Аналитические деформации минимальных сетей

А. О. ИВАНОВ
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

А. А. ТУЖИЛИН
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: tuz@mech.math.msu.su

УДК 514.76+517.972+519.176

Ключевые слова: локально минимальные сети, кратчайшие сети, гладкие деформации, аналитические деформации, минимальные заполнения конечных метрических пространств.

Аннотация

В работе изучается поведение экстремальных сетей при деформациях граничных множеств. Для минимальных остовных деревьев, минимальных заполнений конечных метрических пространств и для так называемых устойчивых кратчайших деревьев в евклидовом пространстве показано, что при аналитических деформациях граничного множества структура такой экстремальной сети не меняется.

Abstract

A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, Analytic deformations of minimal networks, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 5, pp. 159—180.

The behavior of extreme networks under deformations of their boundary sets is investigated. It is shown that analyticity of a deformation of the boundary set guarantees preservation of the network type for minimal spanning trees, minimal fillings, and so-called stable shortest trees in the Euclidean space.

Введение

Интерес к изучению поведения кратчайших сетей при деформациях граничного множества восходит к работам, посвящённым изучению отношения Штейнера евклидовой плоскости. В 90-е годы представителям австралийской школы удалось получить ряд нетривиальных оценок отношения Штейнера для небольшого количества граничных точек, используя так называемый вариационный подход, т. е. контролируя поведение функций длины минимального остовного и кратчайшего деревьев при малых деформациях (или, как иногда говорят, при вариации) граничного множества (см. [12—14]).

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 5, с. 159—180.

Исследования функции длины экстремальной сети были продолжены авторами настоящей статьи. В [4] для кратчайших деревьев и минимальных остовных деревьев в евклидовом пространстве было доказано существование производной функции длины по отношению к гладким однопараметрическим деформациям граничных множеств и были выписаны формулы для вычисления этих производных. А именно, оказалось, что искомая производная равна производной функции длины одного из тех минимальных параметрических деревьев (т. е. деревьев с фиксированной комбинаторной структурой), которое является кратчайшим (соответственно минимальным остовным) для исходной границы.

Однако неверно, что при достаточно малой гладкой деформации границы структура кратчайшего и минимального остовного дерева может быть выбрана неизменной. Соответствующий пример несложно построить уже для трёхточечного граничного множества на плоскости (рис. 1). Одна неподвижная вершина треугольника, которую мы обозначим через O, расположена в начале координат, вершина A — на луче, составляющем с направлением оси абсцисс угол в $2\pi/3$, а третья вершина B в начальный момент времени находится на оси абсцисс и движется от начала координат по осциллирующей кривой, совершающей в любой окрестности начальной точки бесконечно много осцилляций вокруг оси абсцисс. Когда эта точка B находится в верхней полуплоскости, кратчайшая сеть для множества AOB имеет дополнительную вершину, в которой сходятся три ребра, а когда B в нижней полуплоскости — кратчайшая сеть для AOB состоит из двух отрезков $[A, O]$ и $[O, B]$.

Этот пример легко модифицировать так, чтобы менялась структура невырожденного кратчайшего дерева. Рассмотрим плоский выпуклый четырёхугольник, и пусть O — точка пересечения его диагоналей. Предположим, что вершины этого четырёхугольника соединяются двумя локально минимальными бинарными деревьями (здесь бинарность означает, что граничные вершины имеют степень 1, а внутренние — степень 3). Поставим в соответствие каждому из этих деревьев величину угла с вершиной в O, под которым видны листья смежных граничных рёбер. Тогда, как показано в [11], из этих двух деревьев более

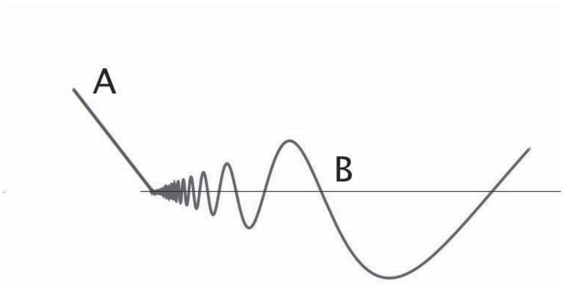

Рис. 1. Гладкая деформация границы, при которой структура кратчайшего дерева меняется бесконечное число раз

коротким и, как следствие, кратчайшим (т. е. минимальным деревом Штейнера) является то, для которого соответствующий угол меньше (если углы равны, то оба дерева являются кратчайшими).

Возьмём в качестве четырёхугольника квадрат. Тогда его вершины соединяются двумя кратчайшими бинарными деревьями (рис. 2). Будем смещать одну из вершин этого квадрата по аналогии с тем, как мы это делали в предыдущем примере: на этот раз кривая, по которой двигается вершина, осциллирует вдоль прямой, проходящей через диагональ квадрата. Тогда при переходе через прямую кратчайшее дерево, соединяющее полученное четырёхточечное множество, состоящее из трёх неподвижных вершин квадрата и одной смещённой, будет менять свой тип (комбинаторная структура дерева остаётся той же, но меняется способ прикрепления дерева к граничному множеству).

Отметим, что оба наших примера основаны на одном и том же эффекте, а именно, на бесконечном числе осцилляций траектории на конечном интервале значений параметра. Построенные нами деформации являются гладкими, но не являются аналитическими.

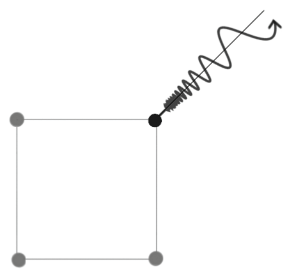

Рис. 2. Гладкая деформация границы, при которой структура кратчайшего дерева меняется бесконечное число раз, оставаясь невырожденной

Основной результат данной работы описывает класс деформаций, при которых такие эффекты невозможны. Основная теорема (теорема 1) даёт ответ для достаточно общего случая (см. ниже общую постановку задачи для семейств так называемых метрических функционалов). В качестве следствий рассмотрены классические случаи кратчайшего и минимального остовного деревьев в евклидовом пространстве. Показано (см. следствие 4.3), что если при однопараметрической деформации W_t, $t \in [0,1]$, граничного множества W_0 каждая его точка движется по аналитической кривой, то для достаточно малых положительных значений параметра t семейства $\mathcal{N}_t$ комбинаторных типов минимальных остовных деревьев с границей W_t одинаковы и содержатся в $\mathcal{N}_0$. Для доказательства аналогичного результата для кратчайших деревьев нам потребовалось дополнительное предположение о так называемой устойчивости (см. ниже) всех кратчайших деревьев с исходной границей W_0 (см. следствие 4.15). Кроме того, в отдельном разделе для удобства выписаны известные формулы первой и второй вариации длины отрезка в евклидовом пространстве (см. утверждения 6.1 и 6.2).

1. Основные обозначения и общая конструкция

Пусть V — некоторое конечное множество, элементы которого будем называть *вершинами*, и X — произвольное множество, называемое *объемлющим пространством*. Через $\mathcal{M}(V,X)$ обозначим множество всех отображений из V в X. Пусть фиксирована какая-нибудь нумерация вершин, $V=\{v_1,\dots,v_n\}$. Тогда каждое отображение $f\in\mathcal{M}(V,X)$ однозначно задаётся «вектором» своих значений $\bigl(f(v_1),\dots,f(v_n)\bigr)$, что определяет естественный изоморфизм между множеством $\mathcal{M}(V,X)$ и декартовой степенью X^n.

Пусть $\mathcal{D}(X)$ — множество всех полуметрик на X. Тогда для каждого $f\in\mathcal{M}(V,X)$ и каждого $\rho\in\mathcal{D}(X)$ определена полуметрика $f^*(\rho)\in\mathcal{D}(V)$ по формуле $f^*(\rho)(v_i,v_j)=\rho\bigl(f(v_i),f(v_j)\bigr)$. Так как каждая полуметрика из $\mathcal{D}(V)$ однозначно определяется множеством своих $m=n(n-1)/2$ значений на всех парах различных вершин из V, то пространство $\mathcal{D}(V)$ можно отождествить с подмножеством $\mathcal{D}^m$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, составленным из всех векторов с неотрицательными координатами, некоторые тройки которых удовлетворяют неравенствам треугольника. Более подробно, $\mathcal{D}^m\subset\mathbb{R}^m$ представляет собой множество точек вида

$$(r_{12},\dots,r_{1n},r_{23},\dots,r_{2n},\dots,r_{n-1\,n}),$$

для которых выполняется $r_{ij}\geqslant 0$ и $|r_{ij}-r_{jk}|\leqslant r_{ik}\leqslant r_{ij}+r_{jk}$ для всех $1\leqslant i<j<k\leqslant n$. Таким образом, вектор $f^*(\rho)$ имеет описанный выше вид, причём $r_{ij}=f^*(\rho)(v_i,v_j)$.

Каждую функцию $L\colon D\to\mathbb{R}$, где $D\subset\mathcal{D}^m$, будем называть *метрическим функционалом*. Функционал L *непрерывный*, если L — непрерывная функция. Функционал L *гладкий* (*аналитический*), если он является ограничением гладкой (соответственно аналитической) функции, определённой на некотором открытом в $\mathbb{R}^m$ множестве $\Omega\supset D$. Аналогично определяется *непрерывная*, *гладкая* и *аналитическая кривая в* $D\subset\mathcal{D}^m$.

Кривой во множестве W*, проходящей через точку* $w\in W$ *в момент* $t_0\in[a,b]$, будем называть каждое отображение $\gamma\colon[a,b]\to W$, для которого $\gamma(t_0)=w$. Если $t_0=a$, то говорят также, что кривая γ *выходит из* w, а если $t_0=b$, то γ *приходит в* w. *Деформацией* f_t отображения $f\in\mathcal{M}(V,X)$ называется каждая кривая в $\mathcal{M}(V,X)$, проходящая через f. Для каждой метрики $\rho\in\mathcal{D}(X)$ деформация f_t порождает *деформацию* $f_t^*(\rho)$ *метрики* $f^*(\rho)$, являющуюся кривой в $\mathcal{D}^m$, проходящей через точку $f^*(\rho)\in\mathcal{D}^m$.

Пусть $\mathcal{L}=\{L^1,\dots,L^p\}$ — непустое семейство метрических функционалов и $D\subset\mathcal{D}^m$ — пересечение областей определения этих функционалов. Тогда на D

определены
$$\mathcal{L}_{\min} = \min_i L^i \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_{\max} = \max_i L^i.$$
Для каждого $r \in D$ через $I_{\min}(\mathcal{L}, r)$ обозначим множество тех индексов i, для которых $\mathcal{L}_{\min}(r) = L^i(r)$; аналогично через $I_{\max}(\mathcal{L}, r)$ обозначим множество тех индексов i, для которых $\mathcal{L}_{\max}(r) = L^i(r)$.

2. Аналитические функции и общая теорема

Следующий результат из теории аналитических функций нам будет особенно полезен.

Предложение 2.1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — функции на вещественной прямой $\mathbb{R}$, аналитические в точке x_0, причём $f(x_0) = g(x_0)$. Тогда существует такая окрестность U точки x_0, в которой или f и g совпадают, или же при всех $x \in U \setminus \{x_0\}$ выполняется $f(x) \neq g(x)$.*

Приводимая ниже общая теорема непосредственно вытекает из определений и предложения 2.1.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{L} = \{L^1, \ldots, L^p\}$ — семейство метрических функционалов с непустым пересечением $D \subset \mathcal{D}^m$ областей определения. Рассмотрим произвольное отображение $f \in \mathcal{M}(V, X)$ и его деформацию f_t, $t \in [a, b]$, где $f = f_{t_0}$, $t_0 \in [a, b]$. Пусть $\rho \in \mathcal{D}(X)$ — произвольная полуметрика. Рассмотрим соответствующую полуметрику $f^*(\rho) \in \mathcal{D}^m$ и соответствующую кривую $\gamma(t) = f_t^*(\rho)$ в $\mathcal{D}^m$, задающую деформацию этой полуметрики. Пусть кривая γ лежит в D, так что при всех $t \in [a, b]$ определено множество $I_{\min}(t) = I_{\min}\big(\mathcal{L}, \gamma(t)\big)$. Кроме того, пусть кривая γ аналитична в t_0, а все функционалы L^i аналитичны в $\gamma(t_0)$. Тогда*

1) *для некоторой окрестности $U \subset [a, b]$ точки t_0 при всех $t \in U \cap \{t > t_0\}$ (при всех $t \in U \cap \{t < t_0\}$) множества $I_{\min}(t)$ одинаковы и содержатся в $I_{\min}(t_0)$;*
2) *если дополнительно известно, что $I_{\min}(t) = I_{\min}(t_0)$ для некоторого $t \in U \setminus \{t_0\}$, то множества $I_{\min}(t)$ одинаковы при всех $t \in U$.*

Замечание 2.2. Аналогичный результат имеет место и для $I_{\max}(t) = I_{\max}\big(\mathcal{L}, \gamma(t)\big)$.

Нам также будет полезна следующая аналитическая версия теоремы о неявной функции (см. [7]).

Предложение 2.3. *Пусть $f_j(z, w)$, $j = 1, \ldots, m$, — семейство функций от вещественных переменных $(z, w) = (z^1, \ldots, z^m, w^1, \ldots, w^n)$, аналитических в некоторой окрестности точки (z_0, w_0), и пусть $f_j(z_0, w_0) = 0$, $j = 1, \ldots, m$,*
$$\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial z^k}\right)_{j,\,k=1}^{m} \neq 0 \quad \textit{в точке} \quad (z_0, w_0).$$

Тогда система уравнений $f_j(z,w) = 0$, $j = 1,\dots,m$, имеет в некоторой окрестности точки w_0 однозначно определённые аналитические решения $z^k(w)$, $k = 1,\dots,m$, такие что $z(w_0) = z_0$.

3. Общая теорема для случая сетей

Для каждого множества W через $\mathcal{P}(W)$ обозначим множество всех подмножеств множества W, а через $W^{(k)} \subset \mathcal{P}(W)$ — множество всех k-элементных подмножеств.

Рёберным множеством E на множестве V будем называть каждое подмножество в $V^{(2)}$. Элементы $e = \{v,w\} \in E$ будем называть *рёбрами* и обозначать для краткости vw или wv. Каждое рёберное множество E задаёт соответствующий метрический функционал L_E на $\mathcal{D}^m$: если $E = \varnothing$, то положим $L_E = 0$, иначе

$$L_E(r_{12},\dots,r_{n-1\,n}) = \sum_{v_iv_j\in E} r_{ij},$$

где $r_{12},\dots,r_{n-1\,n}$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^m$. Ясно, что функционал L_E аналитический.

Пара $G = (V,E)$, где $E \subset V^{(2)}$, называется (простым) *графом*. Отображение $\Gamma\colon V \to X$ называется *обобщённой сетью в X типа G*, а деформация Γ_t отображения Γ — *деформацией обобщённой сети* Γ. Число $L_E\big(\Gamma^*(\rho)\big)$ называется *длиной обобщённой сети* Γ *в полуметрике* ρ и обозначается через $\mathrm{Len}_\rho(\Gamma)$.

Пусть $\mathcal{E} = \{E^1,\dots,E^p\}$ — непустое семейство рёберных множеств на V и $\mathcal{G} = \big\{(V,E^1),\dots,(V,E^p)\big\}$ — соответствующее семейство графов $G^i = (V,E^i)$. Положим $L^i = L_{E^i}$ и образуем семейство функционалов $\mathcal{L} = \{L^1,\dots,L^p\}$ на $\mathcal{D}^m$. Тогда $\mathcal{L}_{\min}$ называется *длиной минимальной обобщённой сети типа* $\mathcal{G}$.

Пусть (X,ρ) — полуметрическое пространство. Тогда для каждого $f \in \mathcal{M}(V,X)$ определено семейство обобщённых сетей $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{G}) = \{\Gamma^i\}$, где Γ^i — сеть типа G^i, совпадающая с f как отображение из V в X. Для каждой обобщённой сети Γ^i из этого семейства определена её длина $\mathrm{Len}_\rho(\Gamma^i)$. Каждая обобщённая сеть Γ^i, для которой $\mathrm{Len}_\rho(\Gamma^i) = \mathcal{L}_{\min}\big(f^*(\rho)\big)$, называется *минимальной обобщённой сетью в семействе* $\mathcal{N}$.

Следствие 3.1. *Пусть (X,ρ) — произвольное полуметрическое пространство и $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \{\Gamma^i\}$ — семейство обобщённых сетей, порождённое семейством графов $\mathcal{G}$ и отображением $f \in \mathcal{M}(V,X)$. Рассмотрим деформацию f_t, $t \in [a,b]$, этих сетей. Предположим, что соответствующая кривая $\gamma(t) = f_t^*(\rho)$ в $\mathcal{D}^m$ является аналитической в точке t_0. Тогда*

1) *для некоторой окрестности $U \subset [a,b]$ точки $t_0 \in [a,b]$ при всех $t \in U \cap \{t > t_0\}$ (при всех $t \in U \cap \{t < t_0\}$) типы минимальных обобщённых сетей семейства $\mathcal{N}$ одинаковы и содержатся среди типов таких сетей для $t = t_0$;*

2) *если дополнительно известно, что для некоторого $t \in U \setminus \{t_0\}$ и t_0 множества типов обобщённых минимальных сетей семейства $\mathcal{N}$ одинаковы, то эти множества одинаковы при всех $t \in U$.*

Например, если $\mathcal{G}$ — семейство всех остовных деревьев на множестве V, то $\mathcal{L}_{\min}$ называется *длиной минимального остовного дерева*, а каждая минимальная обобщённая сеть в этом семействе называется *минимальным остовным деревом*.

Следствие 3.2. *Пусть (X, ρ) — произвольное полуметрическое пространство и f_t, $t \in [a, b]$, — деформация некоторого отображения $f \in \mathcal{M}(V, X)$. Предположим, что соответствующая кривая $\gamma(t) = f_t^*(\rho)$ в $\mathcal{D}^m$ является аналитической в точке t_0. Тогда*

1) *для некоторой окрестности $U \subset [a, b]$ точки $t_0 \in [a, b]$ при всех $t \in U \cap \{t > t_0\}$ (при всех $t \in U \cap \{t < t_0\}$) типы минимальных остовных деревьев одинаковы и содержатся среди типов минимальных остовных деревьев для $t = t_0$;*
2) *если дополнительно известно, что для некоторого $t \in U \setminus \{t_0\}$ и t_0 типы минимальных остовных деревьев совпадают, то эти типы одинаковы при всех $t \in U$.*

4. Сети в евклидовом пространстве

В данном разделе в качестве объемлющего пространства мы рассмотрим пространство $\mathbb{R}^k$, на котором фиксировано евклидово расстояние ρ_2. Пусть $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — конечное множество и $f\colon V \to \mathbb{R}^k$ — некоторое вложение. Положим $W = f(V) \subset \mathbb{R}^k$. Если $f(v_i) = w_i = (w_i^1, \ldots, w_i^k)$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$f^*(\rho_2)(v_i, v_j) = \rho_2\big(f(v_i), f(v_j)\big) = \rho_2(w_i, w_j) = \sqrt{\sum_\alpha (w_i^\alpha - w_j^\alpha)^2}.$$

Каждая деформация f_t, $t \in [a, b]$, вложения f задаёт однопараметрическое семейство множеств $W_t = f_t(V) \subset \mathbb{R}^k$, которое, в свою очередь, задаётся набором кривых $w_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Кривая $\gamma(t) = f_t^*(\rho_2)$ в $\mathcal{D}(V)$ имеет в координатах следующий вид:

$$r_{ij}(t) = f_t^*(\rho_2)(v_i, v_j) = \rho_2\big(w_i(t), w_j(t)\big) = \sqrt{\sum_\alpha \big(w_i^\alpha(t) - w_j^\alpha(t)\big)^2}.$$

Утверждение 4.1. *В выбранных обозначениях если все кривые $w_i(t)$ аналитичны в t_0 и точки $w_i(t_0)$, $i = 1, \ldots, n$, попарно различны, то кривая $\gamma(t)$ аналитична в точке $t_0 \in [a, b]$.*

4.1. Минимальные сети без дополнительных вершин

Два следствия, приведённые ниже, непосредственно вытекают из следствий 3.1, 4.3 и утверждения 4.1.

Следствие 4.2. *Пусть $\mathcal{N} = \{\Gamma^i\}_{i=1}^p$ — семейство обобщённых сетей, порождённое семейством графов $\big\{G^i = (V, E^i)\big\}$ и фиксированным вложением $f\colon V \to \mathbb{R}^k$. Положим $W = f(V) = \{w_1, \ldots, w_n\}$, и пусть W_t, $t \in [a, b]$, — однопараметрическая деформация множества W, заданная набором кривых $w_i(t)$, $t \in [a, b]$. Предположим, что все кривые $w_i(t)$ аналитичны в точке $t_0 \in [a, b]$ и что точки $w_i(t_0)$, $i = 1, \ldots, n$, попарно различны. Тогда*

1) *для некоторой окрестности $U \subset [a, b]$ точки t_0 при всех $t \in U \cap \{t > t_0\}$ (при всех $t \in U \cap \{t < t_0\}$) типы минимальных обобщённых сетей семейства $\mathcal{N}$, затягивающих множества W_t, одинаковы и содержатся среди типов таких сетей для множества W_{t_0};*
2) *если дополнительно известно, что для некоторого $t \in U \setminus \{t_0\}$ и t_0 множества типов обобщённых минимальных сетей семейства $\mathcal{N}$, затягивающих W_t и W_{t_0}, совпадают, то эти множества одинаковы при всех $t \in U$.*

Следствие 4.3. *Пусть W_t, $t \in [a, b]$, — однопараметрическая деформация конечного подмножества $W = \{w_1, \ldots, w_n\} \subset \mathbb{R}^k$, заданная набором кривых $w_i(t)$, $t \in [a, b]$. Предположим, что все кривые $w_i(t)$ аналитичны в точке $t_0 \in [a, b]$ и что точки $w_i(t_0)$, $i = 1, \ldots, n$, попарно различны. Тогда*

1) *для некоторой окрестности $U \subset [a, b]$ точки t_0 при всех $t \in U \cap \{t > t_0\}$ (при всех $t \in U \cap \{t < t_0\}$) типы минимальных остовных деревьев, затягивающих множества W_t, одинаковы и содержатся среди типов минимальных остовных деревьев для W_{t_0};*
2) *если дополнительно известно, что для некоторого $t \in U \setminus \{t_0\}$ и t_0 типы минимальных остовных деревьев, затягивающих W_t и W_{t_0}, совпадают, то эти типы одинаковы при всех $t \in U$.*

Замечание 4.4. Описанная конструкция, утверждение 4.1 и следствия 4.2 и 4.3 дословно обобщаются на случай пространства $\mathbb{R}^k$ с метрикой ρ_p, $1 < p < \infty$, где

$$\rho_p(w_i, w_j) = \sqrt[p]{\sum_\alpha (w_i^\alpha - w_j^\alpha)^p}, \quad w_i = (w_i^1, \ldots, w_i^k) \in \mathbb{R}^k.$$

Более общо, те же результаты справедливы для нормированного пространства с нормой, аналитической вне нуля.

4.2. Необходимые сведения из теории графов и сетей

Как и выше, пара $G = (V, E)$, где $E \subset V^{(2)}$, называется (простым) *графом*. Так как нас интересуют граничные задачи, мы всегда предполагаем, что у каждого из рассматриваемых графов $G = (V, E)$ выделено некоторое множество вершин, называемых *граничными*; множество всех таких вершин образует *границу графа* G, которая обозначается через ∂G. Из-за специфики рассматриваемых граничных задач мы всегда считаем, что ∂G содержит все вершины степени 1 и 2 графа G. Оставшиеся неграничные вершины графа G мы называем *внутренними*.

Пусть $G = (V, E)$ — дерево с границей ∂G и $v \in \partial G$ — граничная вершина степени $d \geqslant 2$. Представим дерево G в виде объединения поддеревьев так, чтобы степень граничной вершины v в этих поддеревьях равнялась бы 1. Для этого рассмотрим все рёбра $e_i = u_i v$, $i = 1, \dots, d$, графа G, инцидентные v, и выбросим из графа G все рёбра e_i за исключением некоторого e_j. Единственную связную компоненту полученного графа, содержащую ребро e_j, обозначим через G_j. Очевидно, G_j является поддеревом в G, причём степень вершины v в нём равна единице. Положим $\partial G_j = V_j \cap \partial G$, где $G_j = (V_j, E_j)$. Ясно, что дерево G является объединением своих поддеревьев G_j, $j = 1, \dots, d$. Говорят, что поддеревья G_j получены *разрезанием G по граничной вершине v*. Если последовательно разрезать дерево G по всем его граничным вершинам степени больше единицы, то границы полученных поддеревьев будут состоять в точности из всех их вершин степени 1. Эти поддеревья называются *регулярными компонентами* дерева G.

Дерево (с границей) будем называть *бинарным*, если степени его вершин равны 1 или 3, а граница состоит в точности из всех вершин степени 1. Пару соседних рёбер бинарного дерева, каждое из которых инцидентно граничной вершине, назовём *усами*. Каждое бинарное дерево с тремя и более граничными вершинами имеет усы.

Пусть B — произвольное конечное множество. Множество всех бинарных деревьев с границей B, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, сохраняющего B, обозначим через $\mathcal{BT}(B)$.

Пусть $G = (V, E)$ — некоторое дерево с границей ∂G и E_d — произвольное семейство рёбер дерева G. Обозначим через $G_1, \dots, G_k$ связные компоненты леса (V, E_d), через V_i — множество вершин дерева G_i и положим $W = \{V_i\}$. Тогда W — разбиение множества V, которое будем называть *порождённым семейством E_d*. Обозначим через $\pi\colon V \to W$ каноническую проекцию, т. е. $\pi(v) = V_i$, если и только если $v \in V_i$. Для каждого ребра $e \in E \setminus E_d$ его вершины принадлежат разным множествам V_i, поэтому $\pi(e) \in W^{(2)}$. Так как разные V_i и V_j соединяются не более чем одним ребром дерева G, отображение $\pi\colon E \setminus E_d \to W^{(2)}$ инъективно. Положим $F = \pi(E \setminus E_d)$. Легко заметить, что $H = (W, F)$ является деревом. Так как каждое V_i, соединённое с остальными V_j не более чем двумя рёбрами, содержит вершину из ∂G, все вершины степени 1 и 2 дерева H лежат в $\pi(\partial G)$. Тем самым множество $\pi(\partial G)$ можно взять в качестве *границы ∂H дерева H*. Полученное в результате дерево H с границей ∂H назовём *фактором* или результатом *факторизации* дерева G по семейству рёбер E_d и будем обозначать через G/E_d.

Замечание 4.5. Определённая только что операция факторизации отличается от стандартной факторизации по подмножеству, при которой все подмножество превращается в один элемент: множества вершин разных связных компонент G_i после факторизации становятся *разными* вершинами фактора.

Если E_d состоит из одного ребра e, то говорят, что H получается из G *вырождением* или *стягиванием ребра* e и что G получается из H *расщеплением вершины* w, где $w \ni \pi(e)$. Факторизацию дерева G можно представить в виде последовательности вырождений рёбер; обратно, каждое дерево G может быть восстановлено из своего фактора последовательным расщеплением вершин.

Расщепление вершины, вообще говоря, определено неоднозначно. А именно, можно по-разному распределять рёбра, инцидентные исходной вершине, между двумя новыми вершинами, а при расщеплении граничной вершины можно по-разному распределять полученные вершины между граничными и внутренними. В последнем случае всегда предполагается, что хотя бы одна из вершин, полученных в результате расщепления, относится к граничным и что все новые вершины степени 1 и 2 граничные.

Каждое дерево является фактором некоторого бинарного дерева, которое, вообще говоря, определено не однозначно.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольное дерево, X — некоторое множество и $f\colon V \to X$ — произвольное отображение. Превратим график Γ_f отображения f в граф, выбрав Γ_f в качестве множества вершин и соединив $\big(u, f(u)\big)$ и $\big(v, f(v)\big)$ ребром, если и только если $uv \in E$. В результате получается изоморфное G дерево с соответствующей границей, которое называется *сетью на X типа $G = (V, E)$*.

Соглашение 4.6. Для удобства работы с сетями мы будем поступать следующим образом:

- отождествим отображение f и его график Γ_f, обозначая то и другой одной и той же буквой, скажем Γ;
- вершину $\big(v, \Gamma(v)\big)$ сети будем обозначать через x_v и отождествлять с $\Gamma(v)$ (сравните с обозначением x_n для элементов последовательности вещественных чисел, которая по определению представляет собой отображение из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$); таким образом, даже если $\Gamma(u) = \Gamma(v)$, но $u \neq v$, то соответствующие вершины x_u и x_v сети Γ считаются различными;
- с другой стороны, чтобы отличать множество $\{x_v\}_{v\in V}$ вершин сети Γ от соответствующего подмножества X, мы будем последнее обозначать через $\operatorname{im}\Gamma$ (рассматривая Γ как отображение), в частности, $\partial\Gamma = \{x_v\}_{v\in\partial G}$ и $\operatorname{im}\partial\Gamma = \Gamma(\partial G)$;
- будем отождествлять рёбра $e = uv$ дерева G с соответствующими рёбрами $x_u x_v$ сети Γ.

Фактически сеть Γ получается из дерева G «приписыванием» вершинам $v \in V$ их «положений» $\Gamma(v)$ в X.

Ребро $x_u x_v$ сети Γ типа G назовём *вырожденным*, если $\Gamma(u) = \Gamma(v)$. Соответствующее ребро дерева G будем называть Γ-*вырожденным*. Сеть без вырожденных рёбер назовём *невырожденной*.

Пусть S — некоторое подсемейство множества вырожденных рёбер сети Γ и $H = G/S = (W, F)$, $W = \{V_i\}$, — соответствующий фактор. Так как отображение Γ переводит каждое V_i в одну точку, то корректно определено отображение $\Delta\colon W \to X$, такое что $\Delta(V_i) = \Gamma(v)$, где $v \in V_i$. Сеть Δ типа H будем называть *фактором сети* Γ *по множеству рёбер* S и обозначать через Γ/S. Если в качестве S выбрано множество всех вырожденных рёбер сети Γ, то сеть $\Delta = \Gamma/S$ называется *следом сети* Γ и обозначается через $\tau(\Gamma)$. По определению след произвольной сети не имеет вырожденных рёбер. Если $\mathcal{A}$ — некоторое семейство сетей, то через $\tau(\mathcal{A})$ обозначим множество следов сетей из $\mathcal{A}$.

Пусть $\Delta = \tau(\Gamma)$ — след некоторой сети Γ и H — тип сети Δ. Через $\mathcal{B}(\Delta)$ обозначим множество всех бинарных деревьев T, которые могут быть получены из H расщеплением вершин. Отметим, что дерево H может быть получено из каждого такого бинарного дерева T факторизацией по подходящему множеству рёбер S_T. Для каждого $T \in \mathcal{B}(\Delta)$ однозначно определена такая сеть Γ_T типа T, что $\Gamma_T/S_T = \Delta$. Множество вырожденных рёбер сети Γ_T совпадает с S_T, поэтому $\Delta = \tau(\Gamma_T)$. Множество $\mathcal{B}(\Delta)$ назовём *бинарным типом следа* Δ.

Говорят, что сеть Γ на X *соединяет* конечное подмножество M множества X, если $\operatorname{im}\partial\Gamma = M$. Через $\mathcal{N}(X, M)$ обозначим множество всех сетей, соединяющих M.

Каждое отображение $\varphi\colon \partial G \to X$ называется *граничным*. Пусть фиксировано некоторое граничное отображение φ. Говорят, что *сеть* Γ *соединяет множество* $M \subset X$ *по отображению* φ, если $\Gamma(v) = \varphi(v)$ для всех $v \in \partial G$ и $\operatorname{im}\partial\Gamma = M$. Множество сетей, параметризованных деревом G и соединяющих некоторое множество M по заданному отображению φ, обозначим через $[G, \varphi]$.

Пусть теперь (X, ρ) — метрическое пространство и Γ — некоторая сеть. Как и в случае обобщённой сети, *длиной ребра* $x_u x_v$ *сети* Γ называется число $\rho(x_u, x_v)$ — расстояние между вершинами x_u и x_v. Сумма длин всех рёбер сети Γ называется *длиной* этой сети и обозначается через $\operatorname{Len}_\rho(\Gamma)$. Заметим, что если Δ — фактор сети Γ, то $\operatorname{Len}_\rho(\Gamma) = \operatorname{Len}_\rho(\Delta)$.

Пусть M — конечное подмножество X. Положим

$$\operatorname{smt}(M) = \inf\bigl\{\operatorname{Len}_\rho(\Gamma) \mid \Gamma \in \mathcal{N}(X, M)\bigr\}.$$

Число $\operatorname{smt}(M)$ называется *наименьшей длиной сети на* M. Каждая сеть $\Gamma \in \mathcal{N}(X, M)$, для которой $\operatorname{Len}_\rho(\Gamma) = \operatorname{smt}(M)$, называется *кратчайшей сетью*.

Кратчайшая сеть может иметь вырожденные рёбра. След кратчайшей сети не имеет вырожденных рёбер, т. е. является невырожденной сетью, и называется *минимальным деревом Штейнера на* M. Множество всех минимальных деревьев Штейнера на M обозначается через $\operatorname{SMT}(M)$.

Пусть G — фиксированное дерево и $\varphi\colon \partial G \to X$ — некоторое граничное отображение. Положим

$$\mathrm{mpn}_G(\varphi) = \inf\{\mathrm{Len}_\rho(\Gamma) \mid \Gamma \in [G, \varphi]\}.$$

Число $\mathrm{mpn}_G(\varphi)$ называется *наименьшей длиной сети типа G с границей φ*. Каждая сеть $\Gamma \in [G, \varphi]$, для которой $\mathrm{Len}_\rho(\Gamma) = \mathrm{mpn}_G(\varphi)$, называется *минимальной параметрической сетью типа G с границей φ*. Множество всех минимальных параметрических сетей типа G с границей φ обозначим через $\mathrm{MPN}(G, \varphi)$.

Множество кратчайших сетей для данной границы M может быть пусто. Множество минимальных параметрических сетей данного типа с данной границей также может быть пусто.

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения (см., например, [3, 8, 9]).

Утверждение 4.7. *Пусть $M \subset X$ и B — произвольные множества, состоящие из n элементов, и $\varphi\colon B \to M$ — некоторая биекция. Тогда*

$$\begin{aligned} \mathrm{smt}(M) &= \min\{\mathrm{mpn}_G(\varphi) \mid G \in \mathcal{BT}(B)\}, \\ \mathrm{SMT}(M) &= \bigcup_{\{G\in\mathcal{BT}(B) \mid \mathrm{mpn}_G(\varphi) = \mathrm{smt}(M)\}} \tau\bigl(\mathrm{MPN}(G, \varphi)\bigr). \end{aligned}$$

Утверждение 4.8. *Пусть M — конечное подмножество пространства $\mathbb{R}^k$, снабжённого евклидовой метрикой, G — дерево с границей B и $\varphi\colon B \to M$ — любая биекция. Тогда $\mathrm{MPN}(G, \varphi)$ не пусто. Если при этом G — бинарное дерево и сеть $\Gamma \in \mathrm{MPN}(G, \varphi)$ невырожденна, то Γ — единственная минимальная параметрическая сеть типа G с границей φ, причём отрезки, соответствующие смежным рёбрам сети, стыкуются в общей вершине под углом, равным $2\pi/3$.*

Утверждение 4.9. *Пусть M — конечное подмножество пространства $\mathbb{R}^k$, снабжённого евклидовой метрикой, и Γ — след кратчайшего дерева, соединяющего M. Тогда отрезки, соответствующие смежным рёбрам сети Γ, стыкуются в общей вершине под углом, бо́льшим или равным $2\pi/3$. В частности, степени вершин сети Γ не превосходят 3 и во всех вершинах степени 3 углы между смежными рёбрами равны $2\pi/3$.*

Пусть Γ — след минимальной параметрической сети типа G, где G — бинарное дерево, из утверждения 4.8. Регулярные компоненты $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$ дерева Γ представляют собой бинарные деревья, разные Γ_i и Γ_j пересекаются не более чем по одной общей граничной вершине. Каждая сеть Γ_i является невырожденным минимальным параметрическим бинарным деревом, соединяющим M_i. Если в граничной вершине x_v стыкуются две регулярные компоненты, то угол между отрезками, соответствующими инцидентным x_v рёбрам, больше или равен $2\pi/3$, а если три — то углы между отрезками, соответствующими инцидентным x_v рёбрам, в точности равны $2\pi/3$. Если исходное дерево Γ является кратчайшим, то каждая его регулярная компонента Γ_i является кратчайшей сетью, соединяющей соответствующее M_i.

4.3. Невырожденные минимальные параметрические бинарные и невырожденные кратчайшие деревья

В качестве объемлющего пространства снова рассмотрим пространство $\mathbb{R}^k$, на котором фиксировано евклидово расстояние ρ_2. Пусть $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — конечное множество и $\varphi\colon B \to \mathbb{R}^k$ — некоторое вложение. Положим $M = \varphi(B) \subset \subset \mathbb{R}^k$. Фиксируем некоторое бинарное дерево $G \in \mathcal{BT}(B)$. Положим $G = (V, E)$ и $I = V \setminus B$. Как известно (см. утверждение 4.8), минимальное параметрическое дерево $\Gamma \in \mathrm{MPN}(G, \varphi)$ типа G с границей φ существует. Более того, если все рёбра дерева Γ невырожденны, то оно единственно, другими словами, в этом случае расположение неграничных вершин дерева Γ определено однозначно, поэтому отображение φ однозначно продолжается до отображения Γ, определённого на всём множестве V, и возникает отображение Υ, ставящее в соответствие набору граничных вершин $M = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^{nk}$ соответствующий набор $Z = \Gamma(I) = (z_1, \ldots, z_{n-2}) \in \mathbb{R}^{(n-2)k}$ подвижных вершин минимальной параметрической сети Γ (отображение Υ очевидным образом зависит от нумерации вершин дерева G).

Утверждение 4.10. *Предположим, что все рёбра минимального параметрического бинарного дерева Γ_0 с границей M_0 невырожденны. Тогда отображение $Z = \Upsilon(M)$ определено в некоторой окрестности точки M_0 и является аналитическим в точке M_0.*

Доказательство. Так как каждая сеть $\Gamma \in [G, \varphi]$ однозначно определяется образами $\Gamma(s)$ своих подвижных вершин $s \in I$, т. е. вектором $Z = \Gamma(I) = (z_1, \ldots, z_{n-2}) \in \mathbb{R}^{(n-2)k}$, то определена функция $\ell_G(Z, M)$, равная длине сети Γ с набором подвижных вершин Z и граничных вершин M. По предположению все рёбра минимального дерева Γ_0 с границей M_0 невырожденны, поэтому функция $\ell_G(Z, M)$, равная сумме длин соответствующих отрезков, аналитична в точке (Z_0, W_0), где Z_0 соответствует подвижным вершинам сети Γ_0 с границей M_0. Минимальная параметрическая сеть Γ_0 с границей φ является единственным экстремумом функции $h(Z) = \ell_G(Z, M_0)$. Поэтому положения подвижных вершин Z однозначно определяются из условия равенства нулю производных $\partial\ell_G/\partial z_i^j$, $i = 1, \ldots, n-2$, $j = 1, \ldots, k$, где $z_i = (z_i^1, \ldots, z_i^k) \in \mathbb{R}^k$ — координаты подвижных вершин.

Лемма 4.11. *Матрица второго дифференциала*

$$\left(\frac{\partial^2 \ell_G}{\partial z_i^j \partial z_p^q}\right)$$

невырожденна в точке (Z_0, M_0).

Доказательство. Функция $h(Z) = \ell_G(Z, M_0)$ представляет собой сумму длин невырожденных отрезков — рёбер параметрического дерева типа G с границей M_0 и подвижными вершинами Z. Точка Z_0, соответствующая минимальной параметрической сети, является точкой строгого локального минимума функции h, поэтому все первые частные производные $\partial h/\partial z_i^j = \partial \ell_G/\partial z_i^j$ в этой точке равны нулю, а второй дифференциал представляет собой симметричную билинейную форму. Эта форма невырожденна, если и только если невырожденна соответствующая квадратичная форма $\mathcal{Q}$, значение же последней на произвольном векторе ξ может быть вычислено следующим образом:

$$\mathcal{Q}(\xi) = \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} h(Z + t\xi).$$

Вторая производная длины отрезка при линейной деформации вычислена в утверждении 6.1, из которого вытекает, что эта производная неотрицательна. Поэтому $\mathcal{Q}(\xi) = 0$, если и только если в ноль обращается вторая производная длины каждого ребра сети. Покажем, что последнее невозможно.

Рассмотрим произвольные усы бинарного дерева G, и пусть z — их общая внутренняя вершина, в которой стыкуются рёбра zw и zw'. По утверждению 6.1 вторая производная длины отрезка равна нулю, если и только если разность скоростей деформации на его концах параллельна самому отрезку. Рассматриваемые деформации оставляют на месте граничные вершины, поэтому скорости деформации в точках w и w' равны нулю. Но вектор скорости деформации в вершине z не может быть одновременно параллелен отрезкам zw и zw', поскольку по утверждению 4.8 угол между этими отрезками равен $2\pi/3$. Поэтому вторые производные длин отрезков zw и zw' не могут одновременно обратиться в нуль. Таким образом, $\mathcal{Q}(\xi) \neq 0$ для любого ненулевого вектора ξ. Лемма доказана. $\square$

Из леммы 4.11 вытекает, что система уравнений $\partial \ell_G/\partial z_i^j = 0$, $i = 1, \ldots, n-2$, $j = 1, \ldots, k$, находится в условиях предложения 2.3, поэтому она разрешима в некоторой окрестности M_0, а именно существуют однозначно определённые аналитические функции $z_i = z_i(m_1, \ldots, m_n)$, $i = 1, \ldots, n-2$, задающие расположение подвижных вершин минимальной параметрической сети Γ типа G с границей M. Утверждение доказано. $\square$

Следствие 4.12. *Предположим, что все рёбра минимального параметрического бинарного дерева Γ с границей M невырожденны. Тогда аналитическая деформация M_t граничного множества задаёт аналитическую деформацию $\Gamma_t(V)$ всего множества вершин минимальной параметрической сети Γ_t типа $G = (V, E)$ с границей M_t.*

Следствие 4.13. *Предположим, что все кратчайшие деревья, соединяющие граничное множество $M = \{m_1, \ldots, m_n\} \subset \mathbb{R}^k$, невырожденны. Пусть задана такая однопараметрическая деформация M_t граничного множества, что каждая кривая $m_i(t)$ аналитична в точке $t = t_0$, $M_{t_0} = M$. Тогда*

1) *для некоторой окрестности $U \subset [a, b]$ точки t_0 при всех $t \in U \cap \{t > t_0\}$ (при всех $t \in U \cap \{t < t_0\}$) типы кратчайших деревьев, соединяющих множества M_t, одинаковы и содержатся среди типов кратчайших деревьев для M_{t_0};*

2) *если дополнительно известно, что для некоторого $t \in U \setminus \{t_0\}$ и t_0 типы кратчайших деревьев, соединяющих M_t и M_{t_0}, совпадают, то эти типы одинаковы при всех $t \in U$.*

4.4. Устойчивые минимальные параметрические бинарные и кратчайшие деревья

Сохраним обозначения из предыдущего раздела и рассмотрим произвольное минимальное параметрическое бинарное дерево Γ типа G, соединяющее конечное множество $M \subset \mathbb{R}^k$. Рассмотрим след Δ сети Γ. Его регулярные компоненты удовлетворяют условиям утверждения 4.10, поэтому внутренние вершины каждой компоненты аналитически зависят от её граничных вершин. Если при этом регулярные компоненты стыкуются только в граничных вершинах степени 2, то $\mathcal{B}(\Delta) = \{G\}$, поэтому имеет место следующий результат.

Следствие 4.14. *Предположим, что регулярные компоненты кратчайшего дерева Γ с границей $M_{t_0} = M$ стыкуются только в граничных вершинах степени 2, причём углы между соответствующими отрезками всюду строго больше чем $2\pi/3$. Тогда для любой достаточно малой аналитической деформации M_t граничного множества разложение минимальной параметрической сети Γ_t типа $G = (V, E)$ с границей M_t на регулярные компоненты одинаково при всех t и $\Gamma_t(V)$ представляет собой аналитическую деформацию множества всех вершин минимальной сети Γ_t.*

Кратчайшее дерево Γ назовём *устойчивым*, если его регулярные компоненты стыкуются только в граничных вершинах степени 2, причём углы между соответствующими отрезками всюду строго больше чем $2\pi/3$. Из следствия 4.14 и теоремы 1 получаем следующий результат.

Следствие 4.15. *Пусть задана однопараметрическая деформация M_t граничного множества $M = \{m_1, \dots, m_n\} \subset \mathbb{R}^k$, такая что каждая кривая $m_i(t)$ аналитична в точке $t = t_0$, $M_{t_0} = M$, и пусть все кратчайшие деревья, соединяющие множество M, устойчивы. Тогда*

1) *для некоторой окрестности $U \subset [a, b]$ точки t_0 при всех $t \in U \cap \{t > t_0\}$ (при всех $t \in U \cap \{t < t_0\}$) бинарные типы следов кратчайших деревьев, соединяющих множества M_t, одинаковы и содержатся среди бинарных типов следов кратчайших деревьев для M_{t_0};*
2) *если дополнительно известно, что для некоторого $t \in U \setminus \{t_0\}$ и t_0 бинарные типы следов кратчайших деревьев, соединяющих M_t и M_{t_0}, совпадают, то они одинаковы при всех $t \in U$.*

Длина кратчайшего дерева, соединяющего M_t, меняется аналитически при $t \in U \cap \{t \geqslant t_0\}$ и при $t \in U \cap \{t \leqslant t_0\}$.

5. Минимальные заполнения конечных метрических пространств

Задача о минимальных заполнениях конечного метрического пространства возникла в [5] в результате синтеза двух классических задач: проблемы Штейнера о кратчайших сетях и проблемы Громова о минимальных заполнениях риманова многообразия (см. [6]). Мы не будем обсуждать здесь историю вопроса (см. [5]), напомним лишь необходимые определения и результаты.

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф и $\omega\colon E \to \mathbb{R}$ — произвольная функция на множестве его рёбер, обычно называемая *весовой*. В этом случае пара (Γ, ω) называется *взвешенным графом*. Значение весовой функции на ребре называется *весом* этого ребра. Для каждого подграфа H в G определён его *вес* $\omega(H)$ как сумма весов всех его рёбер. Аналогично определяется вес $\omega(\gamma)$ каждого маршрута γ. Если граф G связен, а функция ω неотрицательна, то на множестве V всех вершин графа G возникает полуметрика d_ω, где величина $d_\omega(x, y)$ равна наименьшему возможному весу маршрута в G, соединяющего вершины x и y.

Пусть (X, ρ) — полуметрическое пространство и $G = (V, E)$ — связный граф с границей X и неотрицательной весовой функцией ω. Взвешенный граф (G, ω) называется *заполнением пространства* (X, ρ), если для любых точек x и y из X выполнено неравенство $\rho(x, y) \leqslant d_\omega(x, y)$. Величина

$$\mathrm{mpf}(X, \rho, G) = \inf\{\omega(G) \mid \omega\colon (G, \omega) \text{ — заполнение пространства } (X, \rho)\}$$

называется *весом минимального параметрического заполнения типа* G пространства X, а каждый взвешенный граф (G, ω), на котором этом инфимум достигается, — *минимальным параметрическим заполнением типа* G пространства X. Величина

$$\mathrm{mf}(X, \rho) = \inf\{\mathrm{mpf}(X, \rho, G) \mid G \text{ — связный граф с границей } X\}$$

называется *весом минимального заполнения пространства* X, а каждый взвешенный граф (G, ω), на котором этом инфимум достигается, — *минимальным заполнением* пространства X.

В [5] показано, что для каждого полуметрического пространства (X, ρ) и каждого связного графа с границей X существует минимальное параметрическое заполнение типа G и для каждого полуметрического пространства (X, ρ) существует минимальное заполнение. Более того, среди минимальных заполнений всегда найдётся минимальное заполнение, тип которого — некоторое бинарное дерево с границей X, а если дополнительно предположить, что пространство (X, ρ) метрическое, то также найдётся минимальное заполнение, тип которого — некоторое дерево, а весовая функция положительна.

Так как количество бинарных деревьев с границей, состоящей из фиксированного числа точек, конечно, задача поиска минимального заполнения конечного метрического пространства сводится к конечному (хоть и экспоненциальному) перебору минимальных параметрических заполнений, каждое из которых (т. е. на самом деле соответствующая весовая функция) может быть найдено методами линейного программирования. Однако оказалось, что для веса минимального параметрического заполнения пространства (X, ρ) существует и комбинаторная формула, представляющая его в виде функции от расстояний между точками из X.

Гипотеза о возможном виде такой формулы была высказана в [5]. Впоследствии выяснилось, что для получения правильного выражения нужно обобщить понятие параметрического заполнения для случая деревьев, разрешив отрицательные веса [2]. А именно, взвешенное дерево (T, ω) с границей X называется *обобщённым заполнением полуметрического пространства* (X, ρ), если для каждой пары точек x и y из X выполнено неравенство $\rho(x, y) \leqslant \omega(\gamma_{xy})$, где γ_{xy} — единственный путь в дереве T, соединяющий x и y. Величина

$$\begin{aligned}&\mathrm{mpf}_-(X, \rho, T) = \\ &\qquad = \inf\{\omega(T) \mid \omega\colon (T, \omega) \text{ — обобщённое заполнение пространства } (X, \rho)\}\end{aligned}$$

называется *весом обобщённого минимального параметрического заполнения типа* T пространства X, а каждое взвешенное дерево (T, ω), на котором этот инфимум достигается, — *обобщённым минимальным параметрическим заполнением типа* T пространства X. Величина

$$\mathrm{mf}_-(X, \rho) = \inf\{\mathrm{mpf}_-(X, \rho, T) \mid T \text{ — дерево с границей } X\}$$

называется *весом обобщённого минимального заполнения пространства* X, а каждое взвешенное дерево (T, ω), на котором этом инфимум достигается, — *обобщённым минимальным заполнением* пространства X.

Несложно построить пример метрического пространства (X, ρ) и дерева T, для которых $\mathrm{mpf}_-(X, \rho, T) < \mathrm{mpf}(X, \rho)$. Однако, как показано в [2], $\mathrm{mf}_-(X, \rho) = \mathrm{mf}(X, \rho)$, поэтому вес минимального заполнения можно вычислять как минимум весов обобщённых минимальных заполнений типа бинарное дерево.

Окончательная комбинаторная формула для веса обобщённого параметрического минимального заполнения была получена в [1] в терминах так называемых обходов [5] и мультиобходов. Приведём соответствующие определения.

Пусть S — конечное множество из n элементов. Назовём *мультициклическим порядком кратности k на множестве S* отображение $\pi\colon \mathbb{Z}_{nk} \to S$, такое что

1) $\pi(j) \neq \pi(j+1)$ для любого $j \in \mathbb{Z}_{nk}$;
2) для любого элемента $s \in S$ его прообраз при отображении π состоит ровно из k элементов.

Мультипериметром пространства (X, ρ) *по отношению к мультипорядку* π называется величина

$$p(X, \rho, \pi) = \frac{1}{2k} \sum_{j \in \mathbb{Z}_{nk}} \rho\bigl(\pi(j), \pi(j+1)\bigr).$$

Пусть $T = (V, E)$ — дерево с границей M. Для каждого его ребра e лес $(V, E \setminus \{e\})$ состоит из двух поддеревьев T_1 и T_2. Положим $M_i = M \cap T_i$, $i = 1, 2$. Мультициклический порядок на M назовём *мультиобходом дерева* T, если существует такое k, что для каждого $e \in E$ и каждого такого M_i существует ровно k элементов $p \in \mathbb{Z}_{nk}$, для которых $\pi(p) \in M_i$, но $\pi(p+1) \notin M_i$. Такое k назовём *кратностью мультиобхода*; мультиобходы кратности k также будем называть *k-обходами*. Ясно, что если мультициклический порядок является мультиобходом, то его кратность как мультициклического порядка совпадает с его кратностью как мультиобхода. Множество всех мультиобходов дерева T обозначим через $\mathcal{O}(T)$.

Отметим, что так как каждая пара вершин в дереве T соединена единственным путём, каждый k-обход π дерева T задаёт набор непустых путей γ_j в дереве T, соединяющих его граничные вершины $\pi(j)$ и $\pi(j+1)$, $j \in \mathbb{Z}_{nk}$. Каждое ребро дерева T принадлежит ровно $2k$ таким путям. Объединение всех этих nk путей задаёт эйлеров цикл в графе, полученном из T заменой каждого ребра на совокупность из $2k$ кратных рёбер, поэтому мультиобход можно представлять себе как последовательное прохождение этого эйлерова цикла по последовательным путям γ_j.

В [1] доказана формула

$$\operatorname{mpf}_-(X, \rho, T) = \max_{\pi \in \mathcal{O}(T)} p(X, \rho, \pi),$$

откуда следует, что

$$\operatorname{mf}(X, \rho) = \min_T \max_{\pi \in \mathcal{O}(T)} p(X, \rho, \pi),$$

где минимум берётся по всем бинарным деревьям T с границей X.

Существенным недостатком этих формул является то, что множество $\mathcal{O}(T)$, по которому берётся максимум, бесконечно. Чтобы избавиться от этого недостатка, определим так называемые *неприводимые* мультиобходы. Заметим, что для любых двух мультиобходов π и σ дерева T естественно определяется их сумма $\pi + \sigma$ как последовательное прохождение соответствующих эйлеровых циклов и, в частности, для каждого натурального n определён мультиобход $n\,\pi$. Мультиобход π назовём *неприводимым*, если ни для какого натурального m мультиобход $m\,\pi$ не раскладывается в нетривиальную сумму мультиобходов, а именно если $m\,\pi = \pi_1 + \pi_2$, то $\pi_i = m_i \pi$, $i = 1, 2$, и $m_1 + m_2 = m$. Можно показать, что бинарное дерево с n граничными вершинами имеет не больше $C_{C_n^2}^{2n-3}$ неприводимых мультиобходов. В частности, множество $\mathcal{O}_n(T)$ всех неприводимых мультиобходов произвольного бинарного дерева T конечно. Имеет место следующий результат [1].

Утверждение 5.1. *Для произвольного конечного полуметрического пространства (X, ρ) и произвольного бинарного дерева T с границей X вес обобщённого минимального параметрического заполнения типа T может быть вычислен как максимум конечного множества линейных функций от расстояний* *между точками пространства* X

$$\mathrm{mpf}_-(X,\rho,T)=\max_{\pi\in\mathcal{O}_n(T)} p(X,\rho,\pi),$$

а вес минимального заполнения — как конечный минимакс

$$\mathrm{mf}(X,\rho)=\min_T \max_{\pi\in\mathcal{O}_n(T)} p(X,\rho,\pi),$$

где минимум берётся по всем бинарным деревьям T *с границей* X.

Из теоремы 1, утверждения 5.1 и аналитичности линейной функции вытекает следующий результат.

Следствие 5.2. *Пусть* (X,ρ) *— произвольное полуметрическое пространство и* ρ_t, $t\in[a,b]$, *— деформация полуметрики* $\rho=\rho_{\tau_0}$, *аналитичная в* $t=t_0$. *Тогда*

1) *для каждого бинарного дерева* T *с границей* X *существует такая окрестность* U *точки* $t_0\in[a,b]$, *что при всех* $t\in U\cap\{t>t_0\}$ *(при всех* $t\in U\cap\{t<t_0\}$*) множества мультиобходов дерева* T, *на которых достигается вес обобщённого минимального параметрического заполнения типа* T *пространства* (X,ρ_t), *одинаковы при всех* t *и содержатся во множестве таких мультиобходов для* $t=t_0$;
2) *если дополнительно известно, что для некоторого* $t\in U\setminus\{t_0\}$ *и* t_0 *множества указанных обходов одинаковы, то эти множества одинаковы при всех* $t\in U$.

Следствие 5.3. *Пусть* (X,ρ) *— произвольное полуметрическое пространство и* ρ_t, $t\in[a,b]$, *— деформация полуметрики* $\rho=\rho_{\tau_0}$, *аналитичная в* $t=t_0$. *Тогда*

1) *существует такая окрестность* U *точки* $t_0\in[a,b]$, *что при всех* $t\in U\cap\{t>t_0\}$ *(при всех* $t\in U\cap\{t<t_0\}$*) множества типов минимальных заполнений пространства* (X,ρ_t) *одинаковы при всех* t *и содержатся во множестве типов минимальных заполнений пространства* (X,ρ_{t_0});
2) *если дополнительно известно, что для некоторого* $t\in U\setminus\{t_0\}$ *и* t_0 *множества указанных типов одинаковы, то эти множества одинаковы при всех* $t\in U$.

Следствие 5.4. *Пусть* M_t, $t\in[a,b]$, *— однопараметрическая деформация конечного подмножества* $M_{t_0}=\{m_1,\dots,m_n\}$ *пространства* $\mathbb{R}^k$, *при которой каждая точка* m_i *движется по кривой* $m_i(t)$, *аналитичной в точке* t_0. *На каждом множестве* M_t *рассмотрим метрику, индуцированную из* $\mathbb{R}^k$. *Тогда*

1) *существует такая окрестность* U *точки* $t_0\in[a,b]$, *что при всех* $t\in U\cap\{t>t_0\}$ *(при всех* $t\in U\cap\{t<t_0\}$*) множества типов минимальных заполнений пространства* M_t *одинаковы при всех* t *и содержатся во множестве типов минимальных заполнений пространства* M_{t_0};
2) *если дополнительно известно, что для некоторого* $t\in U\setminus\{t_0\}$ *и* t_0 *множества указанных типов одинаковы, то эти множества одинаковы при всех* $t\in U$.

6. Производные длины отрезка при линейной деформации

Пусть AB — произвольный невырожденный отрезок в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$. Рассмотрим его однопараметрическую линейную деформацию $A(t)B(t)$, где $A(t) = A+ut$ и $B(t) = B+vt$, и функцию длины $\ell(t) = \|A(t)B(t)\|$. Положим $x = B - A$ и $w = v - u$. Тогда $\ell(t) = \sqrt{\langle x+wt, x+wt\rangle}$.

Утверждение 6.1. *Если величина $\ell(t)$ отлична от нуля, то функция ℓ дифференцируема в точке t бесконечное число раз и её производные в сделанных обозначениях имеют вид*

$$\ell'(t) = \frac{\langle w, x+wt\rangle}{\|x+wt\|}, \quad \ell''(t) = \frac{\langle w,w\rangle\langle x+wt, x+wt\rangle - \langle w, x+wt\rangle^2}{\|x+wt\|^3}.$$

В частности,

$$\ell'(0) = \langle w, \tau\rangle, \quad \ell''(0) = \frac{\langle w,w\rangle\langle x,x\rangle - \langle w,x\rangle^2}{\|x\|^3} = \frac{\langle w,\nu\rangle^2}{\|x\|},$$

где $\tau = (B-A)/\|AB\|$ — единичный вектор направления отрезка, а ν — любой единичный вектор нормали к отрезку. В частности, вторая производная всегда неотрицательна.

Рассмотрим теперь двупараметрическую линейную деформацию $A(t)B(s)$ отрезка $[A,B]$, где $A(t) = A + ut$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, и $B(s) = B + v\,s$, $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, и функцию длины $\ell(s,t) = \|A(t)B(s)\|$. Положим $x = B - A$. Тогда $\ell(s,t) = \sqrt{\langle x+vs-ut, x+vs-ut\rangle}$.

Утверждение 6.2. *Если величина $\ell(s,t)$ отлична от нуля, то функция ℓ дифференцируема в точке (s,t) бесконечное число раз и её первые частные производные в сделанных обозначениях имеют вид*

$$\frac{\partial\ell}{\partial t} = -\frac{\langle u, x-ut+vs\rangle}{\|x-ut+vs\|}, \quad \frac{\partial\ell}{\partial s} = \frac{\langle v, x-ut+vs\rangle}{\|x-ut+vs\|}.$$

В частности,

$$\frac{\partial\ell}{\partial t}(0,0) = -\langle u,\tau\rangle, \quad \frac{\partial\ell}{\partial s}(0,0) = \langle v,\tau\rangle,$$

где $\tau = (B-A)/\|AB\|$ — единичный вектор направления отрезка.

Вторые частные производные в точке $(0,0)$ имеют вид

$$\frac{\partial^2\ell}{\partial t^2}(0,0) = \frac{\langle x,x\rangle\langle u,u\rangle - \langle u,x\rangle^2}{\|x\|^3},$$
$$\frac{\partial^2\ell}{\partial s\,\partial t}(0,0) = \frac{\langle x,u\rangle\langle x,v\rangle - \langle x,x\rangle\langle u,v\rangle}{\|x\|^3},$$

а формула для $\partial^2\ell/\partial s^2$ получается из выражения для $\partial^2\ell/\partial t^2$ заменой u на v. Числители полученных выражений представляют собой миноры матрицы Грама *системы векторов $\{x, u, v\}$, причём миноры, соответствующие $\partial^2\ell/\partial t^2$ и $\partial^2\ell/\partial s^2$, соответствуют главным минорам, поэтому неотрицательны.*

7. Многомерные обобщения

Вместо рёберных множеств можно рассматривать симплициальные множества, заменяя семейство $V^{(2)}$ на $V^{(k)}$, $k > 2$. Тогда вместо длины можно, используя определители Кэли—Менгера, рассмотреть метрические функционалы, соответствующие объёмам евклидовых симплексов. Для таких функционалов также имеют место аналоги теоремы 1.

Авторы искренне признательны академику А. Т. Фоменко за постоянное внимание и интерес к работе, а также профессору Х. Рубинштейну, плодотворные дискуссии с которым заставили авторов более внимательно отнестись к данной тематике. Работа частично поддержана РФФИ и Программой Президента РФ поддержки ведущих научных школ.

Литература

[1] Ерёмин А. Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Матем. сб. — 2013. — Т. 204, № 9. — С. 51—72.

[2] Иванов А. О., Овсянников З. Н., Стрелкова Н. П., Тужилин А. А. Одномерные минимальные заполнения с рёбрами отрицательного веса // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2012. — № 5. — С. 3—8.

[3] Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // УМН. — 1992. — Т. 47, № 2. — С. 53—115

[4] Иванов А. О., Тужилин А. А. Дифференциальное исчисление на пространстве минимальных деревьев Штейнера в римановых многообразиях // Матем. сб. — 2001. — Т. 192, № 6. — С. 31—50.

[5] Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 5. — С. 65—118.

[6] Gromov M. Filling Riemannian manifolds // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, no. 1. — P. 147.

[7] Hörmander L. An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. — Princeton: Van Nostrand, 1966.

[8] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Steiner problem for convex boundaries, general case // Minimal Surfaces / A. Fomenko, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 1993. — (Adv. Sov. Math.; Vol. 15). — P. 15—92.

[9] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks: The Steiner Problem and Its Generalizations. — Boca Raton: CRC Press, 1994.

[10] Melzak Z. A. On the problem of Steiner // Can. Math. Bull. — 1960. — Vol. 4. — P. 143—148.

[11] Pollak H. O. Some remarks on the Steiner problem // J. Combin. Theor. Ser. A. — 1978. — Vol. 24. — P. 278—295.

[12] Rubinstein J. H., Thomas D. A. A variational approach to the Steiner network problem // Ann. Operations Research. — 1991. — Vol. 33. — P. 481—499.

[13] Thomas D. A. A variational approach to the Steiner ratio conjecture for six points // Proc. of the NATO Advanced Research Workshop «Topological Network Design: Analysis and Synthesis» (Copenhagen, 1989).

[14] Weng J. F. Variational approach and Steiner minimal trees on four points // Discrete Math. — 1994. — Vol. 132, no. 1—3. — P. 349—362.