Классификация метрических пространств, отношение Штейнера—Громова которых равно единице*

А. С. ПАХОМОВА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: anpahkom@gmail.com

УДК 515.124+519.176

Ключевые слова: отношения типа Штейнера, минимальные заполнения конечных метрических пространств, минимальные остовные деревья, кратчайшие сети.

Аннотация

Сформулировано несколько эквивалентных условия равенства единице отношения Штейнера—Громова метрического пространства, т. е. условия того, что для произвольного конечного подмножества метрического пространства минимальное остовное дерево является кратчайшим деревом и одновременно минимальным заполнением. Получена полная классификация всех таких пространств.

Abstract

A. S. Pakhomova, Classification of metric spaces whose Steiner–Gromov ratio is equal to one, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 5, pp. 181—189.

Several equivalent conditions for the Steiner—Gromov ratio of a metric space to be equal to one are stated, i.e., conditions for each minimal spanning tree in any finite subset of a given metric space to be both a shortest tree and a minimal filling. A complete classification of such spaces is obtained.

1. Введение и предварительные результаты

Рассмотрим метрическое пространство $(\mathbb{X}, \rho)$ и его конечное подмножество M. Будем рассматривать всевозможные связные графы $G = \big(V(G), E(G)\big)$, которые *соединяют* множество M, т. е. графы, для которых $M \subset V(G)$. Кроме того, будем полагать, что рассматриваемые графы являются *взвешенными*, т. е. на их рёбрах задана неотрицательная функция $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$, называемая *весовой функцией*. Величина $\omega(e)$ называется *весом ребра* $e \in E(G)$, а сумма весов всех рёбер графа называется *весом графа*.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 16-01-00378а) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-7962.2016.1).

Важное значение имеет задача о поиске оптимального графа, соединяющего данное конечное множество точек метрического пространства. Существует несколько подходов к определению оптимального графа. Предположим сначала, что все вершины искомого графа принадлежат исходному метрическому пространству. Тогда на рёбрах графа можно задать естественную весовую функцию, ставящую в соответствие каждому ребру расстояние по метрике между вершинами, которые инцидентны данному ребру. Будем обозначать эту весовую функцию как метрику, через ρ. В простейшем случае мы придём к определению минимального остовного дерева для данного множества вершин M. Для этого определим величину

$$\operatorname{mst}(M) = \min_G \{\rho(G) \mid G \text{ — дерево, } M = V(G)\}.$$

Заметим, что достаточно было бы потребовать, чтобы граф G в определении был связен, тогда ацикличность G — следствие минимальности. Дерево G на M называется *минимальным остовным деревом*, если $\rho(G) = \operatorname{mst}(M)$.

Минимальное остовное дерево не содержит никаких иных вершин, кроме точек множества M. Если же разрешить в качестве вершин графа брать произвольные точки пространства $\mathbb{X}$, мы придём к понятию минимального дерева Штейнера. Для этого определим величину

$$\operatorname{smt}(M) = \inf_G \{\rho(G) \mid G \text{ — дерево, } M \subset V(G) \subset \mathbb{X}\}.$$

Дерево G на конечном подмножестве $V(G) \subset \mathbb{X}$, содержащем M, называется *минимальным деревом Штейнера, соединяющим* M, если $\rho(G) = \operatorname{smt}(M)$. Вершины этого дерева, принадлежащие множеству M, мы будем называть *граничными*, а само множество M — *границей* дерева G (или *граничным множеством*). Остальные вершины дерева G будем называть *внутренними* (или *добавленными*). Заметим, что, в отличие от минимального остовного дерева, минимальное дерево Штейнера существует, вообще говоря, не всегда. Одной из возможных причин этого может служить неполнота объемлющего метрического пространства. Полнота пространства $\mathbb{X}$, однако, не является достаточным условием существования минимального дерева Штейнера для произвольного его конечного подмножества $M \subset \mathbb{X}$. По-видимому, первый пример полного метрического (и даже банахова) пространства, в котором для некоторого набора точек не существует кратчайшего дерева Штейнера, был построен в 1974 в [3]. Подобные примеры строились позднее и в других работах, например в [2, 8, 14, 16].

Ставя задачу о поиске минимального графа, можно и не требовать, чтобы все вершины графа принадлежали исходному объемлющему пространству. Рассмотрим произвольное конечное множество $M \subset (\mathbb{X}, \rho)$ и взвешенный граф G, соединяющий M, с некоторой весовой функцией ω. Функция ω задаёт на M псевдометрику d_ω следующим образом: расстоянием между вершинами графа G назовём наименьший из весов маршрутов, их соединяющих, где *весом маршрута*, как обычно, называется сумма весов рёбер, входящих в маршрут. Если для любых точек p и q из M выполняется $\rho(p,q) \leqslant d_\omega(p,q)$, то взвешенный граф G называется *заполнением* M. При этом M назовём *граничным множеством* заполнения. Заполнение, вес которого равен $\mathrm{mf}(M) = \inf \omega(G)$, где точная нижняя грань берётся по всем заполнениям M, назовём *минимальным заполнением*. Число $\mathrm{mf}(M)$ назовём *весом* минимального заполнения. Понятие минимального заполнения для конечных метрических пространств было введено впервые А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в [5]. В той же работе показано, что минимальное заполнение существует для любой границы. Познакомиться с более поздними результатами по данной теме можно в [12]. Отметим, что понятие заполнения конечного метрического пространства связано с понятием заполнения для римановых многообразий, которое было введено М. Громовым (см., например, [11]). М. Громов рассматривал гладкие замкнутые многообразия M с заданными на них функциями расстояния ρ и всевозможные компактные многообразия W с краем, равным M. Метрическое пространство (W, d) называется *заполнением в смысле Громова* для метрического пространства (M, ρ), если d — функция расстояния на W, не уменьшающая расстояние между точками M. Определение, предложенное А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным, получается естественным образом, если в качестве M рассматриваются конечные метрические пространства. В этом случае заполнениями будут являться одномерные стратифицированные многообразия, которые можно рассматривать как взвешенные графы с неотрицательной весовой функцией.

Для любого метрического пространства можно определить следующие три величины, связанные с минимальными графами.

Отношением Штейнера метрического пространства $(\mathbb{X}, \rho)$ назовём

$$\mathrm{sr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M \mid M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{smt}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \;\middle|\; 1 < \#M < \infty \right\},$$

где $\#M$ обозначает количество элементов в множестве M. Отношение Штейнера появилось впервые в работах Э. Гилберта и Г. Поллака в 60-х годах прошлого века [10].

Аналогичным образом определим *отношение Штейнера—Громова*:

$$\mathrm{sgr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M \mid M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \;\middle|\; 1 < \#M < \infty \right\}.$$

Суботношением Штейнера будем называть величину

$$\mathrm{ssr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M \mid M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{smt}(M)} \;\middle|\; 1 < \#M < \infty \right\}.$$

Введённые величины будем называть *отношениями типа Штейнера* или *общими отношениями типа Штейнера*, чтобы подчеркнуть отличие от их n-точечных аналогов, которые определяются ниже.

Пусть $n \geqslant 2$ — фиксированное натуральное число. Определим *n-точечное отношение Штейнера*

$$\mathrm{sr}_n(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M \mid M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{smt}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \;\middle|\; 1 < \#M \leqslant n \right\},$$

n-точечное суботношение Штейнера

$$\mathrm{ssr}_n(\mathbb{X},\rho)=\inf_{\{M\mid M\subset\mathbb{X}\}}\left\{\frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{smt}(M)}\;\middle|\;1<\#M\leqslant n\right\}$$

и *n-точечное отношение Штейнера—Громова*

$$\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X},\rho)=\inf_{\{M\mid M\subset\mathbb{X}\}}\left\{\frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)}\;\middle|\;1<\#M\leqslant n\right\}.$$

Эти три величины будем называть *n-точечными отношениями типа Штейнера*.

Отношения типа Штейнера показывают, насколько точно минимальные графы разных типов приближают друг друга. Отношения типа Штейнера давно используются для оценки относительной ошибки приближённых алгоритмов. Очередной всплеск интереса к данной тематике связан с гипотезой Гилберта—Поллака [10] об отношении Штейнера евклидовой плоскости. Стоит заметить, однако, что многочисленные попытки доказать её так и не привели к успеху, так что данный вопрос остаётся открытым для исследования [13].

Для отношений типа Штейнера верно следующее утверждение.

Предложение. *Пусть функция r обозначает одно из трёх отношений типа Штейнера*: sr, sgr *или* ssr. *Для произвольного метрического пространства* $\mathbb{X}$ *справедливы следующие оценки*:

$$r_n(\mathbb{X})\geqslant\frac{n}{2(n-1)},\quad r(\mathbb{X})\geqslant\frac{1}{2}.$$

Более того, эти оценки являются точными.

В случае отношения Штейнера этот результат был доказан Д. Цисликом (см. [9, следствия 4.1.2, 4.1.3]). Справедливость результата для двух других отношений была доказана в [7].

Очевидной верхней оценкой для всех вышеупомянутых отношений является значение 1.

Особый интерес представляет изучение «граничных случаев», т. е. метрических пространств, у которых значение того или иного отношения равно максимально или минимально возможному. В [6] показано, например, что пространства, у которых какое-то из отношений типа Штейнера минимально, и только они являются точками непрерывности соответствующего отношения, рассмотренного как функции на пространстве всех компактных метрических пространств с метрикой Громова—Хаусдорфа. Для всех отношений типа Штейнера (кроме общего суботношения Штейнера) показано также, что множество таких пространств всюду плотно в рассматриваемом пространстве компактных пространств.

Известны примеры пространств, для которых отношение Штейнера равно единице. Например, таковым является любое ультраметрическое пространство. Доказательство этого факта (см. [9, наблюдение 4.1.10]) и другие примеры можно найти в работе Д. Цислика. Говоря о работах, посвящённых изучению пространств с максимально возможным значением отношения, хочется отметить работу [1], в которой описаны все банаховы пространства, для которых суботношение Штейнера равно единице. В данной работе рассматривается отношение Штейнера—Громова и классифицируются все пространства, у которых $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) = 1$ для некоторого $n > 2$, и пространства, у которых $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = 1$. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $(\mathbb{X}, \rho)$ — метрическое пространство. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}, \rho) = 1$.
2. *Для любого конечного множества $M \subset \mathbb{X}$ выполняется равенство* $\mathrm{mf}(M) = \mathrm{mst}(M)$.
3. *Все треугольники в $\mathbb{X}$ вырожденны. Более формально, для любых трёх различных точек x_1, x_2, x_3, принадлежащих $\mathbb{X}$, выполнено равенство $\rho(x_i, x_j) = \rho(x_i, x_k) + \rho(x_k, x_j)$, где (i, j, k) — некоторая перестановка индексов $(1, 2, 3)$.*
4. *Пространство $(\mathbb{X}, \rho)$ изометрично подмножеству евклидовой прямой или изометрично четырёхточечному пространству $\{x_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, в котором все треугольники вырожденны и $\rho(x_i, x_j) = \rho(x_k, x_l)$ для любой перестановки (i, j, k, l) индексов $(1, 2, 3, 4)$.*
5. *Существует $n \geqslant 3$, такое что* $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}, \rho) = 1$.
6. *Для любого $n \geqslant 2$ выполняется* $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}, \rho) = 1$.

Замечание. Условие $\mathrm{mf}(M) = \mathrm{mst}(M)$ автоматически означает, что $\mathrm{mf}(M) = \mathrm{mst}(M) = \mathrm{smt}(M)$, так как для любого конечного множества M выполнены неравенства $\mathrm{mf}(M) \leqslant \mathrm{smt}(M) \leqslant \mathrm{mst}(M)$.

2. Доказательство теоремы

Из 1 следует 2

Предположим противное. Пусть найдётся конечное множество $M_0 \subset \mathbb{X}$, для которого $\mathrm{mf}(M_0) < \mathrm{mst}(M_0)$. Но в этом случае

$$\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = \inf_{\{M | M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \,\middle|\, 1 < \#M < \infty \right\} \leqslant \frac{\mathrm{mf}(M_0)}{\mathrm{mst}(M_0)} < 1,$$

что противоречит условию $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = 1$.

Из 2 следует 3

Предположим противное. Пусть найдутся три точки x_1, x_2, x_3, принадлежащие пространству $\mathbb{X}$, для которых

$$\rho(x_i, x_j) < \rho(x_i, x_k) + \rho(x_k, x_j),$$

где (i,j,k) — любая перестановка индексов $(1,2,3)$. Далее для определённости будем считать, что

$$\rho(x_1,x_2) \leqslant \rho(x_2,x_3) \leqslant \rho(x_1,x_3).$$

Рассмотрим множество M, состоящее из этих трёх точек. Тогда

$$\mathrm{mst}(M) = \rho(x_1,x_2) + \rho(x_2,x_3).$$

С другой стороны, по формуле для вычисления веса минимального заполнения трёхточечного множества (см. [5, п. 11.1])

$$\mathrm{mf}(M) = \frac{1}{2}\big(\rho(x_1,x_2) + \rho(x_2,x_3) + \rho(x_1,x_3)\big).$$

Учитывая сделанные предположения, имеем

$$\rho(x_1,x_3) < \rho(x_1,x_2) + \rho(x_2,x_3).$$

Подставив эту оценку в выражение для $\mathrm{mst}(M)$, получим

$$\mathrm{mf}(M) < \frac{1}{2}\big(\rho(x_1,x_2) + \rho(x_2,x_3) + \rho(x_1,x_2) + \rho(x_2,x_3)\big) = \mathrm{mst}(M),$$

что противоречит условию $\mathrm{mf}(M) = \mathrm{mst}(M)$ для любого $M \subset \mathbb{X}$.

Из 3 следует 4

Это переход является одним из основных результатов в работе [15].

Из 4 следует 1

Если пространство изометрично вкладывается в прямую $\mathbb{R}^1$, то его отношение Штейнера—Громова не меньше, чем аналогичное отношение для прямой. При помощи прямых вычислений можно показать, что в случае прямой отношение Штейнера—Громова равно единице. Поскольку это максимально возможное значение отношения, отношение для исходного пространства также равно единице.

Если же пространство изометрично четырёхточечному пространству, то получить утверждение можно, применив формулу для вычисления веса минимального заполнения четырёхточечного пространства (см. [5, п. 11.6]). Для множества $M = x_1, x_2, x_3, x_4$ верна формула

$$2\,\mathrm{mf}(M) = \min\big(\rho(x_i,x_j) + \rho(x_k,x_l)\big) + \max\big(\rho(x_i,x_j) + \rho(x_k,x_l)\big),$$

где (i,j,k,l) — произвольная перестановка индексов $(1,2,3,4)$, а минимум и максимум берутся по всем (i,j,k,l).

По условию в рассматриваемом пространстве

$$\rho(x_1,x_2) + \rho(x_2,x_3) = \rho(x_1,x_3), \quad \rho(x_i,x_j) = \rho(x_k,x_l)$$

для любой перестановки (i,j,k,l) индексов $(1,2,3,4)$. Пусть $\rho(x_1,x_2) = \rho(x_3,x_4) = a$, а $\rho(x_2,x_3) = \rho(x_1,x_4) = b$. Тогда из-за вырожденности треугольника $x_1x_2x_3$ выполняются равенства $\rho(x_1,x_3) = \rho(x_2,x_4) = a+b$.

Без ограничения общности $a \leqslant b$. Кроме того, $b < a+b$. Тогда

$$\operatorname{mst}(M) = a+b+a,$$
$$2\operatorname{mf}(M) = (a+a) + (a+b+a+b).$$

Таким образом, $\operatorname{mst}(M) = \operatorname{mf}(M) = 2a+b$. Для единственного четырёхточечного множества $\operatorname{mf}(M)/\operatorname{mst}(M) = 1$. Для множеств, состоящих из трёх точек, аналогичное равенство следует из условия вырожденности всех треугольников. Значит, и для такого пространства $\operatorname{sgr}(\mathbb{X}) = 1$.

Таким образом, доказана эквивалентность первых четырёх пунктов. Покажем, что и оставшиеся два пункта эквивалентны им.

Из 1 следует 6

Действительно, равенство

$$\operatorname{sgr}(\mathbb{X},\rho) = \inf_{\{M \mid M\subset\mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\operatorname{mf}(M)}{\operatorname{mst}(M)} \;\middle|\; 1 < \#M < \infty \right\} = 1$$

влечёт за собой выполнение равенства

$$\operatorname{sgr}_n(\mathbb{X},\rho) = \inf_{\{M \mid M\subset\mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\operatorname{mf}(M)}{\operatorname{mst}(M)} \;\middle|\; 1 < \#M \leqslant n \right\} = 1$$

для любого $n \geqslant 2$.

Из 6 следует 5

Если равенство $\operatorname{sgr}_n(\mathbb{X},\rho) = 1$ выполняется для всех n, оно очевидно выполняется и для некоторого $n_0 \geqslant 3$.

Из 5 следует 3

Пусть дано, что для некоторого n_0 выполняется равенство $\operatorname{sgr}_{n_0}(\mathbb{X}) = 1$. Это означает, что аналогичное равенство выполнено и для всех $n \leqslant n_0$, в частности для $n = 3$.

Пусть в пространстве $\mathbb{X}$ существует хотя бы один невырожденный треугольник $x_1x_2x_3$ (причём сторона x_1x_3 наибольшая). Тогда для множества M вершин треугольника выполнено

$$\rho(x_1,x_2) + \rho(x_2,x_3) > \rho(x_1,x_3),$$
$$\operatorname{mf}(M) = \frac{\rho(x_1,x_2) + \rho(x_2,x_3) + \rho(x_1,x_3)}{2} < \rho(x_1,x_2) + \rho(x_2,x_3) = \operatorname{mst}(M).$$

Это значит, что $\mathrm{sgr}_3(\mathbb{X}) \leqslant \mathrm{mf}(M)/\mathrm{mst}(M) < 1$, что противоречит условию $\mathrm{sgr}_3(\mathbb{X}) = 1$. Следовательно, в пространстве $\mathbb{X}$ не может быть невырожденных треугольников.

Доказательство данного перехода завершает доказательство теоремы.

3. Примеры и следствия

Из теоремы следует, что метрические пространства, отношение Штейнера—Громова которых равно единице, либо конечны, либо изометричны евклидовой прямой или её подмножеству. Так как пространство $\mathbb{R}^1$ содержит континуум точек, никакие пространства $\mathbb{X}$ большей мощности не могут быть подмножествами $\mathbb{R}^1$, а значит, $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) \neq 1$.

Следствие 1. *Пусть $(\mathbb{X}, \rho)$ — метрическое пространство. Если его мощность больше мощности континуума, то $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}, \rho) < 1$.*

Пример. Пространство всех ограниченных действительных функций $\mathbb{B}[0,1]$ на отрезке $[0,1]$ с метрикой

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

имеет мощность большую, чем мощность континуума. Следовательно, $\mathrm{sgr}(\mathbb{B}[0,1]) < 1$. Аналогичный результат справедлив, если рассмотреть функции не на отрезке $[0,1]$, а на любом ином континуальном множестве.

Убедиться в этом можно, вычислив отношения Штейнера—Громова напрямую. Для пространства $\mathbb{B}[0,1]$ отношение Штейнера—Громова равно $1/2$, что следует из того, что пространство содержит правильный n-мерный симплекс для любого n (см. [5, доказательство утверждения 12.1]). В качестве вершин данного симплекса можно взять функции

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 1/2^i, \\ 0 & \text{при } x \neq 1/2^i. \end{cases}$$

Прежде чем сформулировать следующее следствие дадим определение. Конечное метрическое пространство (M,ρ) называется *аддитивным*, если M можно соединить взвешенным деревом $G = (G,\omega)$, для которого ρ совпадает с функцией, ставящей в соответствие каждой паре точек из M вес маршрута в графе G, соединяющего эти точки. Дерево G называется порождающим для пространства M. Аддитивные пространства играют важную роль в биоинформатике.

Заметим, что любое конечное подмножество евклидовой прямой является аддитивным пространством. Четырёхточечное пространство, описанное в теореме классификации, наоборот, является неаддитивным. Убедиться в этом позволяет критерий четырёх точек (см. [4]): пространство аддитивно, если и только если для любых четырёх точек x_i, x_j, x_k, x_l величины $\rho(x_i,x_j) + \rho(x_k,x_l)$, $\rho(x_i,x_k) + \rho(x_j,x_l)$ и $\rho(x_i,x_l) + \rho(x_k,x_j)$ являются длинами сторон равнобедренного треугольника с основанием, не превосходящим боковой стороны.

Следствие 2. *Пусть* $(\mathbb{X}, \rho)$ — *метрическое пространство. Если* $\mathbb{X}$ *не аддитивно и содержит более четырёх точек, то* $\operatorname{sgr}(\mathbb{X}, \rho) < 1$.

Автор выражает благодарность профессору А. О. Иванову и профессору А. А. Тужилину за постановку задачи, постоянную поддержку и интерес к работе.

Литература

[1] Беднов Б. Б., Бородин П. А. Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. — 2014. — Т. 205, № 4. — С. 3—20.

[2] Бородин П. А. Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 4. — С. 514—518.

[3] Гаркави А. Л., Шматков В. А. О точке Ламе и её обобщениях в нормированном пространстве // Матем. сб. — 1974. — Т. 95 (137), № 2 (10). — С. 272—293.

[4] Зарецкий К. А. Построение дерева по набору расстояний между висячими вершинами // УМН. — 1965. — Т. 20, № 6. — С. 90—92.

[5] Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 5. — С. 65—118.

[6] Пахомова А. С. Критерий непрерывности отношений типа Штейнера в пространстве Громова—Хаусдорфа // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96, № 1. — С. 126—137.

[7] Пахомова А. С. Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера—Громова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2014. — № 1. — С. 17—25.

[8] Baronti M., Casini E., Papini P. L. Equilateral sets and their central points // Rend. Mat. Appl. — 1993. — Vol. 13, no. 1. — P. 133—148.

[9] Cieslik D. The Steiner Ratio. — Boston: Kluwer Academic, 2001.

[10] Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. — 1968. — Vol. 16, no. 1. — P. 1—29.

[11] Gromov M. Filling Riemannian manifolds // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, no. 1. — P. 1—147.

[12] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal fillings of finite metric spaces: The state of the art // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics / A. Barg, O. Musin, eds. — (Contemp. Math.; Vol. 625). — Providence: Amer. Math. Soc., 2014. — P. 9—35.

[13] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Steiner ratio Gilbert—Pollak Conjecture is still open // Algorithmica. — 2014. — Vol. 62, no. 1-2. — P. 630—632.

[14] Papini P. L. Two new examples of sets without medians and centers // Soc. Estad. Invest. Operat. Top. — 2005. — Vol. 13, no. 2. — P. 315—320.

[15] Richmond B., Richmond T. Metric spaces in which all triangles are degenerate // Am. Math. Month. — 1997. — Vol. 104, no. 8. — P. 713—719.

[16] Vesely L. A characterization of reflexivity in the terms of the existence of generalized centers // Extr. Math. — 1993. — Vol. 8, no. 2-3. — P. 125—131.