

Перемешивающие потоки с однородным спектром кратности 2

В. В. РЫЖИКОВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vryzh@mail.ru*

А. Е. ТРОИЦКАЯ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: waett@yandex.ru*

УДК 517.987

Ключевые слова: сохраняющие меру потоки, однородный спектр, перемешивание, слабое замыкание унитарных потоков.

Аннотация

Статья посвящена проблеме реализации спектральных кратностей для перемешивающих динамических систем. Показано, что в классе перемешивающих потоков реализуется однородный спектр кратности 2.

Abstract

V. V. Ryzhikov, A. E. Troitskaya, Mixing flows with homogeneous spectrum of multiplicity 2, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 5, pp. 191–197.

The paper is devoted to the problem of realization of spectral multiplicities for mixing dynamical systems. It is shown that in the class of mixing flows the homogeneous spectrum of multiplicity 2 can be realized.

1. Введение

В заметке рассматриваются сохраняющие меру потоки на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) . Поток T_t , $t \in \mathbb{R}$, называется перемешивающим, если для всех измеримых множеств A, B выполнено

$$\mu(T_t A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B), \quad t \rightarrow \infty.$$

Нашей целью является построение перемешивающего потока с однородным непустым спектром. Эта задача связана с проблемой Рохлина о реализации непустого однородного спектра для эргодической динамической системы. Неперемешивающие эргодические преобразования с однородным спектром кратности 2 появились в [8, 12]. Всевозможные обобщения этого результата можно

найти, например, в [1, 9, 11]. Однородный спектр произвольной кратности для перемешивающих \mathbb{Z} -действий был реализован в [6]. Для перемешивающих потоков задача об однородном спектре оставалась нерешённой.

Сформулируем основной результат настоящей заметки.

Теорема 1. *Существует перемешивающий поток T_t , такой что его тензорный квадрат $T_t \otimes T_t$ имеет однородный спектр кратности 2.*

Доказательство этого факта использует специальный класс неперемешивающих потоков, с помощью которого устанавливается существование нужного перемешивающего потока. Для этого мы адаптируем методы работы [4].

Напомним необходимые определения.

Пусть U_t — унитарный поток, действующий в гильбертовом пространстве H . Для вектора $f \in H$ определим циклическое подпространство C_f как наименьшее линейное замкнутое пространство, содержащее все векторы $U_t f$ ($t \in \mathbb{R}$).

Говорят, что унитарный поток $U_t: H \rightarrow H$ имеет простой спектр, если $C_f = H$ для некоторого f .

Унитарный поток V_t имеет однородный спектр кратности 2, если $V_t \cong U_t \oplus U_t$, где U_t имеет простой спектр.

Сохраняющий меру поток T_t на пространстве Лебега (X, μ) имеет однородный спектр кратности 2, если индуцированный унитарный поток \hat{T}_t на $L_2(X, \mu)$ в подпространстве, ортогональном к константам, имеет однородный спектр кратности 2.

Назовём слабым замыканием потока \hat{T}_t множество всех операторов $P: L_2(X, \mu) \rightarrow L_2(X, \mu)$, таких что для некоторой последовательности t_i операторы \hat{T}_{t_i} сходятся к P слабо (т. е. $(\hat{T}_{t_i} f, g) \rightarrow (P f, g)$ для любых $f, g \in L_2$).

Симметрическое произведение $\hat{T}_t \odot \hat{T}_t$ является ограничением оператора $\hat{T}_t \otimes \hat{T}_t$ на пространство функций, симметричных относительно перестановки координат (т. е. таких, что $F(x, y) = F(y, x)$, $F \in L_2 \otimes L_2$).

Обозначим через Θ оператор ортогональной проекции на пространство константных функций из $L_2(X, \mu)$. В дальнейшем элементы потока и соответствующие им операторы обозначаются одинаково.

2. Слабые пределы и простота спектра симметрического тензорного квадрата потока

Ниже приводится вспомогательное утверждение, играющее ключевую роль в доказательстве основного результата. Методы контроля спектральных кратностей, использующие слабые пределы потоков, явно не применимы к перемешивающим потокам, так как последние обладают лишь тривиальным пределом. Однако можно указать класс неперемешивающих потоков, на границе которого окажется перемешивающий поток, наследующий спектральное свойство потоков из этого класса. Следующая теорема посвящена таким неперемешивающим потокам.

Теорема 2. Пусть для заданного ε , $0 < \varepsilon < 1$, слабое замыкание потока T_t с простым спектром содержит все операторы вида

$$(1 - \varepsilon)\Theta + \frac{\varepsilon}{a} \int_0^a T_s ds$$

для всех $a > 0$. Тогда симметрическая тензорная степень $T_t \odot T_t$ имеет простой спектр.

Доказательство. Заметим, что оператор $(1 - \varepsilon)\Theta + \varepsilon I$ получается как слабый предел операторов

$$(1 - \varepsilon)\Theta + \frac{\varepsilon}{a} \int_0^a T_s ds$$

при $a \rightarrow 0$. Поэтому оператор $(1 - \varepsilon)\Theta + \varepsilon I$ лежит в слабом замыкании потока и, следовательно, спектральная мера потока непрерывна и взаимно сингулярна с её свёрточным квадратом (см. [2, 5]).

Обозначим через H подпространство всех функций с нулевым средним из $L_2(X, \mu)$. Установим, что ограничение потока $T_t \otimes T_t$ на $H \otimes H$ имеет однородный спектр кратности 2. Это эквивалентно тому, что $T_t \odot T_t$ имеет простой спектр, так как $T_t \otimes T_t \cong (T_t \odot T_t) \oplus (T_t \odot T_t)$ (см., например, [1]) в случае непрерывного спектра потока.

Простота спектра потока $T_t \odot T_t$ эквивалентна тому, что

$$T_b f \otimes f + f \otimes T_b f \in C_{f \otimes f} \quad \text{для каждого } b \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $f \in H$ — циклический вектор потока T_t (т. е. $C_f = H$), а $C_{f \otimes f}$ — циклическое пространство с циклическим вектором $f \otimes f$ относительно потока $T_t \odot T_t$.

Действительно, в этом случае для любого $g \in H$ получаем, что $g \otimes f + f \otimes g \in C_{f \otimes f}$, следовательно, $H \otimes f + f \otimes H \in C_{f \otimes f}$, $H \odot H = C_{f \otimes f}$.

Так как спектральная мера потока взаимно сингулярна с её свёрточным квадратом в силу свойства $(1 - \varepsilon)$ -перемешивания в терминологии [2, 5], действия потока $T_t \otimes T_t$ на пространстве $H \otimes H$ и пространстве $(1 \otimes H) \oplus (H \otimes 1)$ дизъюнкты. Отсюда вытекает однородность спектра кратности 2 для потока $T_t \otimes T_t$, действующего во всём пространстве $L_2(X, \mu) \otimes L_2(X, \mu)$.

Таким образом, нам остаётся доказать (1). Обозначим

$$P_a = \int_0^a T_s ds.$$

Пусть f — циклический вектор потока T_t . Из условий теоремы и замкнутости циклических пространств в слабой топологии имеем

$$Q_a := P_a f \otimes P_a f \in C_{f \otimes f} \quad \text{для каждого } a \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что

$$Q_{a+\delta} - Q_a - T_\delta \otimes T_\delta (Q_a - Q_{a-\delta}) = T_a P_\delta f \otimes P_\delta f + P_\delta f \otimes T_a P_\delta f.$$

Обозначим последнее выражение через $G_{a,\delta}$. Очевидно, что

$$\frac{1}{\delta^2} G_{a,\delta} \rightarrow (T_a f \otimes f + f \otimes T_a f) \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Но пределы функций $(1/\delta^2)G_{a,\delta}$ лежат в $C_{f \otimes f}$, тем самым (1) установлено. Теорема 2 доказана. \square

3. Конструкции вспомогательных потоков

Конструкция потока ранга 1 задаётся параметрами h_1 , w_1 , последовательностями $r_n > 1$ ($r_n \in \mathbb{N}$) и $s_n: 1, \dots, r_n \rightarrow \mathbb{R}_+$. На шаге 1 дан прямоугольник ширины w_1 и высоты h_1 .

Построение потока происходит поэтапно.

Начнём с построения фазового пространства потока.

На n -м шаге задано множество (которое принято называть башней) X_n , которое отождествляется с прямоугольником высоты

$$h_n = r_{n-1} h_{n-1} + \sum_{i=1}^{r_{n-1}} s_n(i)$$

и ширины $w_1/(r_1 r_2 \cdots r_{n-1})$. Поток определён как равномерное движение по вертикали в этом прямоугольнике снизу вверх.

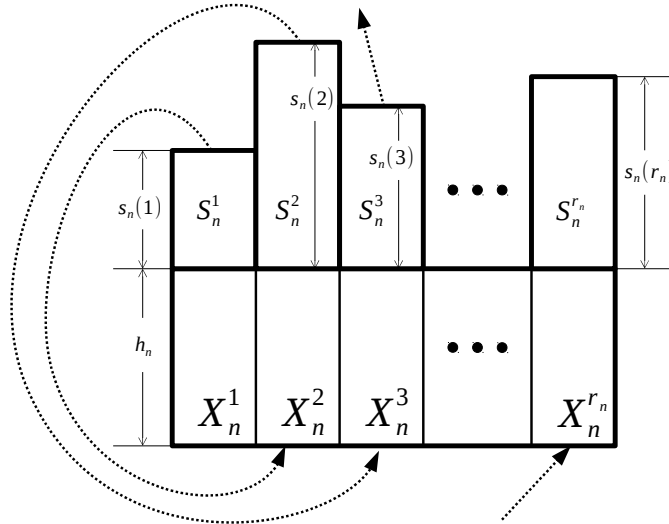


Рис. 1. Схематичное изображение потока на башне

На шаге $n + 1$ прямоугольник X_n разрезается (по вертикали) на r_n колонн (одинаковых прямоугольников той же высоты и одинаковой ширины $w_1/(r_1 r_2 \cdots r_n)$). Перенумеровав их по порядку от 1 до r_n , над каждой i -й колонной надстраиваем прямоугольник S_n^i той же ширины и высоты $s_n(i)$ (как показано на рис. 1). Надстроенные колонны обозначим X_n^i .

Сложим виртуально все колонны X_n^i по порядку в один прямоугольник — башню X_{n+1} . Её высота равна

$$h_{n+1} = r_n h_n + \sum_{i=1}^{r_n} s_n(i),$$

а ширина — $w_1/(r_1 r_2 \cdots r_n)$.

На самом деле X_n — это часть плоскости \mathbb{R}^2 , которую для удобства отождествили с прямоугольником. Множество X_{n+1} получается из X_n добавлением надстроек, прямоугольников высоты $s_n(i)$, и т. д. Фазовое пространство потока — это объединение

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Теперь опишем поток на пространстве X . Точки из X_n равномерно движутся по вертикали вверх до верхней границы X_n . При $i < r_n$ мы склеиваем верхнюю границу X_n^i с нижней границей X_n^{i+1} . Таким образом, точки с верхней границы колонны X_n^i переходят на нижнюю границу колонны X_n^{i+1} и продолжают равномерное движение. Можно сказать так: поток течёт равномерно в каждой из башен, но объединение башен есть всё фазовое пространство, поэтому поток определён на всём пространстве.

Выбор последовательности $s_n(i)$ позволяет получать всевозможные слабые пределы элементов потока.

Ниже будут рассмотрены почти лестничные конструкции потоков ранга 1. Семейство F_ε , $0 < \varepsilon < 1$, потоков ранга 1 определено следующим образом (ε фиксировано):

$$\begin{aligned} r_j &:= j, \\ s_j(i) &:= \frac{i}{\sqrt{j}} \quad \text{при } 1 \leq i \leq (1 - \varepsilon)j, \\ s_j(i) &:= \frac{i - (1 - \varepsilon)j}{\sqrt{j^3}} \quad \text{при } (1 - \varepsilon)j < i \leq j. \end{aligned}$$

Параметр w_1 выбирается так, чтобы мера фазового пространства была равна 1.

Стандартные вычисления (примеры см. в [4, 10]) показывают, что

$$T_{h_j} \rightarrow_w (1 - \varepsilon)\Theta + \varepsilon I,$$

т. е. поток является $(1 - \varepsilon)$ -перемешивающим в смысле работ [2, 5]. На самом деле слабое замыкание этого потока содержит все операторы, упомянутые

в теореме 2: для любого $a > 0$ слабое замыкание потока $T_t \in F_\varepsilon$ содержит все операторы вида

$$(1 - \varepsilon)\Theta + \frac{\varepsilon}{a} \int_0^a T_s ds.$$

Действительно, вычисления показывают, что при

$$m_j = - \left[\frac{a}{\varepsilon} \sqrt{j} \right]$$

оператор $T_{m_j h_j}$ в слабой топологии приближается операторами

$$\frac{(1 - \varepsilon)}{[(1 - \varepsilon)j]} \sum_{k=1}^{[(1-\varepsilon)j]} T_{\frac{a}{\varepsilon} k + c_j} + \frac{\varepsilon}{[\varepsilon j]} \sum_{k=1}^{[\varepsilon j]} T_{\frac{a k}{\varepsilon j}},$$

где

$$c_j = \sum_{k=1}^{m_j} \frac{k}{\sqrt{j}} \cong \sqrt{j}.$$

Первое слагаемое (для любой последовательности c_j) сходится к $(1 - \varepsilon)\Theta$, а второе — к

$$\frac{\varepsilon}{a} \int_0^a T_s ds.$$

4. Перемешивающий поток с однородным спектром кратности 2

Теорема 1 выводится из теоремы 2 при помощи процедуры «вынуждения перемешивания», описанной в [3, 4]. Сообщим основные идеи этого подхода. Перемешивающая конструкция T_t на больших интервалах (N_k, N_{k+1}) этапов построения совпадает с конструкцией класса $F_{\frac{1}{k}}$. Это означает, что параметры r_j и $s_j(i)$ этой конструкции такие же, как у конструкций класса $F_{\frac{1}{k}}$ для всех этапов из интервалов (N_k, N_{k+1}) . Иными словами, неперемешивающий поток $T_t^{(k)}$ класса $F_{\frac{1}{k}}$ аппроксимирует перемешивающий поток T_t .

Поток T_t будет обладать перемешиванием, так как он является почти лестничной конструкцией (такие конструкции появились в [3]), а доказательство перемешивания для почти лестничной конструкции не отличается от доказательства свойства перемешивания для лестничной конструкции, которое можно найти в [7].

Интервалы (N_k, N_{k+1}) выбираются столь большими, чтобы расстояние между циклическим пространством $C_{f_k \otimes f_k}$, где $f_k \otimes f_k$ — циклический вектор потока $T_t^{(k)} \odot T_t^{(k)}$, и наперёд заданным конечным семейством векторов из $L_2 \odot L_2$ стремилось к 0 при $k \rightarrow \infty$. Из-за близости потока $T_t \odot T_t$ к соответствующим потокам $T_t^{(k)} \odot T_t^{(k)}$ получим, что поток $T_t \odot T_t$ обладает простым спектром. Детали

этой процедуры для автоморфизмов подробно описаны в [4]. Случай потоков не вносит существенных изменений при доказательстве простоты спектра: вместо циклических пространств автоморфизмов рассматриваются циклические пространства потока.

Авторы благодарят рецензента за замечания.

Литература

- [1] Конев Р. А., Рыжиков В. В. О наборе спектральных кратностей $\{2, 4, \dots, 2^n\}$ для вполне эргодических \mathbb{Z}^2 -действий // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96, № 3. — С. 383—392.
- [2] Оселедец В. И. Автоморфизм с простым и непрерывным спектром без группового свойства // Матем. заметки. — 1969. — Т. 5, № 3. — С. 323—326.
- [3] Рыжиков В. В. О спектральных и перемешивающих свойствах конструкций ранга 1 в эргодической теории // Докл. РАН. — 2006. — Т. 409, № 4. — С. 448—450.
- [4] Рыжиков В. В. Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1 // Матем. сб. — 2007. — Т. 198, № 5. — С. 137—159.
- [5] Стёпин А. М. Спектральные свойства типичных динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50, № 4. — С. 801—834.
- [6] Тихонов С. В. Перемешивающие преобразования с однородным спектром // Матем. сб. — 2011. — Т. 202, № 8. — С. 139—160.
- [7] Adams T. M. Smorodinsky's conjecture on rank-one mixing // Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126, no. 3. — P. 739—744.
- [8] Ageev O. N. On ergodic transformations with homogeneous spectrum // J. Dynam. Control Systems. — 1999. — Vol. 5, no. 1. — P. 149—152.
- [9] Danilenko A. I. A survey on spectral multiplicities of ergodic actions // Ergodic Theory Dynam. Systems. — 2013. — Vol. 33, no. 1. — P. 81—117.
- [10] Danilenko A. I., Ryzhikov V. V. On self-similarities of ergodic flows // Proc. London Math. Soc. (3). — 2012. — Vol. 104, no. 3. — P. 431—454.
- [11] Katok A., Lemanczyk M. Some new cases of realization of spectral multiplicity function for ergodic transformations // Fund. Math. — 2009. — Vol. 206. — P. 185—215.
- [12] Ryzhikov V. V. Transformations having homogeneous spectra // J. Dynam. Control Systems. — 1999. — Vol. 5, no. 1. — P. 145—148.

