Два примера, связанные со скрученной теорией Бернсайда—Фробениуса для бесконечно порождённых групп*

Е. В. ТРОИЦКИЙ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: troitsky@mech.math.msu.su

УДК 512.547.4+517.986.66

Ключевые слова: число Райдемайстера, R_∞-группа, класс скрученной сопряжённости, теорема Бернсайда—Фробениуса, конечно аппроксимируемая группа, рациональное (конечное) представление.

Аннотация

Гипотеза СТБФ$_f$, которая является модификацией гипотезы Фельштына и Хилла, заключается в том, что если число Райдемайстера $R(\phi)$ автоморфизма ϕ (счётной дискретной) группы G конечно, то оно совпадает с числом неподвижных точек соответствующего гомеоморфизма $\hat{\phi}$ пространства $\hat{G}_f$ (части унитарного двойственного пространства, образованной конечномерными представлениями). В последнее время активно велось изучение этой проблемы для конечно аппроксимируемых групп. В настоящей работе мы доказываем, что для бесконечно порождённых конечно аппроксимируемых групп имеются положительные и отрицательные примеры для этой гипотезы. Установлено, что свойства конечности числа неподвижных точек самого ϕ также отличаются от конечно порождённого случая.

Abstract

E. V. Troitsky, Two examples related to the twisted Burnside–Frobenius theory for infinitely generated groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 5, pp. 219—227.

The TBFT$_f$ conjecture, which is a modification of a conjecture by Fel'shtyn and Hill, says that if the Reidemeister number $R(\phi)$ of an automorphism ϕ of a (countable discrete) group G is finite, then it coincides with the number of fixed points of the corresponding homeomorphism $\hat{\phi}$ of $\hat{G}_f$ (the part of the unitary dual formed by finite-dimensional representations). The study of this problem for residually finite groups has been the subject of some recent activity. We prove here that for infinitely generated residually finite groups there are positive and negative examples for this conjecture. It is detected that the finiteness properties of the number of fixed points of ϕ itself also differ from the finitely generated case.

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10018).

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 5, с. 219—227.

Введение

Пусть G — (счётная дискретная) группа, а ϕ — её автоморфизм. *Числом Райдемайстера* $R(\phi)$ называется число его *классов Райдемайстера*, или *классов скрученной сопряжённости*, т. е. классов отношения эквивалентности относительно скрученной сопряжённости: $g \sim hg\phi(h^{-1})$, $h, g \in G$. Обозначим класс Райдемайстера g через $\{g\}_\phi$.

Следующие две взаимосвязанные проблемы лежат в русле основных исследований по числам Райдемайстера.

Первая проблема является исследованием следующей гипотезы А. Фельштына и Р. Хилла [14]: $R(\phi)$ равно числу неподвижных точек индуцированного гомеоморфизма $\hat{\phi}$ унитарного двойственного пространства $\hat{G}$ (множества классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений G), если одно из этих чисел конечно. Действие $\hat{\phi}$ на классе представления ρ задаётся как $[\rho] \mapsto [\rho \circ \phi]$. Эта гипотеза называется СТБФ (скрученная теорема (теория) Бернсайда—Фробениуса). Действительно, она обобщает на случай бесконечных групп и скрученных классов классическую теорему Бернсайда—Фробениуса: число классов сопряжённости конечной группы совпадает с числом классов эквивалентности её неприводимых представлений.

Позже А. Фельштыном и соавторами была сформулирована вторая проблема (см. также исторический обзор в [15]) — описать класс групп, обладающих свойством R_∞. Группа имеет свойство R_∞, если $R(\phi) = \infty$ для любого автоморфизма $\phi \colon G \to G$. Очевидно, что вторая проблема является в некотором смысле дополнительной к первой: вопрос о СТБФ не имеет смысла для R_∞-групп (формально имея положительный ответ).

Гипотеза СТБФ была доказана для конечных, абелевых и почти абелевых групп [14, 18]. После этого в [22] был найден контрпример к ней в общей ситуации. Этот контрпример привел к следующей новой версии гипотезы, которую мы называем СТБФ$_f$: если $R(\phi) < \infty$, то это число равно числу неподвижных точек отображения $\hat{\phi}$ на подпространстве $\hat{G}_f \subset \hat{G}$, образованном конечномерными представлениями. В [21] мы доказываем, что только конечные представления (т. е. факторизующиеся через конечную группу) могут служить неподвижными точками $\hat{\phi}$, если $R(\phi) < \infty$. В [19] гипотеза СТБФ$_f$ была доказана для почти-полициклических групп. Там же некоторые контрпримеры были найдены среди бесконечных групп с конечным числом классов обычной сопряжённости. В [20] были сделаны некоторые шаги в направлении случая общих конечно порождённых конечно аппроксимируемых групп. В [16] были рассмотрены некоторые связи СТБФ$_f$ со свойствами скрученного внутреннего представления. В [2] был развит более общий подход к свойствам, похожим на СТБФ.

Свойство R_∞ было установлено или опровергнуто для многих групп. Поскольку его изучение не является основной задачей настоящей работы, мы ограничимся ссылками на несколько работ и обзор литературы в них: [1, 3—8, 10—13, 15, 17, 23—26, 29—34]. В некоторых ситуациях свойство R_∞

имеет прямые топологические следствия (см., например, [25]). Основы теории применения чисел Райдемайстера в динамике можно найти в [9,28].

В разделе 1 формулируются необходимые факты о числах Райдемайстера. Там же мы немного обобщаем эти факты.

Конечно порождённая свободная группа F_n $(n \geqslant 2)$ обладает свойством R_∞ (в частности, потому, что она является гиперболической группой [3,30]). Бесконечно порождённая свободная группа F_∞ имеет автоморфизмы с $R(\phi) < \infty$ [6]. В разделе 2 мы доказываем, что для этого примера СТБФ$_f$ верна. Также мы показываем, что при этом число неподвижных точек самого ϕ является тем не менее бесконечным, в отличие от случая конечно порождённых групп [16].

В разделе 3 мы строим примеры бесконечно порождённых конечно аппроксимируемых групп, для которых гипотеза СТБФ$_f$ не верна.

Настоящее исследование было инициировано совместной работой с Александром Фельштыном в Институте математики Макса Планка (Бонн).

Автор благодарен В. Мануйлову и А. Фельштыну за полезные обсуждения.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10018).

1. Предварительные рассмотрения

Хорошо известно следующее несложное утверждение.

Предложение 1.1. *Пусть H — ϕ-инвариантная нормальная подгруппа G, а $\bar\phi\colon G/H \to G/H$ — индуцированный автоморфизм. Тогда классы Райдемайстера ϕ отображаются на классы Райдемайстера $\bar\phi$. В частности, $R(\bar\phi) \leqslant R(\phi)$.*

Ключевым наблюдением в работе [19] является следующее.

Предложение 1.2. *Гипотеза* СТБФ$_f$ *верна для индивидуального автоморфизма ϕ, если и только если функции на G вида*

$$f_\rho(g) = \operatorname{Trace}\big(\Phi_\rho \circ \rho(g)\big),$$

где ρ пробегает неподвижные точки $\hat\phi$, а Φ_ρ — сплетающий оператор между ρ и $\rho \circ \phi$, определённый однозначно с точностью до масштабирования, образуют базис пространства функций, постоянных на классах Райдемайстера (*т. е. скрученных класс-функций*).

Следующее утверждение немного усиливает (для случая бесконечно порождённых групп) некоторые результаты работ [16, 19].

Предложение 1.3. *Следующие свойства автоморфизма $\phi\colon G \to G$ с $R(\phi) < \infty$ эквивалентны*:

1) СТБФ$_f$ *выполняется для индивидуального ϕ;*
2) *подгруппа, стабилизирующая класс Райдемайстера при левых сдвигах, имеет конечный индекс в G для любого класса.*

Доказательство. Прежде всего, второе свойство, очевидно, эквивалентно следующему: левые сдвиги скрученных класс-функций образуют конечномерное подпространство $V \subset \ell^\infty(G)$.

Из СТБФ$_f$ следует, что некоторые матричные коэффициенты представлений, неподвижных при $\hat{\phi}$, образуют базис в пространстве скрученных класс-функций (по предложению 1.2). Все левые сдвиги этих функций порождают указанное пространство V. С другой стороны, это пространство является пространством всех матричных коэффициентов, отвечающих конечному набору неприводимых представлений (набору всех представлений, неподвижных при $\hat{\phi}$). Значит, V является конечномерным и 2) выполнено.

Обратно, предположим, что 2) выполнено. В частности, пересечение всех стабилизирующих подгрупп является подгруппой $H \subset G$ конечного индекса. Таким образом, $x \in H$ тогда и только тогда, когда для любых $g, z \in G$ найдётся такой элемент $h_{g,z} \in G$, что $xgz\phi(g^{-1}) = h_{g,z}z\phi((h_{g,z})^{-1})$. Тогда для любого $y \in G$ имеем

$$yxy^{-1}gz\phi(g^{-1}) = \\ = y\big(xy^{-1}gz\phi(g^{-1})\phi(y)\big)\phi(y^{-1}) = y\big(h_{y^{-1}g,z}z\phi((h_{y^{-1}g,z})^{-1})\big)\phi(y^{-1}).$$

Значит, $yxy^{-1} \in H$ и H — нормальная подгруппа. Далее, для того же x выполняется

$$\phi(x)gz\phi(g^{-1}) = \phi\Big(x\phi^{-1}(g)\phi^{-1}(z)g^{-1}\Big) = \phi(h\phi^{-1}(z)\phi(h^{-1}) = \phi(h)z\phi\Big(\big(\phi(h)\big)^{-1}\Big),$$

где $h = h_{\phi^{-1}(g),\phi^{-1}(z)}$. Значит, H является ϕ-инвариантной. Тогда $p\colon G \to G/H$ индуцирует биекцию на классах Райдемайстера и, в частности, доказывает СТБФ$_f$ для ϕ. Действительно, если два класса отображаются в один, то имеется элемент $h \in H$, не лежащий в их стабилизаторах. Противоречие. □

2. Положительный пример

В этом разделе мы обращаемся к примеру автоморфизма $\varphi_n\colon F_\infty \to F_\infty$, где F_∞ — свободная группа со счётным множеством образующих $\{x_0, x_1, \ldots\}$, с $R(\varphi_n) = n$, построенному в [6] для каждого натурального n. Мы докажем, что СТБФ$_f$ выполняется для этих φ_n.

Обозначим через $\theta\colon \{x_0, x_1, \ldots\} \to F_\infty$ такое (не единственное) сюръективное отображение, что $\theta(x_i)$ является словом, содержащим лишь $x_0, \ldots, x_{i-1}$ и обратные к ним. Теперь зафиксируем натуральное n. Для каждого $i = 0, \ldots, n-1$ обозначим через $J_i \subset \{x_0, x_1, \ldots\}$ подмножество, образованное такими x_k, что сумма степеней образующих в $\theta(x_k)$ равна i по модулю n. Обозначим $W_i := \theta(J_i)$. Таким образом, W_i состоит из тех элементов F_∞, для которых сумма степеней образующих равна i по модулю n. Получаем, что

$$\{x_0, x_1, \ldots\} = J_0 \sqcup J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_{n-1}, \quad F_\infty = W_0 \sqcup W_1 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1}.$$

Определим $\varphi_n\colon F_\infty \to F_\infty$ на образующих по формуле

$$\varphi_n(x_k) := \big(\theta(x_k)\big)^{-1} x_k (x_0)^i,$$

где i — номер того J_i, которое содержит x_k. Для любого $w \in F_\infty$ найдётся такое m, что $\theta(x_m) = w$. Пусть $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ таково, что $x_m \in J_k$, т. е. сумма показателей w равна k по модулю n. Тогда

$$\begin{aligned} w = x_m(x_0)^k (x_0)^{-k} (x_m)^{-1} \theta(x_m) = x_m(x_0)^k \Big(\big(\theta(x_m)\big)^{-1} x_m (x_0)^k\Big)^{-1} = \\ = x_m (x_0)^k \big(\varphi_n(x_m)\big)^{-1} \in \{(x_0)^k\}_{\varphi_n}. \end{aligned}$$

С другой стороны, все элементы из одного класса Райдемайстера имеют одинаковую сумму показателей по модулю n (обозначим её через ES_n), поскольку для любого $w \in F_\infty$ и любой образующей $x_k \in J_i$ имеем по определению J_i

$$\begin{aligned} ES_n\big(x_k w \big(\varphi_n(x_k)\big)^{-1}\big) = ES_n(x_k w (\theta(x_k)^{-1} x_k (x_0)^i)^{-1}) = \\ = ES_n(w) + ES_n\big(\theta(x_k)\big) - ES_n((x_0)^i) = ES_n(w) + i - i = ES_n(w). \end{aligned}$$

Значит, каждый класс содержит $(x_0)^i$ и они попарно различны. Подробности можно найти в [6].

Теперь мы можем заметить, что на самом деле эти классы являются W_i, т. е. подгруппой W_0 и её классами смежности. Кроме того, эпиморфизм

$$ES_n := F_\infty \to \mathbb{Z}_n$$

является эквивариантным (по отношению к тождественному автоморфизму $\mathbb{Z}_n$) и задаёт биекцию классов Райдемайстера по предложению 1.1, поскольку числа Райдемайстера равны. Значит, в этом случае СТБФ$_f$ верна.

Кроме того, представляется важным вычисление количества неподвижных точек φ_n. Оно используется для различных рассуждений в этой области (см., например, [16, 27]).

Рассмотрим случай φ_1. Тогда по определению $\varphi_1(x_k) = \theta(x_k) x_k$. Найдётся такое число $s = s(k)$, что $\theta(x_s) = (\theta(x_k) x_k)^{-1} x_k$. Значит,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_k x_s) = \big(\theta(x_k)\big)^{-1} x_k \big(\theta(x_s)\big)^{-1} x_s = \\ = \big(\theta(x_k)\big)^{-1} x_k ((\theta(x_k) x_k)^{-1} x_k)^{-1} (x_k)^{-1} x_k x_s = x_k x_s. \end{aligned}$$

Таким образом, число неподвижных точек бесконечно.

По универсальному свойству абеленизации имеется следующая коммутативная диаграмма эпиморфизмов

$$\begin{tikzcd} F_\infty \arrow[rr, "ES_n"] \arrow[dr, "ab"'] & & \mathbb{Z}_n \\ & \mathbb{Z}_\infty \arrow[ur, "ES_n"'] & \end{tikzcd},$$

индуцирующая биекцию классов Райдемайстера. Для автоморфизма, индуцированного φ_1, образы тех же точек $x_k x_s$ остаются неподвижными и различными после абеленизации. Значит, мы по-прежнему имеем бесконечно много неподвижных точек.

Таким образом, в отличие от конечно порождённого случая [16, утверждение 3.4], автоморфизм φ общей конечно аппроксимируемой (даже абелевой) группы с $R(\varphi) < \infty$ может иметь бесконечно много неподвижных точек.

3. Отрицательный пример

Рассмотрим следующий пример бесконечно порождённой конечно аппроксимируемой группы G и её автоморфизма ϕ с $R(\phi) < \infty$. Примеры такого рода естественным образом возникают как инвариантные фактор-группы общих бесконечно порождённых конечно аппроксимируемых групп (в частности, некоторых инвариантных подгрупп конечно порождённых конечно аппроксимируемых групп).

Пусть F — нетривиальная конечная группа, $G = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} F_i$, $F_i \cong F$, т. е.

$$G = \{g = (\ldots, g_{-1}, g_0, g_1, g_2, \ldots) \mid g_i \in F_i,\ g_i \neq e \text{ только для конечного числа } i\}.$$

Очевидно, что G — бесконечно порождённая конечно аппроксимируемая группа.

Пусть ϕ — правый сдвиг, т. е. $\phi(g)_i = g_{i-1}$, $i \in \mathbb{Z}$.

Лемма 3.1. *Число $R(\phi)$ равно $|F|$ и, в частности, конечно.*

Доказательство. Пусть $a, g \in G$. Тогда

$$\bigl(ga\phi(g^{-1})\bigr)_i = g_i a_i (g_{i-1})^{-1}.$$

Прежде всего, найдём, когда два элемента вида

$$\alpha_0 = x, \quad \alpha_i = e \text{ для } i \neq 0, \quad \beta_0 = y, \quad \beta_i = e \text{ для } i \neq 0$$

являются скрученно сопряжёнными. Условие таково:

$$g_0 x (g_{-1})^{-1} = y, \quad g_i (g_{i-1})^{-1} = e \text{ для } i \neq 0.$$

Значит,

$$g_0 = g_1 = \ldots, \quad g_{-1} = g_{-2} = \ldots .$$

Поскольку $g_i = e$ для больших i, то $g = (\ldots, e, e, e, \ldots)$. Значит, α и β являются скрученно сопряжёнными тогда и только тогда, когда они совпадают.

Покажем теперь, что всякий элемент $a = (\ldots, a_i, \ldots)$, $a_i = e$ для $i < -m$ и $i > n$, скрученно сопряжён некоторому элементу вида α (с $x = a_n \ldots a_{-m}$). Условие имеет вид

$$g_0 x (g_{-1})^{-1} = a_0, \quad g_i (g_{i-1})^{-1} = a_i \text{ для } i \neq 0.$$

Значит,

$$g_1 = a_1 g_0, \quad g_2 = a_2 a_1 g_0, \quad g_3 = a_3 a_2 a_1 g_0, \ldots$$
$$g_{-1} = a_0^{-1} g_0 x, \quad g_{-2} = a_{-1}^{-1} g_{-1} = a_{-1}^{-1} a_0^{-1} g_0 x, \quad g_{-3} = a_{-2}^{-1} a_{-1}^{-1} a_0^{-1} g_0 x \ldots .$$

При этом мы имеем единственное ограничение: $g_i = e$ для больших i. Следовательно,

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 g_0 = e, \quad e = a_{-m}^{-1} \cdots a_0^{-1} g_0 x.$$

Значит, g_0 должно равняться $(a_n a_{n-1} \cdots a_1)^{-1}$, а $x = a_n \cdots a_{-m}$ удовлетворяет ограничениям. □

Лемма 3.2. *Пусть F имеет тривиальный центр. Тогда для G* СТБФ$_f$ *не верна.*

Доказательство. Как известно (см. предложение 1.3), СТБФ$_f$ эквивалентна следующему свойству: стабилизирующая подгруппа при левых сдвигах любого класса имеет конечный индекс в G (для ϕ с $R(\phi) < \infty$).

В нашем случае стабилизатор класса $\{e\}_\phi$ тривиален ($= \{e\}$). Действительно, пусть

$$a = (\ldots, e, \ldots, e, a_{-m}, \ldots, a_n, e, \ldots, e, \ldots) —$$

нетривиальный элемент стабилизатора, т. е. $a_{-m} \neq e$. Поскольку $ae \in \{e\}_\phi$, то $a \in \{e\}_\phi$ и $a_{-m} \cdots a_n = e$. Так как a_{-m} не лежит в центре F, то имеется такое $b \in F$, что $ba_{-m}b^{-1}(a_{-m})^{-1} \neq e$. Рассмотрим $\beta \in G$ со всеми тривиальными компонентами, за исключением $b_{-m-1} := b$ и $b_{-m} := b^{-1}$. В частности, $\beta \in \{e\}_\phi$. В то же время $a\beta \notin \{e\}_\phi$, поскольку произведение его компонент даёт

$$ba_{-m}b^{-1}a_{-m+1} \cdots a_n = \\ = ba_{-m}b^{-1}(a_{-m})^{-1} a_{-m} a_{-m+1} \cdots a_n = ba_{-m}b^{-1}(a_{-m})^{-1} \neq e.$$

Противоречие. □

Замечание 3.3. Очевидно, что рассуждение остаётся верным для более общих центров.

Замечание 3.4. Конечно, в противоположном случае, когда F абелева, G тоже абелева и СТБФ должна выполняться (см. подробности в [19]). В рассматриваемом случае можно выписать искомые неподвижные (1-мерные) представления в явном виде:

$$(\rho_i)^{\otimes\infty}, \quad i = 1, \ldots, |F|, \text{ где } \{\rho_1, \ldots, \rho_{|F|}\} = \hat{F}.$$

В более общем случае эти инвариантные представления будут, вообще говоря, бесконечномерными. Но ещё более неприятным является то, что их число совпадает с $\#\hat{F}$. А это строго меньше, чем $|F| = R(\phi)$ для неабелевой F.

Литература

[1] Насыбуллов Т. Р. Классы скрученной сопряжённости в общей и специальной линейных группах // Алгебра и логика. — 2012. — Т. 51, № 3. — С. 331—346.

[2] Троицкий Е. В. Некоммутативная теорема Рисса и слабая теорема типа Бернсайда о скрученной сопряжённости // Функц. анализ и его прил. — 2006. — Т. 40, № 2. — С. 44—54.

[3] Фельштын А. Л. Число Райдемайстера любого автоморфизма громовской гиперболической группы бесконечно // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2001. — Т. 279. — С. 229—240.

[4] Bleak C., Fel'shtyn A., Gonçalves D. L. Twisted conjugacy classes in R. Thompson's group F // Pacific J. Math. — 2008. — Vol. 238, no. 1. — P. 1—6.

[5] Burillo J., Matucci F., Ventura E. The conjugacy problem in extensions of Thompson's group F. — 2013. — `arXiv:1307.6750`.

[6] Dekimpe K., Gonçalves D. The R_∞ property for free groups, free nilpotent groups and free solvable groups // Bull. London Math. Soc. — 2014. — Vol. 46, no. 4. — P. 737—746.

[7] Dekimpe K., Gonçalves D. The R_∞ property for Abelian groups // Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2015. — Vol. 46, no. 2. — P. 773—784.

[8] Dekimpe K., Penninckx P. The finiteness of the Reidemeister number of morphisms between almost-crystallographic groups // J. Fixed Point Theory Appl. — 2011. — Vol. 9, no. 2. — P. 257—283.

[9] Fel'shtyn A. Dynamical Zeta Functions, Nielsen Theory and Reidemeister Torsion. — Providence: Amer. Math. Soc., 2000. — (Mem. Am. Math. Soc.; Vol. 147; No. 699).

[10] Fel'shtyn A. New directions in Nielsen—Reidemeister theory // Topology Appl. — 2010. — Vol. 157, no. 10-11. — P. 1724—1735.

[11] Fel'shtyn A., Gonçalves D. L. The Reidemeister number of any automorphism of a Baumslag—Solitar group is infinite // Geometry and Dynamics of Groups and Spaces. — Basel: Birkhäuser, 2008. — (Progr. Math.; Vol. 265). — P. 399—414.

[12] Fel'shtyn A., Gonçalves D. L. Twisted conjugacy classes in symplectic groups, mapping class groups and braid groups // Geom. Dedicata. — 2010. — Vol. 146. — P. 211—223. — (With an appendix written jointly with Francois Dahmani.)

[13] Fel'shtyn A., Gonçalves D. L. Reidemeister spectrum for metabelian groups of the form $Q^n \rtimes \mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}[1/p]^n \rtimes \mathbb{Z}$, p prime // Internat. J. Algebra Comput. — 2011. — Vol. 21, no. 3. — P. 505—520.

[14] Fel'shtyn A., Hill R. The Reidemeister zeta function with applications to Nielsen theory and a connection with Reidemeister torsion // K-Theory. — 1994. — Vol. 8, no. 4. — P. 367—393.

[15] Fel'shtyn A., Leonov Yu., Troitsky E. Twisted conjugacy classes in saturated weakly branch groups // Geom. Dedicata. — 2008. — Vol. 134. — P. 61—73.

[16] Fel'shtyn A., Luchnikov N., Troitsky E. Twisted inner representations // Russ. J. Math. Phys. — 2015. — Vol. 22, no. 3. — P. 301—306.

[17] Fel'shtyn A., Nasybullov T. The R_∞ and S_∞ properties for linear algebraic groups // J. Group Theory. — 2016. — Vol. 19, no. 5. — P. 901—921.

[18] Fel'shtyn A., Troitsky E. A twisted Burnside theorem for countable groups and Reidemeister numbers // Noncommutative Geometry and Number Theory / C. Consani, M. Marcolli, eds. — Braunschweig: Vieweg, 2006. — P. 141—154.

[19] Fel'shtyn A., Troitsky E. Twisted Burnside-Frobenius theory for discrete groups // J. Reine Angew. Math. — 2007. — Vol. 613. — P. 193—210.

[20] Fel'shtyn A., Troitsky E. Twisted conjugacy classes in residually finite groups. — 2012. — arXiv:1204.3175.

[21] Fel'shtyn A., Troitsky E. Aspects of the property R_∞ // J. Group Theory. — 2015. — Vol. 18, no. 6. — P. 1021—1034.

[22] Fel'shtyn A., Troitsky E., Vershik A. Twisted Burnside theorem for type II_1 groups: an example // Math. Res. Lett. — 2006. — Vol. 13, no. 5. — P. 719—728.

[23] Gonçalves D., Kochloukova D. H. Sigma theory and twisted conjugacy classes // Pacific J. Math. — 2010. — Vol. 247, no. 2. — P. 335—352.

[24] Gonçalves D., Wong P. Twisted conjugacy classes in wreath products // Internat. J. Algebra Comput. — 2006. — Vol. 16, no. 5. — P. 875—886.

[25] Gonçalves D., Wong P. Twisted conjugacy classes in nilpotent groups // J. Reine Angew. Math. — 2009. — Vol. 633. — P. 11—27.

[26] Guyot L., Stalder Y. Limits of Baumslag—Solitar groups and dimension estimates in the space of marked groups // Groups Geom. Dyn. — 2012. — Vol. 6, no. 3. — P. 533—577.

[27] Jabara E. Automorphisms with finite Reidemeister number in residually finite groups // J. Algebra. — 2008. — Vol. 320, no. 10. — P. 3671—3679.

[28] Jiang B. Lectures on Nielsen Fixed Point Theory. — Providence: Amer. Math. Soc., 1983. — (Contemp. Math.; Vol. 14).

[29] Juhász A. Twisted conjugacy in certain Artin groups // Ischia Group Theory 2010: eProceedings. — World Scientific, 2011. — P. 175—195.

[30] Levitt G., Lustig M. Most automorphisms of a hyperbolic group have very simple dynamics // Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. — 2000. — Vol. 33. — P. 507—517.

[31] Mubeena T., Sankaran P. Twisted Conjugacy Classes in Abelian Extensions of Certain Linear Groups // Canad. Math. Bull. — 2014. — Vol. 57, no. 1. — P. 132—140.

[32] Mubeena T., Sankaran P. Twisted conjugacy classes in lattices in semisimple Lie groups // Transformation Groups. — 2014. — Vol. 19, no. 1. — P. 159—169.

[33] Roman'kov V. Twisted conjugacy classes in nilpotent groups // J. Pure Appl. Algebra. — 2011. — Vol. 215, no. 4. — P. 664—671.

[34] Taback J., Wong P. Twisted conjugacy and quasi-isometry invariance for generalized solvable Baumslag—Solitar groups // J. London Math. Soc. (2). — 2007. — Vol. 75, no. 3. — P. 705—717.