О следах операторов, ассоциированных с действиями компактных групп Ли

А. Ю. САВИН
Российский университет дружбы народов,
Ганноверский университет имени Лейбница

Б. Ю. СТЕРНИН
Российский университет дружбы народов,
Ганноверский университет имени Лейбница
e-mail: sternin@mail.ru

УДК 517.9

Ключевые слова: следы операторов на подмногообразии, G-операторы, локализация, действие компактной группы Ли, кограничный оператор, псевдодифференциальные операторы.

Аннотация

Для гладкой пары (M,X), состоящей из многообразия M и его подмногообразия X, имеется операция взятия следа, которая каждому оператору на объемлющем многообразии ставит в соответствие его след — некоторый оператор на подмногообразии. В настоящей работе исследуются следы операторов, ассоциированных с действиями компактных групп Ли на многообразии M. Мы устанавливаем, что следы таких операторов сосредоточены на специальных подмногообразиях в X, и исследуем структуру следа в окрестности этих подмногообразий.

Abstract

A. Yu. Savin, B. Yu. Sternin, On traces of operators associated with actions of compact Lie groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 5, pp. 199—217.

Given a pair (M,X), where X is a smooth submanifold in a closed smooth manifold M, we study the operation that takes each operator D on the ambient manifold to a certain operator on the submanifold. The latter operator is called the trace of D. More precisely, we study traces of operators associated with actions of compact Lie groups on M. We show that traces of such operators are localized at special submanifolds in X and study the structure of the traces on these submanifolds.

1. Постановка задачи

Пусть (M,X) — гладкая пара, состоящая из многообразия M и подмногообразия X. Соответствующее вложение обозначим через $i\colon X\to M$.

Для любого оператора D, действующего на M, определён его след на подмногообразии X. След определяется формулой

$$i^*Di_*\colon H^s(X)\to H^{s-d-\nu}(X), \tag{1}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 5, с. 199—217.

где $i^*\colon H^s(M) \to H^{s-\nu/2}(X)$ — граничный оператор, индуцированный вложением $i\colon X \to M$, а $i_*\colon H^s(X) \to H^{s-\nu/2}(X)$ — кограничный оператор, оператор, сопряжённый к i^*, d — порядок оператора D, ν — коразмерность подмногообразия X в M. Далее след будем обозначать через $i^!(D)$.

Цель данной работы — исследовать следы операторов со сдвигами на M. А именно, пусть на M действует компактная группа Ли G и оператор D равен

$$D = \int\limits_G D_g T_g dg, \tag{2}$$

где T_g — оператор сдвига,

$$T_g u = g^{-1^*} u,$$

индуцированный диффеоморфизмом g, dg — мера Хаара на группе, D_g — гладкое семейство псевдодифференциальных операторов, параметризованное группой. Операторы вида (2) называются *G-операторами*.

Впервые понятие следа в гладкой теории, т. е. в ситуации, когда группа тривиальна, возникло в [2, 3, 7]. В этих работах было, в частности, доказано, что след является псевдодифференциальным оператором на подмногообразии X. Это дало возможность использовать псевдодифференциальные операторы в теории задач Соболева.

В случае когда на многообразии M действует группа Ли G и рассматриваются G-операторы вида (2) (см. [4, 10, 11]), дело обстоит совершенно по-иному. Именно, след G-оператора на подмногообразии, вообще говоря, оказывается оператором, сосредоточенным на некоторых подмножествах в X (например, в некоторой точке подмногообразия X, см. [1, 5]). Более того, сам оператор следа уже не является, вообще говоря, псевдодифференциальным оператором, а является оператором принципиально новой природы, например, он может быть сосредоточен в точке — неподвижной точке действия группы G, а для своего определения требует не только преобразование Фурье (как для псевдодифференциальных операторов), но и преобразование Меллина.

Настоящая работа посвящена изучению этого нового класса операторов. При этом основной теоремой является здесь теорема о локализации, т. е. теорема о множестве, на котором сосредоточен данный оператор. Эта теорема приводится в разделе 2. В следующих разделах мы предлагаем ряд примеров, поясняющих рассматриваемую ситуацию как с геометрической (раздел 3), так и с аналитической (раздел 4) точек зрения. А именно, рассмотрена ситуация, когда всё подмногообразие X является инвариантным относительно действия группы (в этом случае след G-оператора оказывается G-оператором на подмногообразии), также рассматриваются неинвариантные подмногообразия, для которых след сосредоточен на некоторых маломерных подмногообразиях.

2. Теорема о локализации

Как мы уже отмечали во введении, след G-оператора D на подмногообразии X в общем случае оказывается оператором, сосредоточенным на некотором подмножестве в X. Чтобы описать это множество, рассмотрим следующие два замкнутых подмножества в X.

1. Множество точек, орбита которых не выходит из X:

$$X_G = \{x \in X \mid Gx \subset X\}, \text{ где } Gx \text{ — орбита точки } x.$$

2. Множество точек, орбита которых касается X:

$$\tilde{X}_G = \{x \in X \mid T_x(Gx) \subset T_x X\}.$$

Очевидно, имеет место включение $X_G \subset \tilde{X}_G$.

Далее будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 2.1. Для любого замкнутого подмножества $Z \subset \tilde{X}_G \setminus X_G$ существует семейство открытых множеств $U_\varepsilon \subset X$, стягивающихся к Z при $\varepsilon \to 0$ и такое, что объём множества

$$G_\varepsilon = \{g \in G \mid gU_\varepsilon \cap X \neq \varnothing\}$$

в группе G стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Выполнение условия 2.1 несложно проверить в конкретных ситуациях (см. примеры ниже). Смысл этого условия простой: сдвиг окрестности U_ε на элемент $g \in G$ выходит полностью из подмногообразия X для почти всех g (грубо говоря, если орбита не содержится полностью в X, то она находится почти вся вне X).

Определение 2.1. Будем говорить, что оператор A *сосредоточен на множестве* $Y \subset X$, если композиция $A\varphi$ является компактным оператором для любой гладкой функции φ, равной нулю в некоторой окрестности множества Y.

Теорема 2.1 (о локализации). *След G-оператора D на подмногообразии X сосредоточен на подмножестве $X_G \subset X$. В частности, если множество X_G пусто, то след — компактный оператор.*

Доказательство. 1. Рассмотрим оператор

$$Di_* = \int_G D_g T_g i_* \, dg \tag{3}$$

(в этом выражении оператор сужения не участвует!). Утверждается, что этот оператор, а следовательно и след $i^* D i_*$, сосредоточен на подмножестве $\tilde{X}_G$.

Чтобы доказать это утверждение, возьмём произвольную точку $x_0 \in X \setminus \tilde{X}_G$ и покажем, что оператор (3) является компактным на множестве функций с носителем в некоторой окрестности точки x_0. Для этого мы разобьём интеграл (3) по группе на конечное число слагаемых по достаточно малым окрестностям и вынесем за знак интеграла оператор сдвига в некоторой точке окрестности. Это позволяет без ограничения общности перейти от оператора (3) к оператору,

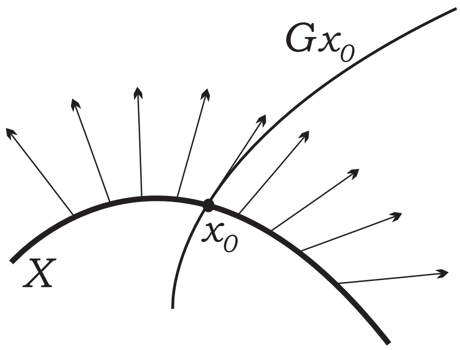

Рис. 1. Окрестность точки x_0, в которой орбита не касается подмногообразия X

определяемому интегралом по достаточно малой окрестности единицы группы. Далее окрестность единицы группы Ли G отождествим с окрестностью нуля в соответствующей алгебре Ли $\mathcal{G}$ и, следовательно, получим интеграл по окрестности U нуля в алгебре Ли. По условию $x_0 \in X \setminus \tilde{X}_G$, т. е. в точке x_0 орбита Gx_0 не касается подмногообразия X. Следовательно, существует вектор h в алгебре Ли, такой что соответствующее векторное поле на M не касается X в точке x_0, а также и в некоторой окрестности этой точки (по соображениям непрерывности) (рис. 1).

Тогда интеграл вида (3), но только по окрестности U, будем рассматривать как повторный — сначала вдоль вектора h, а затем по трансверсальным к h направлениям. Покажем, что интеграл вдоль направления h

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} D'_a T_{\exp(ah)} i_* \, da, \quad \text{где} \quad D'_a \equiv D_{\exp a} \quad \text{для краткости,} \tag{4}$$

представляет собой компактный оператор.

Лемма 2.1. *Оператор* (4) *непрерывно действует в пространствах*

$$H^s(X) \to H^{s-(d+(\nu-1)/2)}(X).$$

В частности, он является компактным как оператор порядка $d+\nu$.

Доказательство. Дело здесь в том, что интегрирование вдоль вектора h означает интегрирование по трансверсальному направлению к подмногообразию X, а при таком интегрировании, очевидно, пропадает *одна* дельта-функция, входящая в кограничный оператор, что и приводит к слагаемому $-1/2$ в приведённой выше формуле. Перейдём к подробному доказательству.

1. В окрестности точки x_0 введём в M координаты x, y, t, в которых подмногообразие X определяется уравнениями $y=0$, $t=0$, а действие элемента $\exp(ah)$ имеет вид $\exp(ah)(x,y,t)=(x,y,t+a)$. Оператор (4) обозначим для

краткости через A и выпишем его явно:

$$Au = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} D'_a u(x)\delta(y)\delta(t-a)\,da =$$
$$= \iiint e^{i(x\xi+y\eta+t\tau)}\left[\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-i\tau a}\sigma(D'_a)(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\,da\right]\tilde{u}(\xi)\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \quad (5)$$

Здесь ξ, η, τ — двойственные переменные к x, y, t, $\sigma(D'_a)$ — символ псевдодифференциального оператора D'_a, $\tilde{u}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $u(x)$

2. Пусть теперь $u \in H^s(X)$. Нам надо доказать, что $Au \in H^{s'}(M)$, где $s' = s - d - \nu/2 + 1/2$. В самом деле, интегрируя по частям выражение в квадратных скобках в (5), получаем для этого выражения оценку

$$\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-i\tau a}\sigma(D_a)(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\,da\right| \leqslant C(1+|\tau|)^{-1}(1+|\xi|+|\eta|+|\tau|)^d. \quad (6)$$

Здесь C — произвольная постоянная. Следовательно, получаем

$$\|Au\|^2_{s'} \leqslant C\iiint \tilde{u}(\xi)^2(1+|\tau|)^{-2}(1+|\xi|+|\eta|+|\tau|)^{2d+2s'}\,d\xi\,d\eta\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C\iint \tilde{u}(\xi)^2(1+|\tau|)^{-2}(1+|\xi|+|\tau|)^{2d+2s'+\nu-1}\,d\xi\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C\int \tilde{u}(\xi)^2(1+|\xi|)^{2s}\,d\xi = \|u\|^2_s. \quad (7)$$

Здесь первое неравенство следует из свойств преобразования Фурье, второе получается интегрированием по переменной η при помощи сферической замены переменной $\eta = (1+|\xi|+|\tau|)r\omega$, третье — при помощи замены переменной $1+|\tau| = |\xi|p$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (1+|\tau|)^{-2}(1+|\xi|+|\tau|)^{2d+2s'+\nu-1}\,d\tau =$$
$$= 2|\xi|^{-2+2d+2s'+\nu-1+1}\int\limits_{|\xi|^{-1}}^{\infty} p^{-2}(1+p)^{2d+2s'+\nu-1} =$$
$$= C|\xi|^{s-1}\times\begin{pmatrix} |\xi|, & \text{если } |\xi|>1 \\ |\xi|^{1-s}, & \text{если } |\xi|<1\end{pmatrix} \leqslant C(1+|\xi|)^{2s}. \quad (8)$$

Лемма доказана. □

2. Покажем теперь, что в действительности след i^*Di_* сосредоточен на подмножестве $X_G \subset \tilde{X}_G$. Для этого рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in C^\infty(X)$, которая тождественно равна нулю в окрестности множества X_G. Надо показать, что оператор

$$i^*Di_*\varphi\colon H^s(X) \to H^{s-d-\nu}(X)$$

является компактным. В самом деле, воспользуемся условием 2.1. В качестве множества Z возьмём множество $\tilde{X}_G \cap \operatorname{supp} \varphi$.

Рассмотрим разложение

$$i^* D i_* \varphi = \int_{G_\varepsilon} i^* D_g T_g i_* \varphi \, dg + \int_{G \setminus G_\varepsilon} i^* D_g T_g i_* \varphi \, dg. \tag{9}$$

Здесь первый интеграл мал по норме (так как $\operatorname{vol}(G_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$), а второй интеграл, с одной стороны (ввиду доказанного пункта 1), сосредоточен на множестве Z, а с другой стороны, на этом подмножестве является компактным из соображений локальности (в самом деле, если $x \in U_\varepsilon$ и $g \in G \setminus G_\varepsilon$, то $gx \in M \setminus X$, следовательно, оператор $i^* D_g T_g i_* \varphi$ компактен). При $\varepsilon \to 0$ из разложения (9) в виде суммы малого по норме оператора и компактного оператора получаем, что оператор в левой части равенства является компактным.

Теорема о локализации установлена. □

3. Примеры (геометрия)

Приведём примеры применения теоремы 2.1 о локализации для некоторых конкретных многообразий и действий групп.

Вращение прямой на плоскости. $M = \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}^1$, $G = \mathbb{S}^1$ — группа вращений вокруг начала координат. Здесь есть два случая в зависимости от того, проходит ли прямая X через начало координат. Если прямая проходит через начало координат, то следы операторов на подмногообразии сосредоточены в этой неподвижной точке $X_G = \tilde{X}_G = A$ (см. рис. 2, п. 1). Если же прямая не проходит через неподвижную точку, то следы операторов являются компактными.

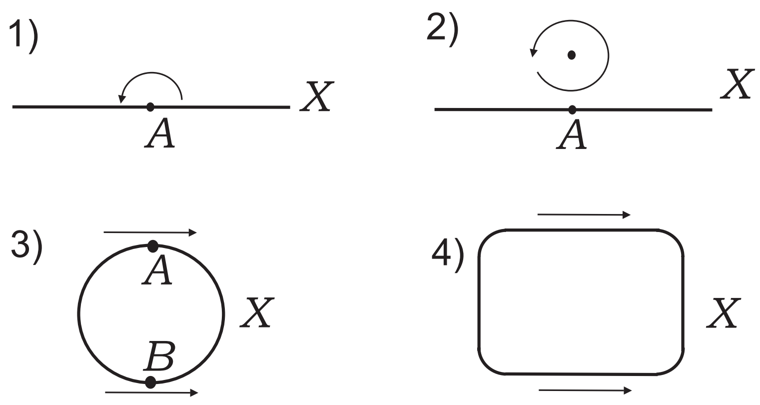

Рис. 2. Вращения и сдвиги плоскости

Более точно, на прямой имеется одна единственная точка $\tilde{X}_G = A$, орбита которой касается X, а неподвижных точек нет и $X_G = \varnothing$ (рис. 2, п. 2). При этом условие 2.1 выполнено (в качестве множества U_ε можно взять интервал длины ε с центром в точке A).

Сдвиги на плоскости. $M = \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{S}^1$, $G = \mathbb{R}$ — группа сдвигов (рис. 2, п. 3). Этот случай аналогичен второму случаю предыдущему пункта, а именно орбиты действия касаются X в точках A и B, а неподвижных точек нет: $\tilde{X}_G = A \cup B$, $X_G = \varnothing$. Поэтому следы операторов на подмногообразии X являются компактными операторами (условие 2.1 в этом случае выполнено). На рис. 2, п. 4 рассмотрен пример, для которого наше условие 2.1 не выполнено (в этом примере $X_G = \varnothing$, а множество $\tilde{X}_G$ состоит из горизонтальных интервалов).

Вращение прямой в пространстве. $M = \mathbb{R}^3$, $X = \mathbb{R}^1$, $G = \mathbb{S}^1$ — группа вращений вокруг оси OZ, а прямая X пересекается с осью вращения под углом α (рис. 3, п. 1). В этом случае след операторов сосредоточен в точке пересечения прямой с осью вращения за исключением случая, когда $\alpha = 0$ (более точно, при $\alpha \neq 0$ имеем $\tilde{X}_G = X_G = A$).

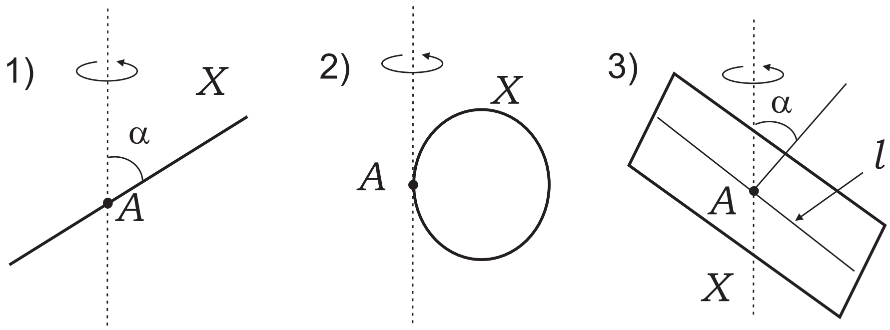

Рис. 3. Вращения в пространстве

Вращение окружности в пространстве. $M = \mathbb{R}^3$, $X = \mathbb{S}^1$, $G = \mathbb{S}^1$ — группа вращений вокруг оси OZ, а окружность X касается оси вращения (рис. 3, п. 2). В этом случае след оператора сосредоточен в точке касания. Этот вырожденный случай интересен тем, что в нём имеется оператор, сосредоточенный в точке, и возникает вопрос, какова природа этого оператора.

Вращение плоскости в пространстве. $M = \mathbb{R}^3$, $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{S}^1$ — группа вращений вокруг оси OZ, а нормаль к плоскости X и ось вращения составляют угол α (рис. 3, п. 3). В этом случае след операторов сосредоточен в точке пересечения плоскости с осью вращения (более точно, $\tilde{X}_G =$ прямая l, а $X_G = A$).

Вращения и сдвиги сферы в пространстве. $M = \mathbb{R}^3$, $X = \mathbb{S}^2$, $G = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ — группа вращений вокруг оси OZ и сдвигов вдоль этой оси, а

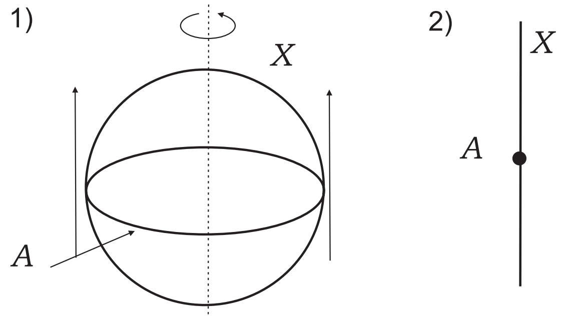

Рис. 4. Действия групп Ли 1) $G = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ и 2) SO(3) в пространстве

сфера X имеет центр в начале координат (рис. 4, п. 1). В этом случае след оператора является компактным оператором. В самом деле, орбиты касаются сферы в точках экватора $\tilde{X}_G = \mathbb{S}^1$, при этом ни одна орбита не содержится на сфере и $X_G = \varnothing$ (условие 2.1 в этом случае выполнено).

Всевозможные вращения прямой в пространстве. $M = \mathbb{R}^3$, $X = \mathbb{R}^1$, $G = \mathrm{SO}(3)$ — группа вращений вокруг начала координат, а прямая X проходит через начало координат. В этом случае след оператора сосредоточен в начале координат (рис. 4, п. 2).

4. Примеры (анализ)

В этом разделе приводятся примеры к теореме о локализации. В этих примерах мы также дополнительно исследуем природу операторов в окрестности множества, на котором операторы сосредоточены.

Пример 1. Пусть подмногообразие $X \subset M$ инвариантно относительно действия группы G, т. е. мы имеем в этом случае $X = X_G = \tilde{X}_G$. В этом случае след G-операторов на M согласно теореме 2.1 сосредоточен на всём многообразии X. Оказывается, что в этом (инвариантном) случае след является G-оператором на X, относительно сужения действия группы G на подмногообразие X и соответствующих операторов сдвига $T'_g \colon H^s(X) \to H^s(X)$, $T'_g u(x) = u(g^{-1}x)$. Более точно, справедливо следующее предложение.

Предложение 4.1. *След G-оператора D (см. (2)) на G-инвариантном подмногообразии X является G-оператором на X, т. е. имеет место равенство*

$$i^!(D) = \int_G D'_g T'_g \, dg, \tag{10}$$

где D'_g — *некоторое гладкое семейство псевдодифференциальных операторов на* X.

Доказательство. Вычислим след подынтегрального выражения. Имеем

$$i^!(D_gT_g)u(x) = i^*D_gT_g(u(x)\otimes\delta_X) = i^*D_g(T'_gu(x)\otimes\delta_X) = \\ = (i^*D_gi_*)\big(T'_gu(x)\big) = i^!(D_g)T'_gu(x)$$

(здесь мы воспользовались компактностью группы G и выбрали G-инвариантную δ-функцию подмногообразия X). Отсюда после интегрирования по группе G следует искомое равенство (10), где $D'_g = i^!(D_g)$ — псевдодифференциальный оператор на подмногообразии.

Предложение доказано. □

Разумеется, в общем случае подмногообразие не является G-инвариантным. Ниже мы рассмотрим следы в некоторых таких ситуациях.

Пример 2. Пусть $X\subset\mathbb{R}^3$ — плоскость

$$-x\sin\alpha + z\cos\alpha = 0.$$

В качестве базиса в плоскости выберем векторы $e_1 = (\cos\alpha, 0, \sin\alpha)$, $e_2 = (0,1,0)$. Вектор нормали равен $e_3 = (-\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$. Координаты в базисе e_1, e_2, e_3 обозначим через (u,v,w). Эти координаты связаны с координатами x, y, z правилом

$$(x,y,z) = (u\cos\alpha - w\sin\alpha, v, u\sin\alpha + w\cos\alpha). \tag{11}$$

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим оператор

$$D = \Delta^{-1}\int\limits_{\mathbb{S}^1} T_\varphi\,d\varphi, \tag{12}$$

где Δ — лапласиан, а T_φ — оператор сдвига, отвечающий группе вращений вокруг оси OZ:

$$(T_\varphi f)(x,y,z) = f(x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi, z).$$

Исследуем след

$$i^!(D) = i^*\Bigg(\Delta^{-1}\int\limits_{\mathbb{S}^1} T_\varphi\,d\varphi\Bigg)i_*\colon H^s(X)\to H^{s+1}(X), \quad s\in(-1,0), \tag{13}$$

оператора D на подмногообразии X.

Предложение 4.2. *След оператора* (12) *сосредоточен в точке* $(0,0,0)$ *пересечения плоскости* X *с осью вращения.*

Доказательство. В этом случае прямое вычисление показывает, что $\tilde{X}_{\mathbb{S}^1} = \{y=0,\ -x\sin\alpha + z\cos\alpha = 0\}$ — прямая, а $X_{\mathbb{S}^1} = \{(0,0,0)\}$ — точка. Поэтому по теореме 2.1 след сосредоточен в точке $(0,0,0)$. □

Итак, оператор сосредоточен в неподвижной точке действия группы. Исследуем его структуру, замораживая коэффициенты оператора в этой точке. Нам далее будет удобно работать с оператором нулевого порядка, умножая след на подходящую степень оператора Лапласа Δ_X на X, т. е. от оператора (12) мы перейдём к оператору

$$\Delta_X^{1/2} i^* \left(\Delta^{-1} \int_{\mathbb{S}^1} T_\varphi \, d\varphi\right) i_* \colon H^s(\mathbb{R}^2) \to H^s(\mathbb{R}^2). \tag{14}$$

Прямое вычисление показывает, что в двойственном относительно преобразования Фурье пространстве оператор (14) переходит в интегральный оператор

$$\begin{aligned} f(s,t) \mapsto (u^2+v^2)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} dw \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{u^2+v^2+w^2} \times \\ \times f\bigl(u(\cos^2\alpha\cos\varphi + \sin^2\alpha) + v\cos\alpha\sin\varphi + w\sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\varphi), \\ -u\cos\alpha\sin\varphi + v\cos\varphi + w\sin\alpha\sin\varphi\bigr) \colon \tilde{H}^s(\mathbb{R}^2_{s,t}) \to \tilde{H}^s(\mathbb{R}^2_{u,v}). \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь мы воспользовались тем, что при переходе от физического пространства к двойственному относительно преобразования Фурье пространству

— кограничный оператор i_* переходит в оператор

$$\pi^* f(x,y,z) = f(x\cos\alpha + z\sin\alpha, y),$$

где $\pi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ — проекция;

— оператор поворота T_φ переходит в оператор поворота:

$$\tilde{T}_\varphi f(x,y,z) = f(x\cos\varphi + y\sin\varphi, -x\sin\varphi + y\cos\varphi, z);$$

— оператор сужения i^* переходит в оператор интегрирования по переменной w:

$$\pi_* f(u,v) = \int_{\mathbb{R}} f(u\cos\alpha - w\sin\alpha, v, u\sin\alpha + w\cos\alpha)\, dw$$

(здесь мы также используем замену переменных (11));

— композиция соответствующих операторов в двойственном пространстве даёт как раз выражение (15);

— пространство $\tilde{H}^s(\mathbb{R}^2_{u,v})$ является пополнением гладких финитных функций относительно нормы, определяемой равенством

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |f(u,v)|^2 (1+u^2+v^2)^s \, du\, dv.$$

Ниже будем использовать полярные координаты на плоскости X:

$$s = \rho\cos\psi, \ t = \rho\sin\psi \quad \text{и} \quad u = r\cos\omega, \ v = r\sin\omega.$$

В интеграле (15) сделаем замену переменных интегрирования $(w,\varphi)\mapsto(\rho,\psi)$:

$$\begin{aligned}&u(\cos^2\alpha\cos\varphi+\sin^2\alpha)+v\cos\alpha\sin\varphi+w\sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\varphi)=\rho\cos\psi,\\&-u\cos\alpha\sin\varphi+v\cos\varphi+w\sin\alpha\sin\varphi=\rho\sin\psi.\end{aligned}\tag{16}$$

Оказывается, эта замена является взаимно-однозначной. Обратная замена имеет вид (громоздкие вычисления мы опускаем)

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\rho\cos\psi-u}{(v+\rho\sin\psi)\cos\alpha},\\&w=u\operatorname{ctg}\alpha-\frac{v\operatorname{ctg}\varphi}{\sin\alpha}+\frac{\rho\sin\psi}{\sin\alpha\sin\varphi}=\\&\quad=\frac{u^2(1-2\cos^2\alpha)-2\rho u\cos\psi\sin^2\alpha+\rho^2(\cos^2\psi+\sin^2\psi\cos^2\alpha)-v^2\cos^2\alpha}{2(\rho\cos\psi-u)\cos\alpha\sin\alpha}=\\&\quad=\frac{\sin^2\alpha(\rho\cos\psi-u)^2+\cos^2\alpha(\rho^2-r^2)}{2(\rho\cos\psi-u)\cos\alpha\sin\alpha}.\end{aligned}\tag{17}$$

Опишем геометрический смысл этой замены переменных. В (s,t)-плоскости имеется эллипс (заданный параметрически с параметром φ):

$$s=u(\cos^2\alpha\cos\varphi+\sin^2\alpha)+v\cos\alpha\sin\varphi,\quad t=-u\cos\alpha\sin\varphi+v\cos\varphi.$$

При возрастании φ эллипс проходится по часовой стрелке, начиная с точки (u,v) (рис. 5). Для любой точки эллипса (т. е. при фиксированном φ) уравнения (16) определяют прямую в (s,t)-плоскости, проходящую через эту точку, с параметром w вдоль прямой (прямая вырождается в точку при $\varphi=0$). Прямое вычисление показывает, что эта прямая проходит через указанную точку эллипса и фиксированную точку с координатами $(u,-v)$.

Ясно, что отображение $(w,\varphi)\mapsto(\rho,\omega)$ является диффеоморфизмом кроме точек, которые попадают на вертикальную прямую, проходящую через отмеченную точку $(u,-v)$ эллипса.

Производя замену (16), переписываем произведение дифференциалов в интеграле (15) в новых координатах

$$d\varphi\,dw=\frac{\rho\,d\rho\,d\psi}{\cos\alpha\sin\alpha\big((1-\cos\varphi)(w\sin\alpha-u\cos\alpha)+v\sin\varphi\big)}=\frac{\rho\,d\rho\,d\psi}{\sin\alpha(\rho\cos\psi-u)}.\tag{18}$$

Подставляя (16) и (18) в интеграл, определяющий оператор (15), переписываем этот интегральный оператор в виде

$$\begin{aligned}f(s,t)\mapsto r\int_0^\infty d\rho\int_0^{2\pi}\frac{\rho\,d\psi}{(r^2+w^2)\sin\alpha|\rho\cos\psi-u|}f(\rho\cos\psi,\rho\sin\psi)=\\=\int_0^\infty K\left(\frac{\rho}{r}\right)f(\rho)\frac{d\rho}{\rho},\end{aligned}\tag{19}$$

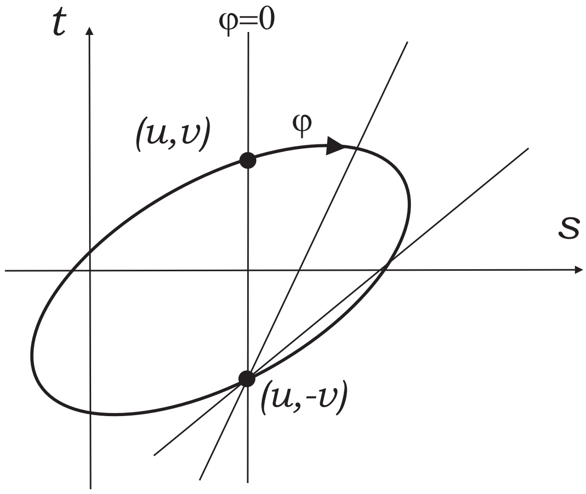

Рис. 5. Замена переменных $(w,\varphi)\mapsto(\rho,\omega)$

где $K(\rho)$ — семейство интегральных операторов на окружности, равное

$$(K(\rho)f)(\omega)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{(1+w^2)\sin\alpha|\rho\cos\psi-\cos\omega|}f(\psi)d\psi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\frac{4\sin\alpha\cos^2\alpha\rho^2|\rho\cos\psi-\cos\omega|}{4\cos^2\alpha\sin^2\alpha(\rho\cos\psi-\cos\omega)^2+\left(\sin^2\alpha(\rho\cos\psi-\cos\omega)^2+\cos^2\alpha(\rho^2-1)\right)^2}\times$$
$$\times f(\psi)d\psi. \tag{20}$$

Так как операторная функция $K(\rho/r)$ в (19) является однородной степени нуль по паре аргументов, то оператор (19) является не чем иным, как свёрткой Меллина по переменной r. Поэтому он алгебраизуется преобразованием Меллина $\mathcal{M}_{\rho\to p}$. Здесь под алгебраизацией понимается то, что оператор после преобразования Меллина превращается в оператор умножения на функцию

$$\hat{K}(p)=\mathcal{M}_{\rho\to p}K(\rho)=\int\limits_0^{\infty}\rho^pK(\rho)\frac{d\rho}{\rho}. \tag{21}$$

Свойства этой оператор-функции описываются в следующих двух леммах.

Лемма 4.1. *Оператор-функция $K(\rho)$ принимает значения в интегральных операторах с гладким ядром при всех $\rho>0$ и $\rho\neq1$, а для её операторной нормы в пространстве $L^2(\mathbb{S}^1)$ справедливы соотношения*

$$
\|K(\rho)\| = \begin{cases} O(\rho^2) & \text{при } \rho < 1/2, \\ O(|\rho-1|^{-1/2}) & \text{при } 1/2 < \rho < 2, \\ O(\rho^{-3}) & \text{при } \rho > 2. \end{cases} \tag{22}
$$

Доказательство. 1. Особенности ядра Шварца оператора (20) отвечают нулям знаменателя. Так как знаменатель представляет собой сумму квадратов, то нули знаменателя определяются условиями

$$
\rho\cos\psi - \cos\omega = 0, \quad \rho^2 - 1 = 0,
$$

которые эквивалентны условиям $\rho = 1$, $\psi = \pm\omega$. Отсюда следует, что при $\rho \neq 1$ знаменатель нулей не имеет и, следовательно, ядро Шварца является гладким. Первое утверждение леммы доказано.

2. Оценки интегрального ядра и нормы оператора при $\rho \to \infty$ и $\rho \to 0$ устанавливаются непосредственно. А именно, при $\rho \to \infty$ числитель в (20) имеет вид $O(\rho^3)$, а знаменатель оценивается снизу как $\geqslant C\rho^4$, что даёт требуемую оценку. Наконец, при $\rho \to 0$ числитель оценивается как $O(\rho^2)$, а знаменатель отделён от нуля, что также даёт требуемую оценку.

3. Осталось оценить норму оператора $K(\rho)$ при $\rho \to 1$. Итак, пусть значение ρ близко к единице, но не равно ей. Чтобы оценить норму интегрального оператора $K(\rho)$, воспользуемся леммой Шура (см., например, [8]) и оценим интегралы

$$
\int_{\mathbb{S}^1} |K(\rho,\omega,\psi)|\,d\omega, \quad \int_{\mathbb{S}^1} |K(\rho,\omega,\psi)|\,d\psi
$$

ядра $K(\rho,\omega,\psi)$ равномерно по переменным ω, ψ. Оценим первый из интегралов (второй оценивается аналогично). Имеем

$$
\int_{\mathbb{S}^1} |K(\rho,\omega,\psi)|\,d\omega \leqslant C \int_{\psi-\varepsilon}^{\psi+\varepsilon} \frac{|\rho\cos\psi - \cos\omega|\,d\omega}{(\rho\cos\psi-\cos\omega)^2 + \bigl(\operatorname{tg}^2\alpha(\rho\cos\psi-\cos\omega)^2 + (\rho^2-1)\bigr)^2} \leqslant
$$

$$
\leqslant C \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{|(\rho-1)\cos\psi - t|\,dt}{\bigl[((\rho-1)\cos\psi-t)^2 + \bigl(\operatorname{tg}^2\alpha((\rho-1)\cos\psi-t)^2+(\rho^2-1)\bigr)^2\bigr]\sqrt{|\sin^2\psi - 2t\cos\psi - t^2|}} \tag{23}
$$

(для некоторых чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geqslant 0$, равномерно ограниченных по ψ и ρ). В первом неравенстве в (23) мы свели наш интеграл к интегралу по малой окрестности точки ψ, так как подынтегральное выражение равномерно ограниченное при $|\omega \pm \psi| > \varepsilon$ и является чётной функцией. Затем во втором неравенстве мы сделали в интеграле замену переменной $\omega \mapsto t$:

$$
\cos\omega = \cos\psi + t, \quad d\omega = \frac{\pm dt}{\sqrt{|\sin^2\psi - 2t\cos\psi - t^2|}}.
$$

Далее в последнем интеграле в (23) сделаем замену переменной $t = |\rho-1|\tau$, в результате чего получим

$$\int\limits_{\mathbb{S}^1} |K(\rho,\omega,\psi)|\,d\omega \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{-\varepsilon_1|\rho-1|^{-1}}^{\varepsilon_2|\rho-1|^{-1}} \frac{|\cos\psi \mp \tau|}{\left[(\cos\psi\mp\tau)^2 + \left(\operatorname{tg}^2\alpha(\rho-1)(\cos\psi\mp\tau)^2 + (\rho+1)\right)^2\right]} \times$$

$$\times \frac{d\tau}{\sqrt{|\sin^2\psi - 2\tau|\rho-1|\cos\psi - \tau^2|\rho-1|^2|}} \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{-\varepsilon_1|\rho-1|^{-1}}^{\varepsilon_2|\rho-1|^{-1}} \frac{d\tau}{(|\tau|+1)\sqrt{|(|\rho-1|\tau+\cos\psi+1)(|\rho-1|\tau+\cos\psi-1)|}}. \tag{24}$$

Второе неравенство здесь следует из того, что числитель имеет вид $O(|\tau|+1)$, а выражение в квадратных скобках в знаменателе отлично от нуля всюду и не меньше τ^2 на бесконечности. Последний интеграл в (24) при $|\cos\psi\pm 1| > \varepsilon_1, \varepsilon_2$ допускает оценку

$$\leqslant C \int\limits_{-\varepsilon_1|\rho-1|^{-1}}^{\varepsilon_2|\rho-1|^{-1}} \frac{d\tau}{|\tau|+1} \leqslant C\ln|\rho-1|^{-1}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда одна из величин $\cos\psi\pm1$ мала. Для определённости рассмотрим случай, когда ψ близко к нулю (случай, когда значение ψ близко к π, рассматривается аналогично). Тогда имеем следующую оценку интеграла (24):

$$\leqslant C \int\limits_{-\varepsilon_1|\rho-1|^{-1}}^{\varepsilon_2|\rho-1|^{-1}} \frac{d\tau}{(|\tau|+1)\sqrt{|\,|\rho-1|\tau+\cos\psi-1|}} =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{|\rho-1|}} \int\limits_{-\varepsilon_1|\rho-1|^{-1}}^{\varepsilon_2|\rho-1|^{-1}} \frac{d\tau}{(|\tau|+1)\sqrt{|\tau+(\cos\psi-1)/|\rho-1||}} \leqslant \frac{C}{\sqrt{|\rho-1|}}. \tag{25}$$

Итак, мы получили оценку

$$\int\limits_{\mathbb{S}^1} |K(\rho,\omega,\psi)|\,d\omega = O(|\rho-1|^{-1/2}) \quad \text{при} \quad \rho\to 1.$$

Аналогично получается соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{S}^1} |K(\rho,\omega,\psi)|\,d\psi = O(|\rho-1|^{-1/2}).$$

Из этих оценок по лемме Шура [8] получаем искомую оценку нормы интегрального оператора:

$$\|K(\rho)\| = O(|\rho - 1|^{-1/2}).$$

Лемма доказана. □

Лемма 4.2. *Оператор-функция* $\hat{K}(p)$ (см. (22)) *обладает следующими свойствами*:

1) *она голоморфна при всех* p, *лежащих в вертикальной полосе*

$$\{-2 < \operatorname{Re} p < 1\} \subset \mathbb{C};$$

2) *она принимает значения в интегральных операторах на* $\mathbb{S}^1$ *с гладким ядром*;
3) *при* $\operatorname{Im} p \to \infty$ *в указанной полосе* $\|\hat{K}(p)\| \to 0$.

Доказательство. В самом деле, при всех p из указанной полосы интеграл (21) сходится, так как абсолютно сходится интеграл от норм

$$\int_0^\infty |\rho^{p-1}| \cdot \|K(\rho)\| \, d\rho$$

ввиду оценок (22). Остальные утверждения леммы следуют из известных свойств преобразования Меллина. □

Теперь мы готовы описать структуру следа (13). А именно, мы показали, что этот след сосредоточен в неподвижной точке и после применения преобразования Фурье и преобразования Меллина по радиальной переменной в двойственном пространстве след переходит в оператор умножения на функцию $\hat{K}(p)$. Собирая вместе эти преобразования, мы получаем представление следа (13) как следующего оператора

$$\Delta_X^{-1/2} \chi \mathcal{F}^{-1}_{p\to\rho} \chi' \mathcal{M}^{-1}_{p\to\rho} \hat{K}(p) \mathcal{M}_{\rho\to p} \chi' \mathcal{F} \chi \colon H^s(X) \to H^{s+1}(X). \tag{26}$$

Здесь $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье, $\mathcal{M}_{r\to p}$ — преобразование Меллина по радиальной переменной в двойственном пространстве, а срезающие функции χ, χ' используются, чтобы получить ограниченный оператор в указанных пространствах. Более точно, χ — функция на X, равная нулю вне малой окрестности нуля и тождественно равная единице в некоторой окрестности нуля, а χ' — функция в двойственном пространстве, тождественно равная единице на бесконечности и нулю в окрестности нуля. След (13) и оператор (26) совпадают с точностью до компактных слагаемых в силу принципа локальности.

Пример 3. В произведении $\mathbb{R}^2_{x,z} \times \mathbb{S}^1_y$ рассмотрим действие группы $\mathbb{S}^1_\varphi$:

$$g_\varphi(x, y, z) = (x\cos\varphi + z\sin\varphi,\ y + \varphi,\ -x\sin\varphi + z\cos\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{S}^1$$

(действие состоит из винтовых движений — сдвигов вдоль y на величину φ и вращений в плоскости XOZ на угол φ).

Исследуем след G-оператора

$$D = \Delta^{-1}\int\limits_{\mathbb{S}^1} T_\varphi d\varphi, \quad \text{где} \quad T_\varphi u(x,y,z) = u\big(g_\varphi^{-1}(x,y,z)\big)$$

на подмногообразии X — горизонтальной плоскости $X = \{z = 0\}$.

По теореме о локализации след

$$i^!(D) = i^*\left(\Delta^{-1}\int\limits_{\mathbb{S}^1} T_\varphi\, d\varphi\right) i_*\colon H^s(X) \to H^{s+1}(X), \quad s \in (-1, 0), \tag{27}$$

сосредоточен на подмногообразии $X_{\mathbb{S}^1} = \{x = z = 0\} \subset X$ — оси OY, вокруг которой производится вращение.

Далее пространство $H^s(X)$ будем рассматривать как пространство сечений бесконечномерного расслоения над $X_{\mathbb{S}^1}$ со слоем $H^s(\mathbb{R})$ и будем его обозначать через $\mathcal{H}^s(X_{\mathbb{S}^1})$.

Оператор сдвига представим в виде композиции

$$T_\varphi = T'_\varphi T''_\varphi$$

сдвига T'_φ вдоль $X_{\mathbb{S}^1}$ и поворота T''_φ в плоскости XOZ.

Структура следа (27) описывается следующим предложением.

Предложение 4.3. *След* (27) *с точностью до компактных слагаемых является G-оператором с операторнозначным символом на многообразии $X_{\mathbb{S}^1}$. Более точно, след записывается в виде*

$$i^!(D) = \int\limits_{\mathbb{S}^1} \big(i^*\Delta^{-1}T''_\varphi i_*\big)\, T'_\varphi d\varphi\colon \mathcal{H}^s(X_{\mathbb{S}^1}) \to \mathcal{H}^{s+1}(X_{\mathbb{S}^1}), \tag{28}$$

где оператор в скобках представляет собой семейство псевдодифференциальных операторов на $X_{\mathbb{S}^1}$ с операторнозначным символом, причём операторы семейства непрерывно зависят от параметра φ по операторной норме при $\varphi \neq 0, \pi$ и нормы операторов и их символов равномерно ограничены при всех φ.

Замечание 4.1. Псевдодифференциальные операторы с операторнозначными символами ненулевого порядка были введены в [9].

Замечание 4.2. Семейство операторов $i^*\Delta^{-1}T''_\varphi i_*$ не является непрерывным по норме при $\varphi = 0$ и π. Это легко увидеть из того, что при всех малых $\varphi \neq 0$ соответствующий оператор сосредоточен на подмногообразии $X_{\mathbb{S}^1} \subset X$, а при $\varphi = 0$ он является псевдодифференциальным оператором и сосредоточен на всём X. Аналогичное рассуждение показывает, что предела по норме не существует при $\varphi \to \pi$.

Доказательство. Справедливость формулы (28) устанавливается прямым вычислением. Покажем, что оператор в круглых скобках в (28) является псевдодифференциальным оператором с операторнозначным символом на $X_{\mathbb{S}^1}$. В самом деле, записывая рассматриваемый оператор в виде $T''_\varphi i^*_\varphi \Delta^{-1} i_*$, где

$i_\varphi\colon g_\varphi X \to \mathbb{R}^2\times\mathbb{S}^1$ — вложение сдвига подмногообразия X на элемент g_φ, можно показать, что этот оператор является псевдодифференциальным оператором, так как сомножитель T''_φ тождественный по базе $X_{\mathbb{S}^1}$, а оператор $i^*_\varphi\Delta^{-1}i_*$ — транслятор и, как показано в [6], псевдодифференциальный оператор.

Ограниченность норм операторов следует из построения. Чтобы установить непрерывность по операторной норме семейства операторов $i^*\Delta^{-1}T''_\varphi i_*$, а также равномерную ограниченность символов, вычислим символ (как оператор в двойственном относительно преобразования Фурье пространстве с координатами ξ, η). Этот оператор имеет вид

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{u(\xi\cos\varphi-\zeta\sin\varphi,\eta)\,d\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} &= \\ = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{u(z,\eta)\,dz}{|\sin\varphi|\bigl(\xi^2+\eta^2+\bigl((\xi\cos\varphi-z)/(\sin\varphi)\bigr)^2\bigr)} &= \\ = |\sin\varphi| \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{u(z,\eta)\,dz}{\xi^2-2\xi z\cos\varphi+z^2+\eta^2\sin^2\varphi}&. \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь мы сделали замену переменной $z=\xi\cos\varphi-\zeta\sin\varphi$ в интеграле. Указанный символ обозначим через $A_\varphi(\eta)$. Он гладко зависит от переменной η и является *скрученно однородным* (см., например, [9]) по этой переменной:

$$A_\varphi(\lambda\eta)=\lambda^{-1}\varkappa_\lambda^{-1}A_\varphi(\eta)\varkappa_\lambda,$$

где $\varkappa_\lambda f(z)=f(\lambda z)$ — действие группы растяжений.

Осталось показать, что символ остаётся ограниченным при $\varphi\to 0$. В силу скрученной однородности и унитарности группы $\varkappa_\lambda$ достаточно положить $\eta=1$. Имеем

$$A_\varphi(1)u=|\sin\varphi|\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{u(z)\,dz}{(\xi-z\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi\langle z\rangle^2}.$$

Здесь и ниже используется обозначение $\langle x\rangle=(1+x^2)^{1/2}$.

Коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}_z,\langle z\rangle^{2s}) & \xrightarrow{A_\varphi(1)} & L^2\bigl(\mathbb{R}_z,\langle z\rangle^{2(s+1)}\bigr) \\ {\scriptstyle\langle z\rangle^s}\big\downarrow & & {\scriptstyle\langle z\rangle^{s+1}}\big\downarrow \\ L^2(\mathbb{R}_z) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}_z) \end{array} \tag{30}$$

показывает, что норма оператора $A_\varphi(1)$ равна L^2-норме оператора $\langle\xi\rangle^s A_\varphi\langle z^{-s}\rangle$. Итак, необходимо оценить норму интегрального оператора в пространстве $L^2(\mathbb{R})$:

$$u(z)\longmapsto\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\langle\xi\rangle^{s+1}|\sin\varphi|\langle z\rangle^{-s}u(z)\,dz}{(\xi-z\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi\langle z\rangle^2}.$$

Ядро этого оператора обозначим через $K(\xi,z)$. Для оценки нормы интегрального оператора воспользуемся леммой Шура, согласно которой достаточно установить равномерную ограниченность интегралов

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |K(\xi,z)|\,dz, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} |K(\xi,z)|\,d\xi. \tag{31}$$

Оценим первый интеграл (второй оценивается аналогично).

Имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}} |K(\xi,z)|\,dz &= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\langle\xi\rangle^{s+1}|\sin\varphi|\langle z\rangle^{-s}\,dz}{(z-\xi\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi\langle\xi\rangle^2} = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2+1}\langle\xi\rangle^s(\langle\xi\cos\varphi+|\sin\varphi|\langle\xi\rangle t\rangle)^{-s} = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2+1}\left(\frac{1}{\langle\xi\rangle}+\left(\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}\cos\varphi+|\sin\varphi|t\right)^2\right)^{-s/2} \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2+1}(1+(1+|t|)^2)^{-s/2} < \infty. \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь во втором равенстве мы сделали замену переменной $z = \xi\cos\varphi + {}$ $+ |\sin\varphi|\langle\xi\rangle t$ в интеграле; первое неравенство справедливо, поскольку функция x^{-s} возрастает при $s<0$; последний интеграл сходится, так как $2+s<1$.

Оценка нормы второго интеграла в (31) проводится аналогично.

Итак, по лемме Шура норма символа является равномерно ограниченной. Непрерывность по операторной норме следует из того, что символ, как нетрудно убедиться, дифференцируем по параметру φ при $\sin\varphi\neq 0$. Поэтому соответствующий оператор непрерывно зависит от параметра по операторной норме. $\square$

Работа была частично поддержана РФФИ (проекты 15-01-08392 и 16-01-00373), Немецким научно-исследовательским обществом, а также Министерством образования и науки Российской Федерации (соглашение 02.a03.21.0008). Мы благодарны рецензенту за замечания по предварительной версии работы.

Литература

[1] Лощёнова Д. А. Задачи Соболева, ассоциированные с действиями групп Ли // Дифференц. уравн. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 1056—1069.

[2] Новиков С. П., Стернин Б. Ю. Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и K-теория // ДАН СССР. — 1966. — Т. 170, № 6. — С. 1265—1268.

[3] Новиков С. П., Стернин Б. Ю. Эллиптические операторы и подмногообразия // ДАН СССР. — 1966. — Т. 171, № 3. — С. 525—528.

[4] Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Нелокальные эллиптические операторы для компактных групп Ли // Докл. РАН. — 2010. — Т. 431, № 4. — С. 457—460.

[5] Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. О нелокальных задачах Соболева // Докл. РАН. — 2013. — Т. 451, № 3. — С. 259—263.

[6] Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Эллиптические трансляторы на многообразиях с многомерными особенностями // Дифференц. уравн. — 2013. — Т. 49, № 4. — С. 513—527.

[7] Стернин Б. Ю. Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Тр. ММО. — 1966. — Т. 15. — С. 346—382.

[8] Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. — М.: Наука, 1985.

[9] Nazaikinskii V., Savin A., Schulze B.-W., and Sternin B. Elliptic Theory on Singular Manifolds. — Boca Raton: CRC Press, 2005.

[10] Savin A. Yu. On the index of nonlocal elliptic operators for compact Lie groups // Central Eur. J. Math. — 2011. — Vol. 9, no. 4. — P. 833—850.

[11] Sternin B. Yu. On a class of nonlocal elliptic operators for compact Lie groups // Uniformization and finiteness theorem // Central Eur. J. Math. — 2011. — Vol. 9, no. 4. — P. 814—832.