Войткунский Я. И., Мазаева Н. П., Ходорковский Я. С. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Тр. Ленинград. кораблестр. ин-та. — 1975. — Т. 96. — С. 3—9.

[2] Звягин В. Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики // Соврем. матем. Фундам. направления. — 2012. — Т. 46. — С. 92—119.

[3] Звягин А. В. Аттракторы для модели движения полимеров с объективной производной в реологическом соотношении // Докл. РАН. — 2013. — Т. 453, № 6. — С. 599—602.

[4] Звягин А. В. Задача оптимального управления с обратной связью для математической модели движения слабо концентрированных водных полимерных растворов с объективной производной // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, № 4. — С. 807—825.

[5] Звягин В. Г., Кондратьев С. К. Аттракторы слабых решений регуляризованной системы уравнений движения жидких сред с памятью // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 11. — С. 83—104.

[6] Звягин В. Г., Кондратьев С. К. О pullback-аттракторах модели движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров // Докл. РАН. — 2014. — Т. 459, № 1. — С. 10—13.

[7] Звягин В. Г., Кондратьев С. К. Pullback-аттракторы модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров // Изв. РАН. Сер. матем. — 2015. — Т. 79, № 11. — С. 3—26.

[8] Звягин В. Г., Турбин М. В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. — М.: КРАСАНД, 2012.

[9] Павловский В. А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // ДАН СССР. — 1971. — Т. 200, № 4. — С. 809—812.

[10] Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.

[11] Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.

[12] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors for Equations of Mathematical Physics. — Providence: Amer. Math. Soc., 2002. — (AMS Colloq. Publ.).

[13] Sell G. R., You Y. Dynamics of Evolutionary Equations. — New York: Springer, 2002. — (Appl. Math. Sci.; Vol. 143).

[14] Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. — 1987. — Vol. 146. — P. 65—96.

[15] Vorotnikov D. A. Asymptotic behavior of the non-autonomous 3D Navier—Stokes problem with coercive force // J. Differ. Equ. — 2011. — Vol. 251. — P. 2209—2225.

[16] Vorotnikov D. A., Zvyagin V. G. Trajectory and global attractors of the boundary-value problem for autonomous motion equations of viscoelastic medium // J. Math. Fluid Mech. — 2008. — Vol. 10, no. 1. — P. 19—44.

[17] Zvyagin A. V. Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. — 2013. — Vol. 90. — P. 70—85.

[18] Zvyagin V. G., Kondratyev S. K. Approximating topological approach to the existence of attractors in fluid mechanics // J. Fixed Point Theory Appl. — 2013. — Vol. 13, no. 2. — P. 359—395.

[19] Zvyagin V., Kondratyev S. Pullback attractors of the Jeffreys—Oldroyd equations // J. Differ. Equ. — 2016. — Vol. 260, no. 6. — P. 5026—5042.

[20] Zvyagin V. G., Turbin M. V. The study of initial boundary-value problems for mathematical models of the motion of Kelvin—Voigt fluids // J. Math. Sci. — 2010. — Vol. 168, no. 2. — P. 157—308.

[21] Zvyagin V. G., Vorotnikov D. A. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics. — Berlin: Walter de Gruyter, 2008.