О равномерно собственной классификации открытых многообразий

Ю. АЙХХОРН
Грайфсвальдский университет, Германия
e-mail: eichhorn@uni-greifswald.de

УДК 517.988.26+517.983.37

Ключевые слова: открытые многообразия, равномерные структуры на многообразиях, функциональная и собственная алгебраическая топология, бордизм открытых многообразий, инвариантность относительно бордизмов сигнатуры в смысле K-теории, собственная перестройка.

Аннотация

Мы предлагаем краткий обзор равномерно собственной классификации открытых многообразий, т. е. классификации относительно ограниченных, равномерно собственных отображений. Малая категория классов диффеоморфизма открытых n-многообразий, $n \geqslant 2$, имеет несчётное число гомотопических типов. Наш подход состоит в том, чтобы расщепить это множество на обобщённые компоненты и попытаться классифицировать эти компоненты, а затем и отдельные элементы внутри этих компонент. Для определения этих компонент мы вводим метризуемые равномерные структуры Громова—Хаусдорфа и Липшица и соответствующие GH- и L-когомологии. GH-компоненты хорошо подходят для построения геометрической теории бордизмов, в то время как L-компоненты лучше всего подходят для перестроек. Мы приведём набор независимых образующих для групп бордизмов. Фундаментальный вклад Ф. Т. Фаррелла, Дж. Б. Вагонера, Л. К. Зибенманна, С. Момари и Л. Р. Тейлора играет решающую роль. В нашем подходе мы предполагаем, что многообразия снабжены метрикой ограниченной геометрии, и ограничиваемся рассмотрением ограниченных равномерно собственных морфизмов. Наконец, мы задаёмся вопросом, при каких условиях ограниченная геометрия и равномерная собственность сохраняются при перестройках, и описываем некоторые группы собственных перестроек.

Abstract

J. Eichhorn, On the uniformly proper classification of open manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 6, pp. 3—63.

We give a brief account on the uniformly proper classification of open manifolds, i.e., the classification under bounded, uniformly proper maps. The small category of diffeomorphism classes of open n-manifolds has uncountably many homotopy types, $n \geqslant 2$. Our main approach consists in splitting this set into generalized components and then try to classify these components and thereafter the elements inside a component. To define these components, we introduce Gromov–Hausdorff and Lipschitz metrizable uniform structures and corresponding GH- and L-cohomologies. The GH-components are particularly appropriate to introduce geometric bordism theory for open manifolds, the L-components are appropriate to establish surgery. We present independent generators for the bordism groups. The fundamental contributions of Farrell, Wagoner, Siebenmann, Maumary, and Taylor play a decisive role. In our approach, we suppose the manifolds

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 6, с. 3—63.

to be endowed with a metric of bounded geometry and restrict ourselves to bounded uniformly proper morphisms. Finally, we discuss the question under which conditions bounded geometry and uniform properness are preserved by surgery, and sketch some proper surgery groups.

1. Введение

Как было доказано Дж. Чигером, для любого $n \geqslant 0$ существует не более чем счётное число классов диффеоморфных замкнутых многообразий. Как будет показано далее, для открытых многообразий подобное утверждение абсолютно неверно. Для каждого $n \geqslant 2$ существует несчётное число различных гомотопических типов открытых n-многообразий. Более того, как мы видим на примере $\mathbb{R}^4$, возможна ситуация, когда один класс гомеоморфизма распадается на несчётное число классов диффеоморфизма. С учётом этих обстоятельств кажется, что бессмысленно пытаться решить задачу классификации открытых многообразий. Но мы нашли разумный метод, который позволяет «поймать» шаг за шагом все открытые гладкие многообразия. Наша главная идея состоит в следующем. Мы разобьём класс всех открытых многообразий в иерархию «обобщённых» компонент, попытаемся «посчитать» эти обобщённые компоненты, а вторым шагом классификации будет классификация многообразий внутри обобщённой компоненты с помощью бордизмов и перестроек. К сожалению, конструкция Тома—Понтрягина оказывается неосуществимой для собственного открытого случая, но компоненты Липшица обеспечивают нас необходимыми для перестройки отображениями.

Для того чтобы проделать это, предположим, что любое открытое многообразие M^n снабжено метрикой g ограниченной геометрии конечного или бесконечного порядка, т. е. мы предположим, что выполнены условия (I) и (B_k) или (B_∞),

$$r_{\mathrm{inj}}(M^n, g) = \inf_{x \in M} r_{\mathrm{inj}}(x) > 0, \quad |(\nabla^g)^i R^g|_{g,x} \leqslant C_i, \quad 0 \leqslant i.$$

Это не даёт дополнительных ограничений на класс диффеоморфизма, так как из результатов работы [23] следует, что любое открытое гладкое многообразие допускает такую метрику, т. е. мы не потеряем никакой класс диффеоморфизма. Такое многообразие (M^n, g) является полным, а значит и собственным, метрическим пространством. Что касается допустимых отображений, то мы будем рассматривать только ограниченные C^2-отображения, т. е. мы ограничимся такими $f\colon (M^n, g) \to (N^n, h)$, что дифференциал $df \in C^1(T^*M \otimes f^*TN)$ ограничен: $\sup\limits_{x \in M} |df| < \infty$. Предпосылки для таких ограничений возникают в анализе на многообразиях. Мы будем рассматривать задачу классификации открытых многообразий всегда в связи с анализом на многообразиях. Для решения уравнений в частных производных на (M^n, g) необходимы, в частности, точные предположения о соответствующем типе многообразия и о пространствах функций, в классе которых мы ищем решение. Чтобы получить функториальность, мы должны рассматривать только те отображения f, которые индуцируют отображения между рассматриваемыми пространствами функций. Чтобы прояснить ситуацию, приведём очень простой пример.

Пусть $M = (-1,1)$, $N = \mathbb{R}$, $f(t) = \operatorname{tg}(t\pi/2)$, в качестве пространства функций рассмотрим L_2. Тогда $f\colon (-1,1) \overset{\cong}{\to} \mathbb{R}$, $1(t) = 1 \in L_2\big((-1,1)\big)$, $(f^{-1})^*1 \notin L_2(\mathbb{R})$, f не является диффеоморфизмом. Чтобы избежать подобных ситуаций, в качестве допустимых морфизмов мы будем рассматривать только ограниченные отображения, диффеоморфизмы (как в нашем примере) должны быть биограниченными. Отображение $f\colon (M,g) \to (N,h)$ является ограниченным, если $|df| = |f_*|$ ограничен, т. е. $\sup\limits_{x\in M} |df|_x < \infty$, где $df \in C^1(T^*M \otimes f^*TN)$ и $|df|_x$ — послойная норма в векторном расслоении $T^*M \otimes f^*TN$. В локальных координатах

$$|df|_x = |\operatorname{tr}^g(f^*h)| = |g^{ij}h_{\mu\nu}\partial_i f^\mu \partial_j f^\nu|^{1/2}.$$

Если мы рассмотрим в качестве примера

$$\begin{gathered}(M^n,g) = (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n}), \quad (N^n,h) = (H^n_{-1}, h_H) \cong (\mathbb{R}^n, dr^2 + (\operatorname{sh} r)^2 d\sigma^2_{S^{n-1}}),\\ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}, \quad |df|^2_{(r,u)} = 1 + (\operatorname{sh} r)^2 |g_{S^{n-1}}|_u \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty,\end{gathered}$$

то

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\colon (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n}) \to (H^n_{-1}, g_H)$$

не является ограниченным.

Аналогично мы будем требовать ограниченности от всех рассматриваемых гомотопий. Диффеоморфизмами в нашей категории являются обычные диффеоморфизмы, такие что df и $(df)^{-1}$ ограничены. Наконец, мы ограничимся равномерно собственными отображениями $f\colon M \to N$, т. е. f является собственным и для любого $C_1 > 0$ существует $C_2 = C_2(f)$, такое что условие $\operatorname{dist}_N\big(f(x_1), f(x_2)\big) < C_1$ влечёт $\operatorname{dist}_M(x_1,x_2) < C_2$.

Эти понятия очень легко можно обобщить на категорию собственных метрических пространств и ограниченных равномерно собственных отображений, т. е., например, можно считать, что ограниченное отображение — это липшицево ограниченное отображение и т. д.

Основная идея нашего подхода заключается в том, чтобы ввести подходящие метризуемые равномерные структуры в (малой) категории собственных метрических пространств и определить обобщённые компоненты линейной связности метрического пространства (X, d_X), состоящие из всех (Y, d_Y), таких что $d_{\text{unif. str.}}\big((X,d_X),(Y,d_Y)\big) < \infty$.

Любое полное риманово многообразие (M^n, g) является собственным метрическим пространством. Поэтому мы можем ограничить равномерную структуру на эту подкатегории и рассмотреть $\operatorname{gen\,arccomp}(M^n,g)$. Тогда наш подход к задаче классификации открытых многообразий состоит из двух основных этапов:

1) «подсчёт» или «классификация» обобщённых компонент линейной связности $\operatorname{gen\,arccomp}(M^n,g)$ по значениям их инвариантов;

2) «подсчёт» или «классификация» элементов (многообразий) внутри обобщённой компоненты линейной связности по значениям их инвариантов с помощью бордизма и перестройки.

Мы рассмотрим несколько метризуемых равномерных структур, где метрика определяется некоторыми расстояниями между равномерно собственными ограниченными отображениями.

Обратим внимание, что наш подход не предоставляет «полную» классификацию. Такой классификации не существует даже для компактного случая. Но наш подход даёт возможность расщепить континуум открытых многообразий на обобщённые компоненты линейной связности и предъявить для многообразий внутри таких компонент точные последовательности перестроек.

Мы ориентируемся на приложения к анализу на многообразиях. В серии работ мы доказали, что некоторые уравнения в частных производных, играющие важную роль в математической физике или в геометрии открытых многообразий, имеют (единственное) решение, если оператор Лапласа имеет спектральный зазор над нулём. Это послужило мотивацией для того, чтобы представить в разделе 3 утверждение о том, что существование такого спектрального зазора инвариантно относительно равномерно собственных ограниченных гомотопических эквивалентностей.

Наконец, можно существенно ослабить зависимость от метрики, используя тот факт, что ограниченное отображение $f\colon (M,g)\to(N,h)$ индуцирует ограниченное отображение $f\colon (M,g')\to(N,h')$ для всех $g'\in\operatorname{comp}(g)$, $h'\in\operatorname{comp}(h)$, т. е. результаты нашей классификации являются результатами для пары (многообразие, компонента в пространстве метрик). Определение соболевской компоненты $\operatorname{comp}(g)$ можно найти в [16], [12].

Для замкнутых многообразий существует хорошо развитый подход к классификации, использующий конструкцию Тома—Понтрягина, теорию бордизмов, перестройки, группы Уолла, точную последовательность Браудера—Новикова—Сулливана—Уолла. Всё это может быть описано на алгебраическом языке конечно порождённых $Z\pi$-, унитарных $Z\pi$-, $Q\pi$-модулей и их K-теории. Более того, существует много численных инвариантов, которые могут быть вычислены: классические характеристические числа, сигнатуры, высшие сигнатуры, аналитическое кручение и кручение Райдемайстера, η-инварианты. Для открытых многообразий у нас не остаётся ничего из вышеперечисленных методов, по крайней мере на первый взгляд. Имеет место следующее простое утверждение.

Утверждение 1.1. *Пусть $\mathfrak{M}^n$ — множество всех гладких ориентированных n-многообразий и V — векторное пространство или абелева группа. Не существует нетривиального отображения $c\colon \mathfrak{M}\to V$, такого что*

1) *если $M^n\cong M'^n$ с помощью сохраняющего ориентацию диффеоморфизма, то $c(M)=c(M')$;*
2) *$c(M\mathbin{\#}M')=c(M)+c(M')$.*

Доказательство. Предположим для начала, что $M^n\ncong\Sigma^n$, где Σ^n — гомотопическая n-сфера. Зафиксируем две точки на M^n. Тогда $M_\infty=M_1\mathbin{\#}M_2\mathbin{\#}\ldots$,

$M_i = (M, i) \cong M$, корректно определено. Мы можем записать $M_\infty = M_1 \# M_{\infty,2}$, где $M_{\infty,2} = M_2 \# M_3 \# \dots$, и получить

$$c(M_\infty) = c(M) + c(M_{\infty,2}) = c(M) + c(M_\infty),$$

поэтому $c(M) = 0$. Предположим, что $M^n = \Sigma^n$ и $\operatorname{ord}\Sigma^n = k > 1$. Тогда

$$c(\Sigma^n \# \dots \# \Sigma^n) = k \cdot c(\Sigma^n) = c(S^n), \quad c(\Sigma^n) = \frac{1}{k} c(S^n),$$

$$c(\Sigma^n) = c(\Sigma^n \# S^n) = \left(1 + \frac{1}{k}\right) c(S^n), \quad c(S^n) = 2c(S^n), \quad c(S^n) = 0,$$

$$c(\Sigma^n) = 0. \qquad \square$$

Единственным вещественнозначным инвариантом, определённым для всех связных многообразий M^n, который известен авторам, является размерность n. Если характеризовать ориентируемость/неориентируемость с помощью ± 1, то таких инвариантов будет два. Это всё. Обозначим через $\mathfrak{M}^n([\mathrm{cl}])$ множество всех классов диффеоморфизма замкнутых n-многообразий. Тогда имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1.2. $\#\mathfrak{M}^n([\mathrm{cl}]) = \aleph_0$.

Доказательство. Согласно результату Дж. Чигера, существует конечное число типов диффеоморфизма для (M^n, g) с $\operatorname{diam}(M^n, g) \leqslant D$, $r_{\mathrm{inj}}(M^n, g) \leqslant i$ и ограниченной константой K секционной кривизной. Полагая $D_\nu = K_\nu = i_\nu = \nu$ и рассматривая $\nu \to \infty$, мы сосчитаем все типы диффеоморфизма замкнутых римановых n-многообразий и, в частности, все диффеоморфные типы замкнутых многообразий. $\square$

С другой стороны, для открытых многообразий имеет место следующий результат.

Утверждение 1.3. *Множество $\mathfrak{M}([\mathrm{open}])$ всех классов диффеоморфизмов открытых многообразий является множеством мощности не менее континуума для $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Предположим, что $n \geqslant 3$, n нечётно. Пусть

$$2 = p_1 < p_2 < \dots \text{—}$$

возрастающая последовательность простых чисел, и пусть $L^n(p_\nu) = S^n/\mathbb{Z}_{p_\nu}$ — соответствующее линзовое пространство. Рассмотрим

$$M^n := d_1 \cdot L(p_1) \# d_2 \cdot L(p_2) \# \dots, \quad d_\nu = 0, 1.$$

Тогда любая последовательность $(d_1, d_2, \dots)$ из 0, 1 определяет многообразие, и разные последовательности определяют недиффеоморфные, даже не гомотопически эквивалентные, многообразия. Если $n \geqslant 4$ чётное, то надо умножить на S^1. Для $n = 2$ утверждение теоремы следует из классификационной теоремы из работы [36]. $\square$

Существуют простые методы построения по одному замкнутому многообразию $M^n \neq \Sigma^n$ бесконечного порядка несчётного числа многообразий, которые не биограниченно диффеоморфны. Этот факт поддерживает наивные представления о том, что

$$\text{мера } \mathfrak{M}([\text{open}]) : \text{мера } \mathfrak{M}([\text{cl}]) = \infty : 0.$$

Мы воспринимаем это как дополнительный намёк на то, насколько сложна любая классификация открытых многообразий.

Эта статья построена как очень краткий выборочный обзор. За деталями и доказательствами мы отсылаем читателя к нашей подробной монографии [17], посвящённой этой теме, которая выйдет из печати в ближайшее время. Нам также необходимо было включить достижения других авторов, на которые опирается наш подход, поскольку без них мы бы не смогли представить множество результатов. В разделе 2 мы кратко описываем метризуемые равномерные структуры, которые важны для нашего подхода к задаче классификации и используются нами в дальнейшем. Заинтересованный читатель сможет найти гораздо более подробное описание равномерных структур в [13, 14, 16]. В частности, мы указываем, почему крупномасштабные равномерные структуры не подходят для нашего подхода, но в других задачах могут быть очень полезны. Раздел 3 посвящён описанию некоторых теорий (ко)гомологий, удобных для изучения открытых пространств. В частности, когомология Липшица и когомология Громова—Хаусдорфа являются инвариантами L- или GH-компонент соответственно. Большинство утверждений о комбинаторных функциональных (ко)гомологиях хорошо известны, и мы лишь кратко напоминаем их. Мы кратко обсудим другую версию сигнатуры со значениями в K-группе в разделе 4, посвящённом бордизмам. В разделе 5 мы кратко представим гомологический и гомотопический подход Ф. Т. Фаррелла, Л. Р. Тейлора, Дж. Б. Вагонера, описывающий «изменение» гомологий и гомотопий при движении внутри концов к бесконечности. Их подход ведёт к замечательному применяемому критерию того, когда отображение является собственной гомотопической эквивалентностью. Мы используем их Δ-конструкцию в разделе 6 для определения открытого комплекса Пуанкаре. Мы кратко опишем определения и результаты Л. Зибенманна, связанные со свойством отображения быть собственной гомотопической эквивалентностью на бесконечности.

Раздел 4 в основном посвящён теории бордизмов. Здесь мы развиваем геометрический подход к теории бордизмов, который кажется нам подходящим для случая открытых многообразий. В некоторых случаях бордизм может быть охарактеризован с помощью характеристических чисел. Теория бордизмов связана с сигнатурой, объёмом или диаметром роста в концах. Мы детально опишем простейший случай нерасширяющихся концов. Для этого случая мы представим независимые геометрические порождающие группы бордизмов. Также мы наметим доказательство для более общего случая. Далее мы ненадолго вернёмся к дальнейшим обобщениям сигнатуры, в частности к её определению со значениями в K-группе, которое было дано Н. Хигсоном и Дж. Роу в [26—28]. Одним из преимуществ геометрической теории бордизмов является тот факт, что мы можем установить (геометрическую) инвариантность K-сигнатуры относительно бордизмов, что даёт довольно широкое обобщение известного результата Хирцебруха, и гомотопическую инвариантность сигнатуры относительно равномерно собственной ограниченной гомотопической эквивалентности. Необходимыми основами для этого являются геометрическая, а значит и аналитическая, контролируемость нашей теории бордизмов.

В качестве подготовки к разделу, посвящённому перестройкам, в разделе 5 мы излагаем наброски простой гомотопической теории для открытых пространств и ассоциированных точных последовательностей. Здесь наше изложение опирается на работы Ф. Т. Фаррелла, Л. Р. Тейлора, Дж. Б. Вагонера и Л. Зибенманна.

Здесь впервые возникает вопрос, из которого проистекает задача перестройки. Классическая конструкция Тома—Понтрягина (которая сводит источник проблем при перестройке к гомотопическим данным) не подходит, поскольку не существует собственного ограниченного вложения равномерно открытого CW-комплекса в S^N. Но, к счастью, элементы Пуанкаре внутри L-компоненты могут быть связаны с задачей перестройки.

Мы кратко рассмотрим следующие два случая:

1) перестройка для получения (ограниченной) собственной гомотопической эквивалентности на бесконечности;
2) перестройка для получения (ограниченной) собственной гомотопической эквивалентности везде.

В этой статье мы полностью сосредоточимся на гладком случае ограниченной геометрии, в частности на вопросе, могут ли ограниченная геометрия и равномерная собственность сохраняться при перестройке? Подсказка к ответу на этот вопрос для PL-случая может быть найдена в [17]. Ценный вклад в исследование этого вопроса был сделан специалистами по «контролируемым» аналогам рассматриваемых понятий, но мы решили использовать здесь другой подход. Упомянем очень интересные результаты О. Аттие, полученные в [1], [2]. Автор особенно ценит фундаментальный вклад, сделанный Ф. Т. Фарреллом, Л. Р. Тейлором, Дж. Б. Вагонером Л. Зибенманном и С. Момари.

Автор посвящает эту работу своему другу и коллеге Юрию Петровичу Соловьёву, вспоминая долгие годы тёплых отношений с ним, продолжавшихся до самой его кончины.

2. Равномерные структуры на собственных метрических пространствах

Каждое полное риманово многообразие является собственным метрическим пространством. Поэтому мы начнём с краткого обзора основных понятий, связанных с равномерными структурами. Затем мы обсудим основные примеры равномерных структур в метрических пространствах. За доказательствами мы отсылаем читателя к [16], [13]. Иногда они очень длинные, но могут быть проведены с помощью элементарных методов.

Система $\mathfrak{U}$ подмножеств $X \times X$ называется равномерной структурой на X, если она является фильтром и выполняются следующие условия:

(U_1) каждое $U \in \mathfrak{U}$ содержит диагональ $\Delta \subset X \times X$;

(U_2) если $V \in \mathfrak{U}$, то $V^{-1} \in \mathfrak{U}$;.

(U_3) если $V \in \mathfrak{U}$, то существует такое $W \in \mathfrak{U}$, что $W \circ W \subset V$.

Множества из $\mathfrak{U}$ называются окрестностями равномерной структуры, а пространство $(X, \mathfrak{U})$ называется равномерным пространством.

Система $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(X \times X)$ (= множество всех подмножеств $X \times X$) образует базис равномерной структуры, определённой единственным образом, тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:

(B_1) если $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}$, то $V_1 \cap V_2$ содержит элемент из $\mathfrak{B}$;

(U_1') каждое $V \in \mathfrak{B}$ содержит диагональ $\Delta \subset X \times X$;

(U_2') для каждого $V \in \mathfrak{B}$ существует такое $V' \in \mathfrak{B}$, что $V' \subseteq V^{-1}$;

(U_3') для каждого $V \in \mathfrak{B}$ существует такое $W \in \mathfrak{B}$, что $W \circ W \subset V$.

Каждая равномерная структура $\mathfrak{U}$ индуцирует топологию на X следующим образом. Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство. Тогда для каждого $x \in X$ $\mathfrak{U}(x) = \{V(x)\}_{V \in \mathfrak{U}}$ является фильтром окрестностей для однозначно определённой топологии на X. Эта топология называется равномерной топологией, порождённой равномерной структурой $\mathfrak{U}$. Дальнейшая информация о равномерных структурах может быть найдена в [42]. Нас будет интересовать, при каких условиях $\mathfrak{U}$ метризуемо. Равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ называется хаусдорфовым, если оно удовлетворяет следующим условиям

$(U_1 H)$ пересечение всех множеств из $\mathfrak{U}$ является диагональю $\Delta \subset X \times X$.

Заметим,что равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда соответствующая топология на X хаусдорфова. Следующий критерий позволяет ответить на интересующий нас вопрос.

Утверждение 2.1. *Равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ метризуемо тогда и только тогда, когда $(X, \mathfrak{U})$ хаусдорфово и $\mathfrak{U}$ имеет счётный базис $\mathfrak{B}$.* $\square$

Теперь рассмотрим замыкания. Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство, V — некоторая окрестность. Говорят, что система $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{P}(X)$ имеет сколь угодно малые множества, если для каждого $V \in \mathfrak{U}$ существует такое $M \in \mathfrak{G}$, что M является малым порядка V, т. е. $M \times M \subset V$. Фильтр на X называется фильтром Коши, если он имеет сколь угодно малые подмножества. Последовательность $(x_\nu)_\nu$ называется последовательностью Коши, если ассоциированный элементарный фильтр $(\{x_\nu \mid \nu \geqslant \nu_0\}_{\nu_0})$ является фильтром Коши. Каждый сходящийся фильтр на X является фильтром Коши. Равномерное пространство называется полным, если каждый фильтр Коши сходится, т. е. является более сильным, чем фильтр окрестностей точки.

Утверждение 2.2. *Пусть* $(X, \mathfrak{U})$ — *равномерное пространство. Тогда существует полное равномерное пространство* $(\bar{X}^{\mathfrak{U}}, \bar{\mathfrak{U}})$, *такое что* X *изоморфно плотному подмножеству* $\bar{X}$. *Если дополнительно* $(X, \mathfrak{U})$ *является хаусдорфовым, то существует полное равномерное хаусдорфово пространство* $(\bar{X}^{\mathfrak{U}}, \bar{\mathfrak{U}})$, *единственное с точностью до изоморфизма, такое что* X *изоморфно плотному подмножеству* $\bar{X}$. *Тогда* $(\bar{X}^{\mathfrak{U}}, \bar{\mathfrak{U}})$ *называется пополнением* $(X, \mathfrak{U})$.

Доказательство можно найти в [41, с. 126, 127].

Определим ε_0-локально метризуемое множество. Пусть X — топологическое пространство, $\varepsilon_0 > 0$. Пространство X называется ε_0-локально метризуемым, если существует окрестность V диагонали $X \times X$ и для каждого $x \in X$ существуют окрестность V_x и функция $d_x \colon V_x \to [0, \varepsilon_0[$, такие что $(U_\varepsilon(x) := \{y | d_x(x, y) < \varepsilon\}, d_x)$ является метрическим пространством, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и выполнено следующее:

для заданного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon) > 0$, такое что из $d_y(y, x) < \varepsilon'$ следует, что $y \in U_\varepsilon(x)$, (2.1)

для заданного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что из $y \in U_\delta(x)$, $z \in U_{\delta(y)}$ следует, что $z \in U_\varepsilon(x)$, т. е. $d_x(x, y) < \delta, d_y(y, z) < \delta$ влечёт $d_x(x, z) < \varepsilon$. (2.2)

Отметим, что мы допускаем случай $\varepsilon_0 = \infty$.

Утверждение 2.3. *Пусть* X — ε_0*-локально метризуемо,* $0 < \delta < \varepsilon_0$ *и пусть*

$$V_\delta = \{(x, y) \in X^2 \mid d_x(x, y) < \delta\}.$$

Тогда $\mathfrak{B} = \{V_\delta\}_{0 < \delta < \varepsilon_0}$ *является базисом для метризуемой равномерной структуры* $\mathfrak{U}(X)$.

Доказательство. (2.1) влечёт условие (U_2'), (2.2) влечёт условие (U_3'). Остальные условия очевидно выполнены. □

Существует стандартная процедура для построения соответствующей метрики на $(X, \mathfrak{U})$. Сначала определим почти метрику (т. е. расстояние может оказаться ∞) d^a с помощью формулы

$$d^a(x, y) = \inf \sum_{i=1}^{p} d_{z_{i-1}}(z_{i-1}, z_i), \tag{2.3}$$

где нижняя грань берётся по всем конечным последовательностям $z_0, z_1, \ldots, z_p$, таким что $z_0 = x$, $z_p = y$ и $p = 1, 2, 3, \ldots$.

Утверждение 2.4. *Если в* (2.3) *определено* $d_x(x, y)$, *то*

$$\frac{1}{2} d_x(x, y) \leqslant d^a(x, y) \leqslant d_x(x, y). \tag{2.4}$$

Доказательство. Это утверждение эквивалентно (2.6) в [41, с. 117]. □

Отметим, что d^a можно превратить в метрику d, если положить $d = d^a/(1+d^a)$.

Пусть $(Y, \mathfrak{U}_Y)$ — равномерное хаусдорфово пространство, $X \subset Y$ — плотное подпространство. Если X метризуемо с метрикой ϱ, то ϱ может быть продолжено до метрики ϱ на Y, которая метризует равномерное пространство $(Y, \mathfrak{U}_Y)$. Наконец, если $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное метризуемое пространство, а $(\bar{X}^{\varrho}, \bar{\mathfrak{U}}_{\varrho})$ или $(\bar{X}^{\mathfrak{U}}, \bar{\mathfrak{U}})$ — равномерные или метрические пополнения соответственно, то

$$\bar{X}^{\mathfrak{U}} = \bar{X}^{\varrho} \tag{2.5}$$

как метризуемые топологические пространства.

Как было отмечено ранее, наш подход можно описать следующим образом. Каждое полное риманово многообразие (M^n, g) определяет собственное метрическое пространство. А значит, первым шагом классификации будет классификация собственных метрических пространств, что будет проделано с помощью определения равномерной структуры (собственных метрических пространств). В качестве классов эквивалентности будем рассматривать (обобщённые) компоненты линейной связности. Мы рассмотрим несколько равномерных структур, которые становятся всё сильнее и сильнее. Значит, компоненты линейной связности становятся меньше и меньше. Классификация (частичная) на этом фиксированном уровне состоит из двух шагов:

1) классификация обобщённых компонент линейной связности по значениям их инвариантов;
2) классификация элементов внутри компоненты линейной связности с помощью инвариантов.

На уровне собственных метрических пространств мы введём несколько новых теорий когомологий, а именно когомологии Громова—Хаусдорфа $H^*_{\mathrm{GH}}(X)$, когомологии Липшица $H^*_{\mathrm{L,b}}(X)$ и несколько функциональных теорий когомологий. Затем мы покажем, что

1) $H^*_{\mathrm{GH}}(X)$ являются инвариантом $\mathrm{comp}_{\mathrm{GH}}(X)$;
2) $H^*_{\mathrm{L,b}}(X)$ являются инвариантом $\mathrm{comp}_{\mathrm{L}}(X)$.

В частности, с помощью такого способа будут получены новые инварианты для открытых полных римановых многообразий, связанные с их липшицевым или GH-типом.

Мы начнём с крупномасштабной равномерной структуры и структуры Громова—Хаусдорфа. Большинство из того, что будет изложено далее, можно найти в [13, 16]. Пусть $Z = (Z, d_Z)$ — метрическое пространство, $X, Y \subset Z$ — его подмножества, $\varepsilon > 0$. Определим $U_\varepsilon(X) := \{z \in Z \mid \operatorname{dist}(z, X) < \varepsilon\}$ и аналогично определим $U_\varepsilon(Y)$. Тогда расстояние Хаусдорфа определяется как

$$d_H^Z(X, Y) := \inf\{\varepsilon \mid X \subset U_\varepsilon(Y),\ Y \subset U_\varepsilon(X)\}.$$

Если не существует такого ε, положим $d_H^Z(X, Y) := \infty$. Если профакторизовать d_H^Z по $d(\cdot,\cdot) = 0$, то мы получим почти метрику на всех замкнутых подмножествах, т. е. функцию, принимающую значения из $[0, \infty]$, но удовлетворяющую всем остальным условиям метрики. Если Z компактно, то d_H^Z является метрикой на множестве всех замкнутых подмножеств. Метрическое пространство (X, d) называется *собственным*, если все замкнутые шары $\overline{B_\varepsilon(x)}$ являются компактными для всех $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что X сепарабельно, полно и локально компактно. В дальнейшем мы ограничимся собственными метрическими пространствами.

Пусть $X = (X, d_X)$, $Y = (Y, d_Y)$ — метрические пространства, $X \sqcup Y$ — их дизъюнктное объединение. Метрика d на $X \sqcup Y$ называется *допустимой*, если ограничения d на X и Y совпадают с d_X и d_Y соответственно. *Расстояние Громова—Хаусдорфа* $d_{\mathrm{GH}}(X, Y)$ определяется следующим образом:

$$d_{\mathrm{GH}}(X, Y) := \inf\{d_H(X, Y) \mid d \text{ является допустимой на } X \sqcup Y\}.$$

Заметим, что расстояние Громова—Хаусдорфа может оказаться бесконечным. Изначально Громов определял d_{GH} как

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{GH}}(X, Y) := \inf\bigl\{d_H^Z\bigl(i(X), j(Y)\bigr) \mid i\colon X \to Z,\ j\colon Y \to Z \,— \\ \text{изометричные вложения в метрическое пространство } Z\bigr\}. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что оба определения совпадают, в этом несложно убедиться непосредственно.

Лемма 2.5. *Если X и Y — компактные метрические пространства и $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) = 0$, то X и Y изометричны.*

Это следует непосредственно из определения и теоремы Арцела—Асколи.

Замечание 2.6. Класс метрических пространств, даже если рассматривать их с точностью до изометрии, не образует множество. Но если рассматривать классы изометрии собственных метрических пространств, то они образуют множество. Поэтому в этом разделе мы будем рассматривать только собственные метрические пространства. Собственное метрическое пространство X можно покрыть счётным числом компактных метрических шаров фиксированного радиуса. Каждый такой шар изометричен подмножеству $L^\infty([0,1])$, и мы получим X после отождествления этих шаров по их пересечениям, т. е. X можно рассматривать как подмножество $\Bigl(\prod\limits_{i=1}^{\infty} L^\infty([0,1])\Bigr)^2$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех классов изометрии $[X]$ собственных метрических пространств X, положим $\mathfrak{M}_{\mathrm{GH}} = \mathfrak{M}/{\sim}$, где $[X] \sim [Y]$, если $d_{\mathrm{GH}}([X], [Y]) = 0$.

Утверждение 2.7. *d_{GH} определяет на $\mathfrak{M}$ почти метрику, т. е. метрику со значениями в $[0, \infty]$.* □

В дальнейшем будем писать $X = [X]_{\mathrm{GH}}$, если это не вызовет путаницы.

Определим теперь равномерную структуру. Пусть $\delta > 0$. Положим

$$V_\delta := \{(X, Y) \in \mathfrak{M}_{\mathrm{GH}}^2 \mid d_{\mathrm{GH}}(X, Y) < \delta\}.$$

Лемма 2.8. $\mathfrak{B} = \{V_\delta\}_{\delta>0}$ *образует базис метризуемой равномерной структуры* $\mathfrak{U}_{\mathrm{GH}}(\mathfrak{M})$.

Доказательство. $\mathfrak{B}$ можно локально задать с помощью метрики, а значит, оно удовлетворяет всем необходимым условиям. $\square$

Пусть $\bar{\mathfrak{M}}_{\mathrm{GH}}$ — пополнение $\mathfrak{M}_{\mathrm{GH}}$ относительно $\mathfrak{U}_{\mathrm{GH}}$, обозначим метрику в $\bar{\mathfrak{M}}$ через $\bar{d}_{\mathrm{GH}}$.

Лемма 2.9. $\mathfrak{M}_{\mathrm{GH}} = \bar{\mathfrak{M}}_{\mathrm{GH}}$ *как множества и* d_{GH} *и* $\bar{d}_{\mathrm{GH}}$ *локально эквивалентны, т. е. для любого* $X \in \mathfrak{M}_{\mathrm{GH}} = \bar{\mathfrak{M}}_{\mathrm{GH}}$ *существуют эквивалентные базы окрестностей, являющихся метрическими шарами.* $\square$

Пусть $X \in \mathfrak{M}_{\mathrm{GH}} = \bar{\mathfrak{M}}_{\mathrm{GH}}$. Обозначим через $\mathrm{comp}(X)$ и $\mathrm{arccomp}(X)$ компоненту связности и компоненту линейной связности X в $\mathfrak{M}_{\mathrm{GH}}$ соответственно.

Ключевую роль в дальнейшем будет играть следующее утверждение.

Утверждение 2.10. $\mathfrak{M}_{\mathrm{GH}} = \bar{\mathfrak{M}}_{\mathrm{GH}}$ *локально линейно связно.*

Следствие 2.11. *В* $\mathfrak{M}_{\mathrm{GH}}$ *компоненты связности и компоненты линейной связности совпадают. Более того, каждая компонента связности открыта и* $\bar{\mathfrak{M}}_{\mathrm{GH}} = \mathfrak{M}_{\mathrm{GH}}$ *является топологической суммой своих связных компонент*

$$\mathfrak{M} = \sum_{i \in I} \mathrm{comp}(X_i). \qquad \square$$

Утверждение 2.12. *Пусть* $X \in \bar{\mathfrak{M}}_{\mathrm{GH}} = \mathfrak{M}_{\mathrm{GH}}$. *Тогда*

$$\mathrm{comp}(X) = \{Y \in \mathfrak{M}_{\mathrm{GH}} \mid d_{\mathrm{GH}}(X, Y) < \infty\}.$$

Доказательство. Пусть $Y \in \mathrm{comp}(X) = \mathrm{arccomp}(X)$. Тогда существует путь, соединяющий X и Y. Для заданного $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечным числом шаров радиуса ε. Пусть число шаров равно r. Тогда $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) \leqslant 2r\varepsilon < \infty$.

Если $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) = \varepsilon < \infty$, то мы можем построить путь, соединяющий X и Y (см. [13]). $\square$

Из утверждения 2.12 следует, что $\bar{\mathfrak{M}}_{\mathrm{GH}} = \mathfrak{M}_{\mathrm{GH}}$ естественным образом распадается на компоненты связности (компоненты линейной связности) и внутри каждой компоненты существует каноническая топология и сходимость. Эта сходимость, в отличие от ранее рассмотренных, не является сходимостью метрических шаров, это равномерная сходимость. Мы обсудим это чуть позже. Любое полное риманово многообразие определяет единственную компоненту связности. Сначала нам потребуется другое описание компонент связности.

Назовём отображение $\Phi \colon X \to Y$ *метрически полулинейным,* если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

1) оно равномерно метрически собственно, т. е. для каждого $R > 0$ существует $S > 0$, такое что обратный образ множества, диаметр которого равен R, при отображении Φ является множеством, диаметр которого не превосходит S;

2) существует константа $C_\Phi \geqslant 0$, такая что для всех $x_1, x_2 \in X$

$$d(\Phi x_1, \Phi x_2) \leqslant d(x_1, x_2) + C_\Phi.$$

Два метрических пространства X и Y называются *метрически полулинейно эквивалентными*, если существуют метрически полулинейные отображения $\Phi\colon X \to Y$, $\Psi\colon Y \to X$ и константы D_X и D_Y, такие что для всех $x \in X$ и $y \in Y$

$$d(x, \Psi\Phi x) \leqslant D_X, \quad d(\Phi\Psi y, y) \leqslant D_Y. \tag{2.6}$$

Утверждение 2.13. *$Y \in \mathrm{comp}(X)$, т. е. $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) < \infty$ тогда и только тогда, когда X и Y метрически полулинейно эквивалентны.*

Доказательства можно найти в [13, 16].

На этом общем уровне по-прежнему есть другие важные классы отображений в категории собственных метрических пространств.

Назовём отображение $\Phi\colon X \to Y$ *крупномасштабным*, если оно

1) метрически собственное, т. е. для каждого ограниченного подмножества $B \subseteq Y$ обратный образ $\Phi^{-1}(B)$ ограничен в X;
2) равномерно расширяющееся, т. е. для $R > 0$ существует $S > 0$, такое что $d(x_1, x_2) \leqslant R$ влечёт $d(\Phi x_1, \Phi x_2) \leqslant S$.

Крупномасштабное отображение называется *равномерно крупномасштабным*, если оно дополнительно является равномерно метрически собственным. Пространства X и Y называются *крупномасштабно* или *равномерно крупномасштабно эквивалентными*, если существуют крупномасштабные или равномерно крупномасштабные отображения $\Phi\colon X \to Y$, $\Psi\colon Y \to X$ соответственно, такие что существуют константы D_X, D_Y, удовлетворяющие условиям

$$d(\Psi\Phi x, x) \leqslant D_X, \quad d(\Phi\Psi y, y) \leqslant D_Y.$$

Утверждение 2.14. *X и Y крупномасштабно эквивалентны тогда и только тогда, когда они равномерно крупномасштабно эквивалентны.* □

Равномерно метрически собственное отображение $\Phi\colon X \to Y$ называется *липшицевым*, если $d(\Phi x_1, \Phi x_2) \leqslant C_\Phi d(x_1, x_2)$. Липшицевы отображения являются крупномасштабными, равномерно крупномасштабными и непрерывными. X и Y называются *крупномасштабно липшицево эквивалентными*, если существуют липшицевы отображения $\Phi\colon X \to Y$, $\Psi\colon Y \to X$, удовлетворяющие (2.6). Если, кроме того, $\Psi\Phi$ и $\Phi\Psi$ гомотопны id_X и id_Y соответственно с помощью равномерно собственной липшицевой гомотопии, то X и Y называются (*равномерно собственно*) *липшицево гомотопически эквивалентными*.

Следующее утверждение следует непосредственно из определений.

Утверждение 2.15. *Метрически полулинейное отображение является равномерно крупномасштабным и крупномасштабным. Липшицевы отображения являются крупномасштабными. Поэтому имеют место включения*

$$\begin{aligned}&\text{классы эквивалентности } X \text{ относительно метрически полулинейных изоморфизмов } \subseteq \\ &\quad\subseteq \text{ классы эквивалентности } X \text{ относительно грубых изоморфизмов } = \\ &\quad= \text{ классы эквивалентности } X \text{ относительно крупномасштабных изоморфизмов}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&\text{классы липшицевой гомотопической эквивалентности } X \subseteq \\ &\quad\subseteq \text{ равномерно крупномасштабный липшицев класс } X \subseteq \\ &\quad\subseteq \text{ крупномасштабный класс } X.\end{aligned}$$ □

Множество примеров и пояснений можно найти в [13, 16, 17]. Более того, там же мы определили крупномасштабные равномерные структуры и доказали, что без равномерности расширения эти структуры не могут быть метризуемы.

Ограничимся теперь липшицевыми отображениями (равномерно метрически собственными, как и везде далее) и построим локальную метрику, которая учитывает меру равномерного расширения. Для липшицева отображения $\Phi\colon X \to Y$ определим

$$\operatorname{dil}\Phi := \sup_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ x_1 \neq x_2}} \frac{d(\Phi x_1, \Phi x_2)}{d(x_1, x_2)}.$$

Положим

$$\begin{aligned}&d_{\mathrm{L}}(X, Y) := \\ &\quad := \inf\{\max\{0, \log\operatorname{dil}\Phi\} + \max\{0, \log\operatorname{dil}\Psi\} + \sup_{x \in X} d(\Psi\Phi x, x) + \sup_{y \in Y} d(\Phi\Psi y, y) \mid \\ &\quad \Phi\colon X \to Y,\ \Psi\colon Y \to X \text{ — липшицевы отображения}\},\end{aligned}$$

если $\{\ldots\} \neq \varnothing$ и $\inf\{\ldots\} < \infty$, иначе положим $d_{\mathrm{L}}(X, Y) = \infty$. Тогда $d_{\mathrm{L}} \geqslant 0$, симметрично и $d_{\mathrm{L}}(X, Y) = 0$, если X и Y изометричны. Пусть $\mathfrak{M}_{\mathrm{L}} := \mathfrak{M}/\sim$, где $X \sim Y$, если $d_{\mathrm{L}}(X, Y) = 0$. То, что $\sim$ в действительности является отношением эквивалентности, будет показано в дальнейшем.

Пусть $\delta > 0$, определим

$$V_\delta = \{(X, Y) \in \mathfrak{M}_{\mathrm{L}}^2 \mid d_{\mathrm{L}}(X, Y) < \infty\}.$$

Утверждение 2.16. $\mathfrak{B} = \{V_\delta\}_{\delta > 0}$ *образует базис метризуемой равномерной структуры* $\mathfrak{U}_{\mathrm{L}}(\mathfrak{M}_{\mathrm{L}})$. □

Обозначим через $\mathfrak{M}_{\mathrm{L}}(nc)$ классы некомпактных собственных метрических пространств.

Утверждение 2.17. $\mathfrak{M}_{\mathrm{L}}(nc)$ *является полным относительно ограничения* $\mathfrak{U}_{\mathrm{L}}(\mathfrak{M}_{\mathrm{L}})$ *на* $\mathfrak{M}_{\mathrm{L}}(nc)$. □

Утверждение 2.18. $\bar{\mathfrak{M}}_{\mathrm{L}}(nc) = \mathfrak{M}_{\mathrm{L}}(nc)$ *локально линейно связно.* □

Теорема 2.19. *В* $\mathfrak{M}_{\mathrm{L}}$ *и* $\mathfrak{M}_{\mathrm{L}}(nc)$ *компоненты связности и компоненты линейной связности совпадают.* $\mathfrak{M}_{\mathrm{L}}$ *и* $\mathfrak{M}_{\mathrm{L}}(nc)$ *могут быть представлены в виде* *топологических сумм*

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{L}} = \mathrm{comp}_{\mathrm{L}}(\mathrm{point}) + \sum_{i\in I} \mathrm{comp}_{\mathrm{L}}(X_i),$$
$$\mathfrak{M}_{\mathrm{L}}(nc) = \sum_{i\in I} \mathrm{comp}_{\mathrm{L}}(X_i),$$

где

$$\mathrm{comp}_{\mathrm{L}}(X) = \{Y \in \mathfrak{M}_{\mathrm{L}} \mid d_{\mathrm{L}}(X, Y) < \infty\}.$$

В частности, все компактные пространства лежат в компоненте связности одноточечного пространства. □

Если $d_{\mathrm{L}}(X, Y) < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют собственные отображения $\Phi\colon X \to Y$, $\Psi\colon X \to Y$, такие что

$$\begin{aligned} &d_{\mathrm{L}}(X, Y) < \\ &\quad < \max\{0, \log \operatorname{dil} \Phi\} + \max\{0, \log \operatorname{dil} \Psi\} + \sup_{x\in X} d(\Psi\Phi x, x) + \sup_{y\in Y} d(\Phi\Psi y, y) < \\ &\quad < d_{\mathrm{L}}(X, Y) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Утверждение 2.20. *Предположим, что выполнено* (2.7). *Тогда*

1) Φ *и* Ψ *являются равномерно собственными отображениями*;
2) *если дополнительно* Φ *и* Ψ *являются гомотопическими эквивалентностями, обратными друг к другу, тогда* X *и* Y *равномерно собственно гомотопически эквивалентны.* □

Суть нашего подхода состоит в том, чтобы ограничиться только собственными отображениями, а конечная цель — допускать только собственные липшицевы отображения, поскольку наша «равномерная классификация» означает классификацию именно по этому типу отображений. К счастью, нам повезло, и, как мы видели выше, если отображение является собственным, то оно является и равномерно собственным. Так как условие $d_{\mathrm{L}}(X, Y) < \infty$ эквивалентно тому, что X и Y лежат в одной компоненте Липшица $\mathrm{comp}_{\mathrm{L}}$, то классификация с помощью перестроек с точностью до собственной гомотопической эквивалентности автоматически даёт классификацию с точностью до равномерно собственной липшицевой гомотопической эквивалентности, которую мы назовём равномерной гомотопической эквивалентностью.

Замечание 2.21. Если мы ограничимся рассмотрением компактных метрических пространств, то по теореме Арцела—Асколи условие $d_{\mathrm{L}}(X, Y) = 0$ всегда влечёт, что X изометрично Y.

Поэтому в компактном случае факторизация $\underset{\mathrm{L}}{\sim}$ не является необходимой. Для некомпактных собственных метрических пространств ответ на аналогичный вопрос неизвестен, по крайней мере нам.

Равномерная структура Громова—Хаусдорфа и равномерная структура Липшица являются наиболее важными равномерными структурами в начале нашего подхода. Естественным будет следующее наблюдение: классификация некомпактных собственных метрических пространств должна состоять из двух основных шагов

1) «подсчёт» компонент связности на каждом горизонтальном уровне,
2) «подсчёт» элементов внутри каждой компоненты связности.

Полностью завершённое решение этих двух проблем, т. е. полная классификация с помощью вычислимых и удобных для применения инвариантов, в настоящее время не представляется возможной. Это такая же утопическая идея, как проведение классификации всех топологических пространств. Тем не менее имеет смысл рассматривать задачу определения серии инвариантов, которые хотя бы позволяют (в хороших случаях) увидеть неэквивалентность. Эта задача будет рассмотрена в следующем разделе.

Наконец, заметим, что использование GH-компонент ($d_{\mathrm{GH}}(X,Y)<\infty$) сильно отличается от использования L-компонент ($d_{\mathrm{L}}(X,Y)<\infty$). Грубо говоря, d_{GH} особенно используется в теории бордизмов, поскольку бордизм означает, что многообразия в некотором смысле «геометрически близки друг к другу», а L-компоненты используются в теории перестроек, где необходимы отображения между многообразиями. Ограничим нашу липшицеву равномерную структуру на равномерные CW- или симплициальные комплексы и рассмотрим её достаточно естественное обобщение на векторные расслоения. Напоследок определим одну равномерную структуру, которая будет удобна в последующих рассуждениях:

$$\begin{aligned}
&d_{\mathrm{L,h}}(X,Y):=\\
&\quad:=\inf\Big\{\max\{0,\log\operatorname{dil}\Phi\}+\max\{0,\log\operatorname{dil}\Psi\}+\sup_X d(\Psi\Phi x,x)+\sup_Y d(\Phi\Psi y,y)\mid\\
&\quad\Phi\colon X\to Y,\ \Psi\colon Y\to X \text{ — (равномерно собственные) липшицевы}\\
&\quad\text{гомотопические эквивалентности, обратные друг к другу}\Big\},
\end{aligned}$$

если такие гомотопические эквивалентности существуют, а иначе положим $d_{\mathrm{L},h}(X,Y)=\infty$. Сейчас и в дальнейшем мы будем требовать, чтобы гомотопии отображений с id_X и id_Y соответственно были равномерно собственными и липшицевыми. При этом $d_{\mathrm{L,h}}\geqslant 0$, $d_{\mathrm{L,h}}$ симметрично и $d_{\mathrm{L,h}}(X,Y)=0$, если X и Y изометричны. Определим $\mathfrak{M}_{\mathrm{L,h}}=\mathfrak{M}/{\sim}$, $X\sim Y$, если $d_{\mathrm{L,h}}(X,Y)=0$, и положим

$$V_\delta=\{(X,Y)\in\mathfrak{M}^2_{\mathrm{L,h}}\mid d_{\mathrm{L,h}}(X,Y)<\delta\}.$$

То, что $\sim$ в действительности является отношением эквивалентности, следует из утверждения ниже, которое мы здесь только сформулируем. Доказательство состоит в применении обобщённого неравенства треугольника. Мы ограничим класс допустимых отображений равномерно собственными липшицевыми гомотопическими эквивалентностями.

Утверждение 2.22. $\mathfrak{B}=\{V_\delta\}_{\delta>0}$ *образует базис метризуемой равномерной структуры* $\mathfrak{U}_{\mathrm{L,h}}(\mathfrak{M}_{\mathrm{L,h}})$.

Утверждение 2.23. $\bar{\mathfrak{M}}^{\mathfrak{U}_{\mathrm{L,h}}}_{\mathrm{L,h}}(nc) = \mathfrak{M}_{\mathrm{L,h}}(nc)$. □

Утверждение 2.24. *Если $Y \in \operatorname{arccomp}_{\mathrm{L,h}}(X)$, то X и Y являются (равномерно собственно) липшицево гомотопически эквивалентными. В частности, $d_{\mathrm{L,h}}(X, Y) < \infty$.*

Доказательство. Покроем путь, соединяющий X и Y, конечным числом $d_{\mathrm{L,h}}$-шаров и используем транзитивность гомотопической эквивалентности. □

3. Теории гомологий, приспособленные к открытым многообразиям, теория ограниченных собственных гомотопий и теорема Уайтхеда

На уровне собственных метрических пространств мы представим несколько новых теорий когомологий, а именно: когомологии Громова—Хаусдорфа $H^*_{\mathrm{GH}}(X)$, когомологии Липшица $H^*_{\mathrm{L,b}}(X)$ и несколько функциональных теорий когомологий. Затем будет показано, что

1) $H^*_{\mathrm{GH}}(X)$ являются инвариантом $\operatorname{comp}_{\mathrm{GH}}(X)$;
2) $H^*_{\mathrm{L,b}}(X)$ являются инвариантом $\operatorname{comp}_{\mathrm{L}}(X)$.

Для открытого полного многообразия (M^n, g) имеет место естественное включение

$$\begin{tikzcd} & (M^n, g) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \operatorname{comp}_{\mathrm{L}}(M^n, g) & \text{содержится в} & \operatorname{comp}_{\mathrm{GH}}(M^n, g) \end{tikzcd}$$

Таким образом, первым шагом в нашем подходе для определения инвариантов (обобщённой) компоненты $\operatorname{comp}(X)$ будет определение инвариантов $\operatorname{comp}_{\mathrm{GH}}(X)$ и $\operatorname{comp}_{\mathrm{L}}(X)$. Это будет сделано с помощью когомологий Громова—Хаусдорфа и когомологий Липшица соответственно.

Если мы рассмотрим компоненты $\operatorname{comp}_{\mathrm{GH}}(X)$, $\operatorname{comp}_{\mathrm{L}}(X)$, которые являются более сильными (а значит, меньшими), то мы получим три разумных подхода к построению инвариантов как этих компонент, так и отдельных элементов этих компонент (мы ограничимся равномерными CW-комплексами):

i) (ко)гомологии, которые отражают свойства X в целом, например построенные по равномерно ограниченным равномерно локально конечным (ко)цепям;
ii) (ко)гомологии, которые описывают структуру в бесконечности, так называемые концевые (ко)гомологии;

iii) (ко)гомологии, которые отражают пошаговое изменение (ко)гомологий в концах, если мы движемся к бесконечности внутри концов. Они были исследованы Ф. Т. Фарреллом и Дж. Б. Вагонером в [19] и Л. Р. Тейлором в [46].

Если, например, опустить кручение, то можно определить функциональную версию соответствующих (ко)гомологий. Нас интересуют некомпактные пространства или комплексы, и мы часто будем использовать слово «открытый» вместо слова «некомпактный», подразумевая, что конечной целью является рассмотрение открытых многообразий.

Дж. Роу в [38] определил крупномасштабный комплекс $(CX^*(X), \delta) = (CX^q(X), \delta)_q$ следующим образом:

$$\begin{aligned} CX^q(X) := \{ f \colon X^{q+1} \to \mathbb{R} \mid f & \text{ — локально ограниченная} \\ & \text{борелевская функция и для каждого } R > 0 \\ & \operatorname{supp} f \cap \operatorname{Pen}(\Delta, R) \text{ относительно компактно в } X^{q+1}\}, \\ \delta f(x_0, \ldots, x_{q+1}) := \sum_{i=0}^{q+1} & (-1)^i f(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{q+1}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Тогда крупномасштабные когомологии $HX^*(X)$ пространства X определяются формулой

$$HX^*(X) := H^*\big(CX^*(X)\big).$$

Теорема 3.1. *$HX^*(X)$ являются инвариантом крупномасштабного типа, т. е. крупномасштабные эквивалентности $\Phi \colon X \to Y$, $\Psi \colon Y \to X$ индуцируют изоморфизмы.* □

Следствие 3.2. *$HX^*(X)$ являются инвариантами для всех компонент, более тонких, чем компоненты крупномасштабного типа.* □

Замечание 3.3. Хорошо известно, что без условия на носитель функции

$$\operatorname{supp} f \cap \operatorname{Pen}(\Delta, R) \text{ является относительно компактным} \tag{3.2}$$

комплекс $CX^*(X)$ будет стягиваемым. Если зафиксировать отмеченную точку $\bar{x} \in X$, то отображение

$$D \colon C^q \to C^{q-1}, \quad Df(x_1, \ldots, x_q) := f(\bar{x}, x_1, \ldots, x_q), \tag{3.3}$$

является стягивающей гомотопией. □

Теперь возможно определить каноническим способом теорию когомологий, которая будет являться инвариантом $\operatorname{comp}_{\mathrm{L}}(\cdot)$. Необходимо только выбрать «правильную» категорию. Пусть

$$\begin{aligned} C^q_{\mathrm{L}}(X) = \{ f \colon X^{q+1} \to \mathbb{R} \mid f & \text{ липшицева и} \\ & \operatorname{supp} f \cap \operatorname{Pen}(\Delta, R) \text{ относительно компактно для любого } R\}. \end{aligned}$$

Тогда, если δ определяется формулой (3.1), $C^*_{\mathrm{L}}(X) = (C^q_{\mathrm{L}}(X), \delta)_q$ является комплексом, и мы можем определить

$$H^*_{\mathrm{L}}(X) := H^*\bigl(C^*_{\mathrm{L}}(X)\bigr).$$

Если $\Phi\colon X \to Y$ является (равномерно собственным) липшицевым отображением, то Φ индуцирует $\Phi^{\#}_{\mathrm{L}}\colon C^q_{\mathrm{L}}(Y) \to C^q_{\mathrm{L}}(X)$ по формуле

$$(\Phi^{\#}_{\mathrm{L}} f)(x_0, \dots, x_q) := f(\Phi x_0, \dots, \Phi x_q), \quad f \in C^q_{\mathrm{L}}(Y),$$

и $\Phi^*_{\mathrm{L}}\colon H^*_{\mathrm{L}}(Y) \to H^*_{\mathrm{L}}(X)$.

Используя введённые Дж. Роу антисистемы Чеха и единственность когомологий равномерных резольвент подходящих пучков, как в [38], несложно получить следующий результат.

Теорема 3.4. *Если $Y \in \mathrm{comp}_{\mathrm{L}}(X)$, то существуют $\Phi\colon X \to Y$, $\Psi\colon Y \to X$, индуцирующие обратные к друг другу изоморфизмы*

$$H^*_{\mathrm{L}}(X) \underset{\underset{\Phi^*_{\mathrm{L}}}{\cong}}{\overset{\overset{\Phi^*_{\mathrm{L}}}{\cong}}{\rightleftarrows}} H^*_{\mathrm{L}}(Y). \qquad \square$$

Однако этот подход не даёт удовлетворяющего нас результата, поскольку в действительности мы не определили никаких новых инвариантов, а только рассмотрели категорное ограничение крупномасштабного инварианта. Ситуация быстро меняется, если мы применяем факторизацию или накладываем условия убывания. Рассмотрим, как и прежде, $C^q_{\mathrm{L}}(X)$, и пусть ${}^{\mathrm{b}}C^q_{\mathrm{L}}(X)$ — подпространство ограниченных функций в $C^q_{\mathrm{L}}(X)$ и $C^q_{\mathrm{L,b}}(X) = C^q_{\mathrm{L}}(X)/{}^{\mathrm{b}}C^q_{\mathrm{L}}(X)$. Тогда δ отображает ${}^{\mathrm{b}}C^q_{\mathrm{L}}(X)$ в ${}^{\mathrm{b}}C^{q+1}_{\mathrm{L}}(X)$, т. е. ${}^{\mathrm{b}}C^*_{\mathrm{L}}$ является подкомплексом, и мы получаем комплекс $C^*_{\mathrm{L,b}}(X) = (C^q_{\mathrm{L,b}}(X), \delta)_q$. Определим

$$H^*_{\mathrm{L,b}}(X) := H^*\bigl(C^*_{\mathrm{L,b}}(X)\bigr).$$

Любое (равномерно собственное) липшицево отображение $\Phi\colon X \to Y$ индуцирует $\Phi^{\#}\colon {}^{\mathrm{b}}C^*_{\mathrm{L}}(Y) \to {}^{\mathrm{b}}C^*_{\mathrm{L}}(X)$, а значит, индуцирует $\Phi^{\#}\colon {}^{\mathrm{b}}C^*_{\mathrm{L,b}}(Y) \to {}^{\mathrm{b}}C^*_{\mathrm{L,b}}(X)$ и

$$\Phi^*\colon H^*_{\mathrm{L,b}}(Y) \to H^*_{\mathrm{L,b}}(X).$$

Теорема 3.5. *$H^*_{\mathrm{L,b}}(X)$ является инвариантом $\mathrm{comp}_{\mathrm{L}}(X)$.*

Доказательство. Пусть $Y \in \mathrm{comp}_{\mathrm{L}}(X)$, $d_{\mathrm{L}}(X,Y) < \varepsilon$, $\Phi\colon X \to Y$, $\Psi\colon Y \to X$, $d(\Psi\Phi x, x) < \varepsilon$, $d(\Phi\Psi y, y) < \varepsilon$, и пусть $[f] \in H^q_{\mathrm{L,b}}(X)$. Тогда $(\Psi\Phi)^*[f] = [f]$, поскольку

$$\bigl|\bigl((\Psi\Phi)^{\#} f - f\bigr)(x)\bigr| = |f(\Psi\Phi x) - f(x)| \leqslant C \cdot d(\Psi\Phi x, x) < C \cdot \varepsilon,$$

т. е. $(\Psi\Phi)^{\#} f - f \in {}^{\mathrm{b}}C^q_{\mathrm{L}}(X)$. Здесь $x = (x_0, \dots, x_q)$. Аналогично $(\Phi\Psi)^*[g] = [g]$ для $[g] \in H^q_{\mathrm{L,b}}(Y)$, а Φ^* и Ψ^* являются обратными друг к другу изоморфизмами. $\square$

Замечание 3.6. Если X компактно, то $H^*_{\mathrm{L,b}}(X) = 0$, как и должно быть. $\square$

Пусть Z — собственное метрическое пространство, $f\colon Z \to \mathbb{R}$ — борелевская локально ограниченная функция. Мы будем называть функцию f равномерно локально ограниченной, если для каждого $D > 0$ существует $\delta_f = \delta_f(D) > 0$, такое что $|f(z) - f(z')| < \delta_f$ для любого $z' \in B_D(z)$, причём δ_f не зависит от выбора z. Пусть $C^q_{\mathrm{ulb}}(X) \subset CX^q(X)$ — подпространство всех равномерно локально ограниченных функций $f \in CX^q(X)$. Отображение δ из (3.1) отображает $C^q_{\mathrm{ulb}}(X)$ в $C^{q+1}_{\mathrm{ulb}}(X)$. А значит, мы получаем комплекс $C^*_{\mathrm{GH}}(X) = (C^q_{\mathrm{GH}}(X) = CX^q(X)/C^q_{\mathrm{ulb}}(X), \delta)_q$. Определим

$$H^*_{\mathrm{GH}}(X) := H^*\big(C^*_{\mathrm{GH}}(X)\big).$$

Если $\Phi\colon X \to Y$ является борелевской и метрически полулинейной функцией, то Φ индуцирует $\Phi^\#\colon CX^q(Y) \to CX^q(X)$, $\Phi^\#\colon C^q_{\mathrm{ulb}}(Y) \to C^q_{\mathrm{ulb}}(X)$ (так как $|(\Phi^\# f)(x) - (\Phi^\# f)(x')| = |f(\Phi x) - f(\Phi x')| < \delta_f(D + C_\Phi)$, $d(\Phi x, \Phi x') \leqslant d(x, x') + C_\Phi$, $x = (x_0, \ldots, x_q)$), $\Phi^\#\colon C^*_{\mathrm{GH}}(Y) \to C^*_{\mathrm{GH}}(X)$ и

$$\Phi^*\colon H^*_{\mathrm{GH}}(Y) \to H^*_{\mathrm{GH}}(X).$$

Теорема 3.7. *$H^*_{\mathrm{GH}}(X)$ является инвариантом* $\mathrm{comp}_{\mathrm{GH}}(X)$.

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 3.5, $Y \in \mathrm{comp}_{\mathrm{GH}}(X)$, $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) < \varepsilon$, $\Phi\colon X \to Y$, $\Psi\colon Y \to X$ борелевские и метрически полулинейные. Тогда для $[f] \in H^q_{\mathrm{GH}}(X)$

$$(\Psi\Phi)^\# f - f \in C^q_{\mathrm{ulb}}(X),$$

так как $|f(\Psi\Phi x) - f(x)| \leqslant \delta_f\big(d_{\mathrm{GH}}(X, Y)\big)$. □

Замечание 3.8. Для X, являющимся компактным, $H^*_{\mathrm{GH}}(X) = 0$. □

Обозначим через $C_*(X) = C_*\big(S(X)\big)$ комплекс конечных сингулярных цепей, через $C_{*,\mathrm{lf}}$ комплекс локально конечных сингулярных цепей, через $C_{*,\mathrm{ulf}}$ комплекс равномерно локально конечных сингулярных цепей, через $C_{*,\mathrm{b,lf}}$ комплекс равномерно ограниченных локально конечных сингулярных цепей, через $C_{*,\mathrm{b,ulf}}$ комплекс равномерно ограниченных равномерно локально конечных сингулярных цепей. Тогда мы имеем следующее включение комплексов:

$$C_* \subset C_{*,\mathrm{b,ulf}} \subset C_{*,\mathrm{ulf}} \subset C_{*,\mathrm{lf}}, \quad C_{*,\mathrm{b,lf}} \subset C_{*,\mathrm{lf}}. \tag{3.4}$$

Обозначим соответствующие когомологии через

$$H_*(X),\ H_{*,\mathrm{lf}},\ H_{*,\mathrm{ulf}},\ H_{*,\mathrm{b,lf}},\ H_{*,\mathrm{b,ulf}}. \tag{3.5}$$

В данный момент мы не уточняем выбор коэффициентов. Чаще всего мы будем рассматривать $Z\pi$-коэффициенты или коэффициенты в нормированной абелевой группе G. Нормированная абелева группа — это абелева группа G, на которой задана (не обязательно непрерывная) функция нормы $|\cdot|$,

$$|\cdot|\colon G \to \mathbb{R},$$

такая что индуцированная функция на графе Кэли группы G является неубывающей при удалении от единичного элемента группы G (см. [2]). Гомологии в (3.5) могут быть очень разными.

Пример 3.9. Пусть X — неотрицательный луч с единичными сферами S^1, приклеенными в точках, соответствующих целым положительным числам. Тогда если мы рассмотрим вещественные коэффициенты, то

$$H_1(X) \cong \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}, \quad H_{1,\mathrm{b},\mathrm{lf}}(X) \cong l^{\infty}, \quad H_{1,\mathrm{lf}}(X) \cong \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{R}.$$

Заменяя одномерный остов многообразием, а приклеивания — связными суммами, можно получить сколь угодно сложные примеры. □

Рассматривая коцепи, получаем

$$C_c^* \subset C^{*,\mathrm{b},\mathrm{ulf}} \subset C^{*,\mathrm{lf}} \subset C^{*,\mathrm{lf}} \subset C^*, \quad C_c^* \subset C^{*,\mathrm{b}} \subset C^* \tag{3.6}$$

и соответствующие когомологии. Наконец, определим концевые гомологии

$$H_{*,\varepsilon}(X) = \varprojlim_{C} H_{*,\mathrm{lf}}(X \setminus C) \cong H_*(C_{*,\mathrm{lf}}/C_*) \tag{3.7}$$

и концевые когомологии

$$H_{\varepsilon}^*(X) = \varinjlim_{C} H^*(X \setminus C) \cong H^*(C^*/C_{\mathrm{c}}^*). \tag{3.8}$$

Б. Хьюгс и А. Раницки в [30] обозначили эти (сингулярные) (ко)гомологии в бесконечности $H_{*,\infty}(X)$, $H^{*,\infty}(X)$, где

$$H_{*,\infty}(X) := H_*\big(C_{*,\infty}(X)\big), \quad C_{*,\infty}(X) := \mathcal{C}\big(i\colon C_*(X) \to C_{*,\mathrm{lf}}(X)\big)_{*+1}, \tag{3.9}$$

$\mathcal{C}(\cdot)$ — конус отображения, когомологии определяются аналогично. Полезным инструментом при вычислениях являются функциональные свойства указанных выше гомологий.

Утверждение 3.10. *Имеет место длинная точная последовательность*

$$\ldots \to H_{q,\infty}(X) \to H_q(X) \to H_{q,\mathrm{lf}}(X) \to H_{q-1,\infty}(X) \to \ldots. \tag{3.10}$$

Теперь приведём примеры, которые позволят лучше разобраться с определением $H^{*,\mathrm{b},\mathrm{ulf}}(X)$. Некоторые интересные примеры для случая, когда X является многообразием, можно найти в [2], мы приведём два из них.

Примеры 3.11.

1. $H_{0,\mathrm{b},\mathrm{ulf}}(\mathbb{R})$ является несчётно порождённым $\mathbb{R}$-модулем.
2. Если X является односвязным симметрическим пространством неположительной кривизны ранга r, то $H_{i,\mathrm{b},\mathrm{ulf}}(X) = 0$ при $i \leqslant n - r - 1$ и $H_{i,\mathrm{b},\mathrm{ulf}}(X) \neq 0$ при $i \geqslant n - r$.
3. Если K компактно и $X = K \times [0, \infty[$, то $H_*(X) = H_{*,\infty}(X) = H_*(K)$, $H_{*,\mathrm{lf}}(X) = 0$. Последнее равенство немедленно следует из (3.9).
4. Если K компактно, $n \geqslant 1$, $X = K \times \mathbb{R}^n$, то $H_*(X) = H_*(K)$, $H_{*,\mathrm{lf}} = H_{*-n}(K)$, $H_{*,\infty}(X) = H_*(K \times S^{n-1}) \cong H_*(K) \oplus H_{*-n+1}(K)$.

Утверждение 3.12. *Собственное (а значит, замкнутое) отображение* $\Phi\colon X \to Y$ *между собственными метрическими пространствами* X *и* Y *индуцирует цепные отображения*

$$\Phi_*\colon C_{*,\mathrm{lf}}(X) \to C_{*,\mathrm{lf}}(Y), \quad \Phi_*\colon C_{*,\mathrm{b},\mathrm{lf}}(X) \to C_{*,b,\mathrm{lf}}(Y),$$

а значит, индуцирует морфизмы

$$\Phi_*\colon H_{*,\mathrm{lf}}(X) \to H_{*,\mathrm{lf}}(Y), \quad \Phi_*\colon H_{*,\mathrm{b},\mathrm{lf}}(X) \to H_{*,\mathrm{b},\mathrm{lf}}(Y).$$

Если Φ *дополнительно является равномерно собственным отображением, то оно индуцирует цепное отображение и морфизм* $\Phi_*\colon H_{*,\mathrm{b},\mathrm{ulf}}(X) \to H_{*,\mathrm{b},\mathrm{ulf}}(Y)$.

Из предложения 2.20 можно вывести следующий результат.

Следствие 3.13. *Если* $Y \in \mathrm{comp}_{\mathrm{L}}(X)$, *то существуют* $\Phi\colon X \to Y$, $\Psi\colon Y \to X$, *которые индуцируют гомоморфизмы*

$$\begin{gathered}\Phi_*\colon H_{*,\mathrm{lf}}(X) \to H_{*,\mathrm{lf}}(Y), \quad \Phi_*\colon H_{*,\mathrm{b},\mathrm{lf}}(X) \to H_{*,\mathrm{b},\mathrm{lf}}(Y),\\ \Phi_*\colon H_{*,\mathrm{b},\mathrm{ulf}}(X) \to H_{*,\mathrm{b},\mathrm{ulf}}(Y), \quad \Psi_*\colon H_{*,\mathrm{lf}}(Y) \to H_{*,\mathrm{lf}}(X),\\ \Psi_*\colon H_{*,\mathrm{b},\mathrm{lf}}(Y) \to H_{*,\mathrm{b},\mathrm{lf}}(X), \quad \Psi_*\colon H_{*,\mathrm{b},\mathrm{ulf}}(Y) \to H_{*,\mathrm{b},\mathrm{ulf}}(X). \qquad \square\end{gathered}$$

Следствие 3.14. *Классы изоморфизма групп* $H_{*,\mathrm{lf}}(X)$, $H_{*,\mathrm{b},\mathrm{lf}}(X)$, $H_{*,\mathrm{ulf}}(X)$, $H_{*,\mathrm{b},\mathrm{ulf}}$ *являются инвариантами* $\mathrm{comp}_{\mathrm{L},\mathrm{h}}$.

Доказательство может быть выведено из приведённой в [1, с. 512] конструкции для равномерно собственных липшицевых гомотопических эквивалентностей.

Замечание 3.15. Утверждения 3.10, 3.12—3.14 остаются верными, если заменить H_* на H^*.

Как и следовало ожидать, концевые (ко)гомологии остаются инвариантными при переходе к кокомпактным подпространствам $Y \subseteq X$.

Утверждение 3.16. *Если* $Y \subseteq X$ *является замкнутым кокомпактным подпространством, то вложение* $i\colon C_{*,\infty}(Y) \to C_{*,\infty}(X)$ *является цепной эквивалентностью, а значит,* $H_{*,\infty}(Y) \cong H_{*,\infty}(X)$. $\square$

Замечание 3.17. Очевидно, что классические гомотопические инварианты, например сингулярные (ко)гомологии, также являются инвариантами $\mathrm{arccomp}_{\mathrm{L},\mathrm{h}}(\cdot)$. $\square$

В некоторых случаях мы ввели в рассмотрение комбинаторные L_p-(ко)гомологии, их свойства инвариантности, cup- и cap-произведения в L_p-теории, форму пересечения в L_2-гомологиях для комбинаторных гомологических многообразий. Мы отсылаем читателя к [14, 16]. Здесь же мы очень кратко перечислим основные понятия и результаты, имеющие место для функциональных комбинаторных L_p-(ко)гомологий.

Пусть K — локально ориентированный симплициальный комплекс и $\sigma^q \in K$. Обозначим

$$I(\sigma^q) = \#\{\tau^{q+1} \in K \mid \sigma < \tau^{q+1}\}, \quad I_q(K) := \sup_{\sigma^q \in K} I(\sigma^q).$$

Комплекс K называется равномерно локально конечным в размерности q, если $I_q(K) < \infty$. Если это условие выполнено для всех q, то K называется равномерно локально конечным (в любой размерности). Последнее эквивалентно условию $I_0(K) < \infty$. В дальнейшем предположим, что K является равномерно локально конечным. Пусть для $1 \leqslant p < \infty$

$$C^{q,p}(K) = \left\{ c = \sum_{\sigma^q \in K} c_\sigma \cdot \sigma \;\middle|\; c_\sigma \in \mathbb{R},\ \sum_\sigma |c_\sigma|^p < \infty \right\} -$$

это банахово пространство всех вещественных p-суммируемых q-коцепей. Тогда продолжение d по линейности

$$d\sigma^q = \sum_{\tau^{q+1}} [\tau^{q+1} \colon \sigma^q] \tau^{q+1}$$

является ограниченным линейным оператором $d\colon C^{q,p} \to C^{q+1,p}$,

$$d\Big(\sum c_\sigma \sigma\Big) = \sum_{\tau^{q+1}} \bigg(\sum_{\sigma^q < \tau^{q+1}} [\tau \colon \sigma] c_\sigma \bigg) \tau^{q+1},$$

и мы получаем банахов коцепной комплекс $(C^{*,p}, d)$. Его когомологии $H^{*,p}(K)$ называются симплициальными L_p-когомологиями,

$$H^{q,p}(K) = Z^{q,p}/B^{q,p} = \ker(d\colon C^{q,p} \to C^{q+1,p}) / \operatorname{im}(d\colon C^{q-1,p} \to C^{q,p}).$$

Тогда $\bar{H}^{q,p}(K) = Z^{q,p}/\bar{B}^{q,p}$ называются приведёнными симплициальными L_p-когомологиями. Для $p = 2$ имеем, что $C^{q,2}(K)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $\langle c, c' \rangle = \sum_{\sigma^q} c_\sigma \cdot c'_\sigma$, и мы получаем гильбертов комплекс $C^{*,2}(K)$. Мы отсылаем читателя к [14,16], где можно найти много простых доказательств и интересных геометрических примеров. Пусть

$$\begin{aligned}
&C_{*,p} = (C^{*,p}, \partial),\\
&\partial\sigma^q = \sum_{\tau^{q-1}} [\sigma^q \colon \tau^{q-1}] \tau^{q-1},\\
&\partial\Big(\sum c_\sigma \sigma\Big) = \sum_{\tau^{q-1}} \bigg(\sum_{\sigma^q > \tau^{q-1}} [\sigma : \tau] c_\sigma \bigg) \tau^{q-1}, \quad \text{т. е.} \ \ \partial = d^*, \ -
\end{aligned}$$

банахов комплекс p-суммируемых вещественных цепей, а $H_{*,p}(K)$ и $\bar{H}_{*,p}(K)$ — соответствующие L_p-гомологии и приведённые L_p-гомологии соответственно.

Лемма 3.18. *Если $H^{q,p}(K) \neq \bar{H}^{q,p}(K)$, то существует бесконечное число линейно независимых классов когомологий в $H^{q,p}$, образы которых в $\bar{H}^{q,p}$ равны нулю, т. е. $\dim\big(\ker(H^{q,p} \to \bar{H}^{q,p})\big) = \infty$. Аналогичное утверждение верно для L_p-гомологий.* □

Следствие 3.19. *Если $\dim H^{q,p}(K) < \infty$, то $H^{q,p}(K) = \bar{H}^{q,p}(K)$. Аналогичное утверждение верно для гомологий.* □

Замечание 3.20. $H^{q,p}(K)$ снабжено канонической топологией, а именно фактор-топологией. Но если $B^{q,p}$ не является замкнутым, то точки в $H^{q,p}(K)$ не замкнуты. В частности, любая точка $0 \neq \bar{b} + B^{q,p} \in H^{q,p}$, $\bar{b} \in \bar{B}^{q,p} \setminus B^{q,p}$, принадлежит замыканию $\bar{0} \subset H^{q,p}$. □

Для $p = 2$ имеем, что $\partial_{q-1}\colon C^{q,2} \to C^{q-1,2}$ является $\langle,\rangle$-сопряжённым к $d_{q-1}\colon C^{q-1,2} \to C^{q,2}$. Тогда $\Delta_q(K) := d_{q-1}\partial_{q-1} + \partial_q d_q$ — это корректно определённый ограниченный оператор $\Delta_q\colon C^{q,2}(K) \to C^{q,2}(K)$ и $\mathcal{H}^q(K) \equiv$ $\equiv \mathcal{H}^{q,2}(K) := \ker \Delta_q(K)$ — это гильбертово подпространство гармонических L_2-коцепей (гармонических L_2-цепей).

Лемма 3.21.

1. *$c \in \mathcal{H}^{q,2}(K)$ тогда и только тогда, когда $dc = \partial c = 0$.*
2. *Существует ортогональное разложение*

$$C^{q,2} = \mathcal{H}^q(K) \oplus \overline{dC^{q-1,2}} \oplus \overline{\partial C^{q+1,2}}.$$

3. *Существуют канонические топологические изоморфизмы*

$$\mathcal{H}^q \cong \bar{H}^{q,2}(K) \cong \bar{H}_{q,2}(K).$$ □

Обозначим через $\sigma\bigl(\Delta_q(K)\bigr)$ спектр, а через σ_e существенный спектр.

Лемма 3.22. *Следующие условия эквивалентны*:

1) $\operatorname{im}\partial_q$ *и* $\operatorname{im}\partial_{q-1}$ *замкнуты*;
2) $\operatorname{im} d_q$ *и* $\operatorname{im} d_{q-1}$ *замкнуты*;
3) $\operatorname{im}\Delta_q(K)$ *замкнут*;
4) $0 \notin \sigma_e(\Delta_q(K)|_{(\ker \Delta_q)^\perp})$;
5) $H^{q,2}(K) = \bar{H}^{q,2}(K)$ *и* $H^{q+1,2}(K) = \bar{H}^{q+1,2}(K)$;
6) $H_{q,2}(K) = \bar{H}_{q,2}(K)$ *и* $H_{q-1,2}(K) = \bar{H}_{q-1,2}(K)$. □

Пример 3.23. Пусть $K = S^1 \times \mathbb{R}$ и на K задана инвариантная относительно сдвигов равномерно локально конечная триангуляция. Тогда $\bar{H}_{1,2}(K) = (0)$, $\dim H_{1,2}(K) = \infty$, т. е. условие 4) не выполнено. □

Несложно установить инвариантность функциональных когомологий относительно подразбиений конечной степени (однако проверка этого занимает много времени). Доказательство этого в той или иной степени аналогично доказательству в классическом случае. Мы ввели и обсудили в [14, 16] комбинаторные и аналитические числа пересечений L_2-когомологиях и обобщённую сигнатуру. За дальнейшими подробностями мы отсылаем читателя к [14, 16].

Как было упомянуто во введении, мы рассматриваем ориентированные открытые римановы многообразия (M^n, g), имеющие ограниченную геометрию. Пусть σ^n — криволинейный n-симплекс в M^n. Мы определим заполненность $\theta(\sigma)$ формулой $\theta(\sigma) = \operatorname{vol}(\sigma)/\bigl(\operatorname{diam}(\sigma)\bigr)^n$. Рассмотрим гладкую триангуляцию

$$T\colon |K| \xrightarrow{\cong} M^n,$$

удовлетворяющую следующим условиям:

а) существует такое $\theta_0 > 0$, что для каждого криволинейного симплекса $\sigma^n \in K$ заполненность удовлетворяет неравенству $\theta(\sigma) \geqslant \theta_0$;

б) существуют такие константы $c_1 > c_2 > 0$, что для каждого σ^n выполнено неравенство
$$c_2 \leqslant \mathrm{vol}(\sigma) \leqslant c_1;$$

в) существует константа $c > 0$, такая что для каждой вершины $v \in K$ барицентрическая координатная функция $\varphi_v\colon M \to R$ удовлетворяет условию $|\nabla\varphi_v| \leqslant c$.

Если предположить, что выполнено условие а), то условие б) эквивалентно выполнению оценки $d_{\inf}(K) \leqslant \mathrm{diam}(\sigma^q) \leqslant d_{\sup}(K)$ для всех $\sigma^q \in K$, $q > 0$. Здесь K отождествляется с $T(K)$, $|T(K)| = M$ — с метрикой длины из M. Условия а) и б) эквивалентны ограниченности объёмов снизу и диаметров сверху. Триангуляции, удовлетворяющие условиям а)—в), будем называть равномерными.

Хорошо известна следующая лемма.

Лемма 3.24. *Любое многообразие (M^n, g), имеющее ограниченную геометрию, допускает равномерную триангуляцию.* $\square$

Замечание 3.25. Из условий а) и б) немедленно следует, что равномерная триангуляция равномерно локально конечна.

Предположим теперь, что многообразия (M^n, g), (N^n, h) как выше снабжены равномерными триангуляциями $K = K_M$, $L = L_N$.

Теорема 3.26. *Равномерно собственная ограниченная гомотопическая эквивалентность между M и N индуцирует топологические изоморфизмы*

$$H_{*,p}(K) \xleftrightarrow{\cong} H_{*,p}(L), \tag{3.11}$$
$$\bar{H}_{*,p}(K) \xleftrightarrow{\cong} \bar{H}_{*,p}(L), \tag{3.12}$$
$$H^{*,p}(K) \xleftrightarrow{\cong} H^{*,p}(L), \tag{3.13}$$
$$\bar{H}^{*,p}(K) \xleftrightarrow{\cong} \bar{H}^{*,p}(L). \tag{3.14}$$

$\square$

Мы можем доказать эту теорему на метризованном комбинаторном уровне. Для метризованного равномерно локально конечного симплициального комплекса важную роль играет равномерность.

Теорема 3.27. *Пусть K, L — равномерно метризованные равномерно локально конечные комбинаторно гомологичные n-многообразия, $f\colon |K| \rightleftarrows |L| : g$ — равномерно собственные липшицевы гомотопические эквивалентности* (*по определению это влечёт, что гомотопии в $H_{|K|}$, $H_{|L|}$ являются равномерно собственными липшицевыми*). *Тогда они индуцируют топологические изоморфизмы* (3.11)—(3.14). $\square$

Теперь кратко напомним, как осуществляется переход от комбинаторных к аналитическим L_p-когомологиям. За деталями мы отсылаем читателя к [22]. Пусть (M^n, g) — полное многообразие, $T\colon |K| \to M$ — равномерно локально конечная триангуляция, удовлетворяющая условию

$$|dT| \leqslant C_1, \quad |dT^{-1}| \leqslant C_2, \tag{3.15}$$

которое означает, что для любого симплекса $\sigma \in K$ и каждой точки $x \in \sigma$ выполнено $|dT|_\sigma(x)| \leqslant C_1$, $\left|dT^{-1}\big(T(x)\big)\right| \leqslant C_2$, C_1, C_2 не зависят от выбора σ и x. Это условие инвариантно относительно стандартных подразбиений. Имеет место хорошо известное преобразование Уитни, которое симплексу σ^q ставит в соответствие

$$W(\sigma^q) = w_\sigma := q! \sum_{i=0}^{q} (-1)^i x_i dx_0 \wedge \ldots \wedge \hat{d}x_i \wedge \ldots \wedge dx_q,$$

где x_i — барицентрические координаты. $H^{*,p}(M)$ и $\bar{H}^{*,p}(M)$ обозначают, как обычно, аналитические неприведённые и приведённые L_p-когомологии соответственно.

Теорема 3.28. *Если $T\colon |K| \to (M^n, g)$ является равномерно локально конечным и удовлетворяет* (3.15), *то W индуцирует топологические изоморфизмы*

$$H^{*,p}(K) \to H^{*,p}(M), \tag{3.16}$$

$$\bar{H}^{*,p}(K) \to \bar{H}^{*,p}(M). \tag{3.17}$$

□

Замечание 3.29.

1. Как хорошо известно, Й. Додзюк доказал это в [9] для случая $p = 2$, приведённого случая и равномерных триангуляций.
2. Условия равномерной локальной конечности и (3.15) гораздо слабее, чем условие равномерности. Существуют простые примеры метрик g, для которых не выполнено (I), но которые допускают равномерно локально конечные триангуляции, удовлетворяющие (3.15).
3. Равномерные триангуляции удовлетворяют (3.15).
4. Преобразование Уитни в (3.16), (3.17) даже сохраняет форму пересечения в гомологиях. □

Один из главных наших результатов, устанавливающих глубокую связь между равномерно собственным гомотопическим типом и спектральной теорией, следующий.

Теорема 3.30. *Пусть (M^n, g), (N^n, h) — открытые ориентированные многообразия, допускающие равномерно локально конечные триангуляции $T_M\colon |K_M| \to M$, $T_N\colon |L_N| \to N$, $f\colon M \rightleftarrows N :g$ — равномерно собственная липшицева гомотопическая эквивалентность и $0 \leqslant q \leqslant n$. Тогда*

$$\inf \sigma_e\big(\Delta_q(M)|_{(\ker \Delta_q)^\perp}\big) > 0 \tag{3.18}$$

верно тогда и только тогда, когда

$$\inf \sigma_e\bigl(\Delta_q(M)|_{(\ker \Delta_q)^\perp}\bigr) > 0, \tag{3.19}$$

т. е. существование спектрального зазора является равномерно собственным гомотопическим инвариантом многообразий, допускающих триангуляцию.

За доказательством мы отсылаем читателя к [14].

Следствие 3.31. *Для многообразий (M^n, g), удовлетворяющих (I), (B_k), $r \geqslant k > n/2 + 1$, спектральный зазор* (3.18) *является равномерно собственным липшицевым гомотопическим инвариантом, в частности, является равномерно собственным $\Omega^{2,r}(.,.)$-гомотопическим инвариантом.* □

Мы также приведём следующий результат, не обсуждая деталей. Здесь $\mathfrak{M}^{2,r}_{\mathrm{L,h}}(\mathrm{mf}, I, B_k)$ — это пополнение равномерной структуры по соболевской норме, определённое только для многообразий (см. [17]).

Теорема 3.32.

1. *Спектральный зазор над нулём является инвариантом $\mathrm{comp}^{2,r}_{\mathrm{L,h}}(M, g) \subset \subset \mathfrak{M}^{2,r}_{\mathrm{L,h}}(\mathrm{mf}, I, B_k)$.*
2. *Аналитическая L_2-форма пересечения и обобщённая L_2-сигнатура, если они определены, являются инвариантами $\mathrm{comp}^{2,r}_{\mathrm{L,h}}(M, g)$.* □

Теперь мы кратко изложим гомологический и гомотопический подход Ф. Т. Фаррелла, Л. Р. Тейлора, Дж. Б. Вагонера, описывающий «изменение» гомологий и гомотопий по мере движения внутри концов к бесконечности. За подробностями и доказательствами мы отсылаем читателя к [19, 46]. В дальнейшем мы будем рассматривать равномерные CW-комплексы. Равномерный CW-комплекс — это такой конечномерный равномерно локально конечный метризованный CW-комплекс K, что ограничение метрики на открытую клетку совпадает с точностью до квазиизометрии с евклидовой метрикой с константами, не зависящими от выбора клетки. CW-комплекс K называется сильно локально конечным, если K можно покрыть конечными подкомплексами локально конечным способом. Если эти подкомплексы могут быть выбраны так, что количество клеток в каждом комплексе равномерно ограничено, то K называется равномерно сильно локально конечным.

Лемма 3.33. *Если K — равномерный CW-комплекс, то K равномерно сильно локально конечный.*

Утверждение немедленно следует из доказательства теоремы 1.4 в [19].

В категории сильно локально конечных CW-комплексов и собственных отображений верны теорема о продолжении гомотопии и теорема о клеточной аппроксимации.

Утверждение 3.34. *Пусть K и M — сильно локально конечные CW-комплексы, $L \subset K$ — подкомплекс и $f\colon K \to M$ — собственное отображение, такое что ограничение $f|_L$ является клеточным. Тогда f собственно гомотопно клеточному отображению g, причём гомотопия неподвижна на L.* □

Доказательства можно найти в [19, с. 3—5].

Если X, Y являются равномерными CW-комплексами и $f\colon X \to Y$ — собственное отображение, то напомним, что мы называем f равномерно собственным, если для любого $S > 0$ существует такое $R = R(S)$, что $f^{-1}\Big(B_S\big(f(x)\big)\Big) \subset \subset B_R(x)$ для всех $x \in X$. Таким образом, получаем равномерно собственную категорию. (Равномерно) собственное отображение $f\colon X \to Y$ между сильно локально конечными CW-комплексами является (равномерно) собственной гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда включение $X \hookrightarrow M_g$ является (равномерно) собственной гомотопической эквивалентностью, где M_g — цилиндр любого клеточного отображения $g\colon X \to Y$, (равномерно) собственно гомотопного f. По этой причине в дальнейшем мы иногда будем ограничиваться включениями $X \hookrightarrow Y$. Обозначим через $\mathcal{S}$ категорию множеств с отмеченной точкой и отображений, сохраняющих отмеченную точку. Для набора $S = \{S_\alpha\}_\alpha$, $S_\alpha \in \mathcal{S}$, определим

$$\mu(S) := \prod_\alpha S_\alpha/\!\sim,$$

где $\{S_\alpha\}_\alpha$ и $\{T_\alpha\}_\alpha$ эквивалентны, если они не совпадают для не более чем конечного числа α. Если каждое S_α является группой, то отмеченная точка должна быть единичным элементом. В этом случае

$$\mu(S) = \prod_\alpha S_\alpha / \bigoplus_\alpha S_\alpha$$

снова является группой. Морфизм $f = \{f_\alpha\colon S_\alpha \to T_\alpha\}$ индуцирует морфизм $\mu(f)\colon \mu(S) \to \mu(T)$, где $\mu(f)$ является гомоморфизмом, если каждое отображение f_α является гомоморфизмом. Мы иногда будем писать $\mu(S) = \mu_\alpha(S)$ в случаях, когда будет нужно указать индекс.

Для локально конечного CW-комплекса X обозначим через $\{p\} = \{p_i\}_{i\in I}$ множество отмеченных точек, т. е. для компакта $C \subset X$ каждая некомпактная компонента $X \setminus C$ содержит элемент $\{p\}$ и каждое подмножество $\{p\}$ с этим свойством имеет такую же мощность, как $\{p\}$.

Если G — один из стандартных функторов, используемых в алгебраической топологии, со значениями в группе или множестве, то положим для компактного $C \subset X$, $p \in \{p\}$

$$G(C,p) := \begin{cases} G(X \setminus C, p), & \text{если } p \in X \setminus C, \\ e, & \text{если } p \notin X \setminus C, \end{cases}$$

и рассмотрим $\mu\big(G(C,p)\big)$. Для $C \subset D$ имеем морфизм $\mu\big(G(D,p)\big) \hookrightarrow \mu\big(G(C,\{p\})\big)$ и определим

$$\varepsilon(X,\{p\};G) := \varprojlim_C \mu\big(G(C,p)\big).$$

Последней конструкцией в [19] является конструкция $\Delta(X,\{p\};G)$, обратного образа диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Delta(X,\{p\};G) & \longrightarrow & \prod\limits_p G(\varnothing,p) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \\ \varepsilon(X,\{p\};G) & \xrightarrow[\mathrm{pr}_1]{} & \mu\big(G(\varnothing,\{p\})\big) \end{array}.$$

Здесь pr_1 — проекция из $\varepsilon(X,\{p\};G) := \varprojlim\limits_C \mu\big(G(C,\{p\})\big)$ на первый вектор по модулю $\sum\limits_{p\in\{p\}} G(,p)$ и pr_2 — каноническая проекция из $\prod\limits_{p\in\{p\}} G(\varnothing,p)$ на $\prod\limits_{p\in\{p\}} G(\varnothing,p)/\sum\limits_{p\in\{p\}} G(\varnothing,p)$.

Замечания 3.35.

1. ε и Δ могут быть вычислены с помощью кофинальной последовательности компактов.
2. Во всех интересующих нас случаях класс изоморфизма ε и Δ не зависит от выбора множества отмеченных точек $\{p\}$. $\square$

Слой в Δ состоит из всех пар вида

$$(\text{строка в } \varepsilon(X,\{p\};G),\ \text{семейство } (\alpha_p) \in G(\varnothing,p)_p),$$

таких что строка заканчивается в том же элементе $\prod\limits_{p\in\{p\}} G(\varnothing,p)/\sum\limits_{p\in\{p\}} G(\varnothing,p)$, куда и проецируется семейство $(\alpha_p)_p$.

Естественное преобразование функторов $G \to H$ индуцирует морфизм $\Delta(X,\{p\};G) \to \Delta(X,\{p\};H)$.

Теперь мы дадим несколько другое, но полностью эквивалентное описание $\varepsilon(X,\{p\};G)$ и $\Delta(X,\{p\};G)$, которое было представлено в [46]. Пусть

$$Q := \{(g_p)_p \mid g_p \in G(C_p,p),\ p \in X \setminus C_p$$
$$\text{и каждый компакт } C \text{ содержится в } C_p \text{ для всех } p, \text{ кроме конечного числа}\}.$$

Будем писать $(g'_p)_p \sim_\varepsilon (g''_p)_p$, если существует семейство $(g_p)_p$, такое что для всех p, кроме конечного числа,

1) $C_p \subset C'_p$ и $C_p \subset C''_p$;
2) при отображениях $G(C'_p,p) \to G(C_p,p)$ и $G(C''_p,p) \to G(C_p,p)$ g'_p и g''_p переходят в g_p.

Будем говорить, что $(g'_p) \sim_\Delta (g''_p)$, если эти условия выполняются для всех p. Тогда $\varepsilon(X,\{p\};G) = Q/\sim_\varepsilon$ и $\Delta(X,\{p\};G) = Q/\sim_\Delta$.

Теорема 3.36.

1. *$\varepsilon(X,\{p\};G) = 0$ тогда и только тогда, когда для любого компакта $C \subset X$ существует такой компакт $D \supset C$, что для всех отмеченных точек в $p \in X \setminus D$ $G(D,p) \to G(C,p)$ является нулевым гомоморфизмом.*

2. $\Delta(X, \{p\}; G) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\varepsilon = 0$ *и* $G(\varnothing, p) = 0$ *для всех* $p \in \{p\}$.

Доказательство. $\varepsilon = 0$ тогда и только тогда для некоторого индекса C все строки обратной системы совпадают. Это в точности первое условие. $\Delta = 0$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon = 0$ и $\prod\limits_p G(\varnothing, p) = 0$. □

Собственное отображение $f\colon X \to Y$ будем называть *собственно* 0*-связным*, если X и Y связны и индуцированное отображение $H^0_\varepsilon(Y) \to H^0_\varepsilon(X)$ является изоморфизмом.

Если $f\colon X \to Y$ собственно 0-связно, $\{p\}$ — множество отмеченных точек X, то $\{f(p)\}$ — множество отмеченных точек Y. Изменяя при необходимости $\{p\}$, можно добиться того, чтобы $f\colon \{p\} \to \{f(p)\}$ было биекцией. Тогда f индуцирует морфизм

$$\varepsilon f_*\colon \varepsilon(X, \{p\}; G) \to \varepsilon(Y, \{f(p)\}; G)$$

с помощью набора отображений $G(f^{-1}(C), p) \to G\big(C, f(p)\big)$, где множества $f^{-1}(C)$ с компактным C являются кофинальными в Y. Тогда εf_* индуцирует отображение

$$\Delta f_*\colon \Delta(X, \{p\}; G) \to \Delta(Y, \{f(p)\}; G).$$

В классической теории перестроек рассматривают, чтобы применить подходящую теорему Уайтхеда, гомологию $H_*(M; Z\pi_1)$ с коэффициентами в $Z\pi_1$-расслоении, ассоциированном с универсальным накрытием, как $Z\pi_1$-модуль изоморфным $H_*(\widetilde{M}, Z)$. Для открытых CW-комплексов X и исчерпания $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ изначально непонятно, какое накрытие $X \setminus C_i$ следует выбрать. По этой причине мы определим, следуя [19], понятие накрывающего функтора следующим образом. Функтор $\sim$ ставит в соответствие каждому компакту $(C, p) \subset X$, $p \in \{p\}$, $p \in X \setminus C$, такую подгруппу $\pi(C, p) \subset \pi_1(X \setminus C, p)$, что $i_*\big(\pi(D, p)\big) \subset \pi(C, p)$, если $C \subset D$, где $i_*\colon \pi(D, p) \to \pi_1(X \setminus C, p)$ — гомоморфизм, индуцированный включением $X \setminus D \subset X \setminus C$. Для каждого компактного подмножества $C \subset X$ и отмеченной точки $p \in \{p\}$, лежащей в $X \setminus C$, пусть $\varrho\colon \widetilde{X \setminus C} \to X \setminus C$ — накрытие компоненты связности $X \setminus C$, содержащей p, которое соответствует подгруппе $\pi(C, p) \subset \pi_1(X \setminus C, p)$. Пусть $\tilde{p} \in \widetilde{X \setminus C}$ — такое поднятие p, что $\varrho_*\pi_1(\widetilde{X \setminus C}, \tilde{p}) = \pi(C, p)$. Если $C \subset D$, то $i_*\pi(D, p) \subset \pi(C, p)$ и существует единственное отображение $\tilde{i}\colon \widetilde{X \setminus D} \to \widetilde{X \setminus C}$, которое накрывает включение $i\colon X \setminus D \hookrightarrow X \setminus C$ и отображает $\tilde{p} \in \widetilde{X \setminus D}$ в $\tilde{p} \in \widetilde{X \setminus C}$. Для накрывающего функтора $\sim$ пространства X и выбора поднятия $\{\tilde{p}\}$ определим $\varepsilon(X, \{p\}; G, \sim)$ и $\Delta(X, \{p\}; G, \sim)$, используя $G(C, p) := G(\widetilde{X \setminus C}, \tilde{p})$. Они независимы от выбора поднятий $\{\tilde{p}\}$ of $\{p\}$ с точностью до изоморфизма. Функторы $\sim'$ and $\sim''$ называются предэквивалентными, если существует кофинальный набор таких компактных подмножеств $\{C_\alpha\}$ в X, что $\varnothing \in \{C_\alpha\}$ и $C_\alpha \in \{C_\alpha\}, p \in \{p\}$ влекут $\pi'(C_\alpha, p) = \pi''(C_\alpha, p)$. Эквивалентность порождается предэквивалентностью. Эквивалентные накрывающие функторы $\sim'$ и $\sim''$ дают естественные изоморфизмы

$$\varepsilon(X,\{p\};G,\sim') \cong \varepsilon(X,\{p\};G,\sim'')$$

и

$$\Delta(X,\{p\};G,\sim') \cong \Delta(X,\{p\};G,\sim'').$$

Для дальнейших приложений мы приведём следующие утверждения.

Примеры 3.37.

1. $\pi(C,p) = \pi_1(X \setminus C)$, поэтому $\widetilde{X \setminus C} = X \setminus C$ и $\tilde{p} = p$. В дальнейшем мы будем обозначать соответствующий накрывающий функтор $\mathrm{no\ cov}$.
2. $\pi(C,p)$= тривиальная группа. Тогда $\widetilde{X \setminus C}$ — это универсальное накрытие компоненты $X \setminus C$, содержащей p. Мы обозначим накрывающий функтор univ.

Теперь мы кратко рассмотрим основные инструменты классической алгебраической топологии, такие, как относительные гомотопические группы, точные последовательности и теорема Гуревича, для нашего случая Δ-групп. Пусть $A \hookrightarrow X$ собственно 0-связно, p — множество отмеченных точек для A и X, $\sim$ — накрывающий функтор на X, $\pi_C\colon \widetilde{X \setminus C} \to X \setminus C$ — ассоциированное отображение накрытия и обозначим $\overline{A \setminus C} = \pi_C^{-1}\big(Y_p \cap (A \setminus C)\big)$, где $\mathrm{range}(\pi_C) = Y_p$. Тогда для $k \geqslant 1$ определим

$$\Delta(X,A;\{p\};\pi_k,\sim) \quad \text{с помощью} \quad G(C,p) = \pi_k(\widetilde{X \setminus C}, \overline{A \setminus C}; \tilde{p}),$$

$$\Delta(X,A;\{p\};H_k,\sim) \quad \text{с помощью} \quad G(C,p) = H_k(\widetilde{X \setminus C}, \overline{A \setminus C})$$

и для $k \geqslant 2$

$$\Delta(X,A;\{p\};\pi'_k,\sim) \quad \text{с помощью} \quad G(C,p) = \pi'_k(\widetilde{X \setminus C}, \overline{A \setminus C}),$$

где π'_k — это π_k по модулю действия $\pi_1(\overline{A \setminus C}, \tilde{p})$. Наконец, мы определим

$$\Delta\left(X,A;p;\bigoplus_{k\geqslant 1}\pi_k,\sim\right) \quad \text{с помощью} \quad G(C,p) = \bigoplus_{k\geqslant 1}\pi_k(\widetilde{X \setminus C}, \overline{A \setminus C}; \tilde{p}).$$

Используя эти обозначения, мы немедленно получаем стандартные необходимые условия для того, чтобы отображение $f\colon X \to Y$ являлось собственной гомотопической эквивалентностью, которые представлены в следующей теореме.

Теорема 3.38. *Пусть $f\colon X \to Y$ — собственная гомотопическая эквивалентность, $\sim$ и $-$ — накрывающие функторы X и Y соответственно, такие что $\sim$ эквивалентен $f^*(-)$, и пусть $G = \pi_k$ или $G = H_k$. Тогда εf_* и Δf_* являются изоморфизмами.* □

Мы будем называть включение $A \hookrightarrow X$ собственно n-связным, если оно собственно 0-связно и $\Delta(X,A;p;\pi_k,\mathrm{no\ cov}) = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant n$. Выбрав накрывающий функтор $\sim$, положим $\Delta_k^\pi(X) := \Delta(X;p;\pi_k,\sim)$ и $\Delta_k^\pi(X,A) := \Delta(X,A;p;\pi_k,\sim)$.

Теорема 3.39. *Пусть пара* (X, A) *собственно* 1*-связна,* $\sim$ — *накрывающий функтор для* X. *Предположим, что* Δ_k^π *уважает накрывающий функтор в* A, *индуцированный вложением* $A \hookrightarrow X$. *Тогда существует длинная точная последовательность*

$$\to \Delta_k^\pi(A) \to \Delta_k^\pi(X) \to \Delta_k^\pi(X, A) \to \Delta_{k-1}^\pi(A) \to \\ \to \Delta_{k-1}^\pi(X) \to \ldots \to \Delta_1^\pi(A) \to \Delta_1^\pi(X) \to 1.$$

Аналогичная точная последовательность имеет место для Δ*-гомологий.* $\square$

Положим $\Delta_k^{\pi'}(X, A) = \Delta(X, A; \{p\}; \pi_k', \sim)$ и $\Delta_k^h(X, A) = \Delta(X, A; \{p\}; H_k, \sim)$. Для дальнейших приложений нам понадобится следующая теорема.

Теорема 3.40. *Пусть пара* (X, A) *собственно* 0*-связна. Предположим, что выполнены следующие условия*:

1) $\Delta(A; \{p\}; \pi_1, \mathrm{no\ cov}) \to \Delta(X; \{p\}; \pi_1, \mathrm{no\ cov})$ *является изоморфизмом*;
2) $\Delta(X, A; \{p\}; \pi_1, \sim) \to \prod\limits_p \pi_1(A, p)$ *является мономорфизмом*;
3) $\Delta(X, A; \{p\}; H_k, \sim) = 0$, *где* $\sim$ — *это функтор* no cov.

Тогда (X, A) *является собственно* n*-связным для* $n \geqslant 1$.

Доказательство можно найти в [19].

В дальнейшем без потери общности мы ограничимся рассмотрением случая собственно 0-связного включения $A \subset X$. Приведём собственную теорему Уайтхеда, которую можно найти в [19].

Теорема 3.41. *Предположим, что* $\dim(X \setminus A) = n < \infty$. *Тогда* A *является собственным деформационным ретрактом* X *только и только тогда, когда*

а) $\Delta(X, A; \{p\}; \pi_k, \mathrm{no\ cov}) = 0$ *для* $1 \leqslant k \leqslant n$ *или*
б) $\Delta(A; \{p\}; \pi_1, \mathrm{no\ cov}) \to \Delta(X; \{p\}; \pi_1, \mathrm{no\ cov})$ *является изоморфизмом и* $\Delta(X, A; \{p\}; H_k, \mathrm{univ}) = 0$ *для* $1 \leqslant k \leqslant n$. $\square$

Ясно, что условия а) и б) являются необходимыми условиями. Доказательство импликации б) $\Longrightarrow$ а) не является сложным и использует теоремы 3.38—3.40 и индукцию. Основная задача состоит в том, чтобы доказать, что из условия а) следует, что A является собственным деформационным ретрактом X. За доказательством мы отсылаем читателя к [19].

Приведём также другую версию теоремы.

Теорема 3.42. *Пусть пара* (X, A) *строго локально конечна. Тогда* A — *собственный деформационный ретракт* X *тогда и только тогда, когда*

$$\Delta\Bigl(X, A; \{p\}; \bigoplus_{k \geqslant 1} \pi_k, \mathrm{no\ cov}\Bigr) = 0. \qquad \square$$

Подробности можно найти в [19].

Для дальнейших приложений нам будет полезно переформулировать теоремы 3.41 и 3.42 следующим образом.

Теорема 3.43. *Пусть X, Y — локально конечные, конечномерные CW-комплексы, $f\colon X \to Y$ — собственно 0-связное отображение, через $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ обозначим универсальные накрытия над X и Y соответственно, а через $H_c^*(\dot{})$ обозначим когомологии с компактным носителем. Предположим, что*

$$\Delta(X, \{p\}; \pi_1, \mathrm{no\ cov}) \to \prod_p \pi_1(X, p)$$

является изоморфизмом. Тогда f является собственной гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда

1) *отображение $f_*\colon \Delta(X, \{p\}; \pi_1, \mathrm{no\ cov}) \to \Delta(Y, \{f(p)\}; \pi_1, \mathrm{no\ cov})$ является изоморфизмом;*
2) *$f_*\colon H_*(\tilde{X}) \to H_*(\tilde{Y})$ и $f^*\colon H_c^*(\tilde{Y}) \to H_c^*(\tilde{X})$ являются изоморфизмами.*

Доказательство можно найти в [19].

Эта теорема имеет два замечательных следствия для случая устойчивых концов. За информацией об устойчивости концов мы отсылаем читателя к [43].

Следствие 3.44. *Пусть X и Y — связные, конечномерные, локально конечные CW-комплексы, каждый из которых имеет конечное число устойчивых концов, пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — концы X, $e_1, \ldots, e_m$ — концы Y. Предположим, что $n = m$ и что $\pi_1\varepsilon_i$ отображается мономорфно в $\pi_1(X)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $f\colon X \to Y$ — собственное отображение. Предположим, что f отображает конец ε_i в конец e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда f является собственной гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда*

1) *f индуцирует изоморфизм $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ и $\pi_1\varepsilon_i \cong \pi_1 e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$;*
2) *f индуцирует изоморфизм из $H_*(\tilde{X})$ в $H_*(\tilde{Y})$ и из $H_c^*(\tilde{Y})$ в $H_c^*(\tilde{X})$.* □

Следствие 3.45. *Пусть X и Y — связные, конечномерные, локально конечные CW-комплексы, которые односвязны и односвязны на бесконечности, пусть $f\colon X \to Y$ — собственное отображение. Тогда f является собственной гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда f индуцирует изоморфизмы $H_*(X) \cong H_*(Y)$ и $H_c^*(Y) \cong H_c^*(X)$.* □

Необходимо проверить, что выполнены условия теоремы 3.43. Следствие 3.45 немедленно вытекает из следствия 3.44.

Мы снова ограничимся случаем CW-включений $i\colon X \subset Y$ конечномерных локально конечных CW-комплексов, где в приложениях Y обозначает цилиндр M_f собственно 0-связного отображения $f\colon X \to Z$, и потребуем, чтобы включение $i\colon X \hookrightarrow Y$ являлось собственной гомотопической эквивалентностью. Будем называть $i\colon X \hookrightarrow Y$ собственной гомотопической эквивалентностью в ∞, если существует собственная гомотопия h_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, отображения id_Y, неподвижная на X, такая что $h_1(Y)$ лежит в объединении X и компакта. Тогда ясно, что собственное включение $X \subset Y$ является собственной гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда оно является обычной гомотопической эквивалентностью и собственной гомотопической эквивалентностью в ∞. Это разделение условий важно для выполнения перестройки, т. е. для двухступенчатого препятствия к перестройке, которое было предложено С. Момари, или одноступенчатого препятствия к перестройке согласно Л. Р. Тейлору и формулировкам [19] с использованием вышеприведённой теоремы 3.43 и теорем, следующих за ней.

Следуя [42], мы рассмотрим следующие условия.

$(\pi_1)_\infty$ $X \hookrightarrow Y$ индуцирует гомеоморфизм концевых пространств (т. е. является собственно 0-связным) и эквивалентность обратных систем фундаментальных групп в окрестностях ∞.

Пусть Y' — коконечный подкомплекс Y, и пусть $X' = Y' \cap X$. Тогда рассмотрим следующее условие.

$(\pi)_*$ Существует коконечный подкомплекс $Y'' \subset Y'$, такой что отображение $\pi_*(Y'', X'') \to \pi_*(Y', X')$, где $X'' = Y'' \cap X$, является нулевым отображением. Здесь $\pi_*(Y'', X'')$ — семейство групп (множеств), индексированных α, если $\{(Y''_\alpha, Y''_\alpha \cap X'')\}_\alpha$ — соответствующее семейство компонент связности, аналогично для (Y', X').

(H_*) Существует коконечный подкомплекс $Y'' \subset Y'$, такой что отображение $H_*(\tilde{Y}'', \tilde{X}'') \to H_*(\tilde{Y}', \tilde{X}')$ является нулевым. Здесь $\tilde{Y}''$ — универсальное накрытие и $\tilde{X}''$ — его часть над X'' и т. д.

$(H_{\star,\varepsilon})$ Концевые когомологии $H_{\star,\varepsilon}(Y', X')$ нулевые.

(C_*) Для каждой компоненты Y'_α в Y' цепной комплекс $C_*(\tilde{Y}'_\alpha, \tilde{X}'_\alpha)$ цепно гомотопически эквивалентен над групповым кольцом $Z[\pi_1 Y'_\alpha]$ конечно порождённому проективному комплексу.

Будем говорить, что выполнено $(\pi_*)_\infty$, если (π_*) выполнено для некоторого коконечного Y' в каждой окрестности ∞ в Y. Аналогично определяются условия $(H_*)_\infty$, $(H^{\star,\varepsilon})_\infty$ и $(C^\star)_\infty$. Если $(\ )_\infty$ выполнено, то $(\ )$ выполнено для каждого коконечного Y'.

Каждое из этих четырёх условий является собственным гомотопическим инвариантом пары (Y, X).

Теперь мы можем охарактеризовать собственную гомотопическую эквивалентность в ∞.

Теорема 3.46. *Пусть (Y, X) — пара локально конечных CW-комплексов, таких что $Y \setminus X$ конечномерно и выполнено условие $(\pi_1)_\infty$. Тогда $X \hookrightarrow Y$ является собственной гомотопической эквивалентностью в ∞ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: $(\pi_\star)_\infty$, или $(H_\star)_\infty$, или $(H_{\star,\varepsilon})_\infty$ и $(C_*)_\infty$. В частности, в этом случае условия $(\pi_\star)_\infty$, $(H_\star)_\infty$ и $(H_{\star,\varepsilon})_\infty$ и $(C_\star)_\infty$ эквивалентны.* □

За доказательством мы отсылаем читателя к [42].

Преимуществом теоремы 3.46 является то, что она расщепляет условие «быть собственной гомотопической эквивалентностью на бесконечности». Получение препятствия к перестройке в этом случае было основной задачей С. Момари в [31, 32]. В заключение мы отметим, что мы установили условия для собственной гомотопической эквивалентности и собственной гомотопической эквивалентности на бесконечности, но мы ищем условия для равномерных гомотопических эквивалентностей. Ответ на этот тонкий вопрос во многом зависит от начальной ситуации, т. е. от отображений, входящих в определение липшицевой компоненты, а также от способа проведений $\mathfrak{bg}$-перестройки. Пользуясь утверждением 2.20, мы можем сделать вывод, что ограниченная собственная гомотопическая эквивалентность между CW-комплексами внутри липшицевой компоненты является равномерно собственной.

4. Теория бордизмов открытых многообразий, сигнатура в K-теории и её инвариантность

Одной из частей любой классификации открытых многообразий должна быть теория бордизмов, в нашем случае она должна учитывать риманову метрику (или компоненту в пространстве метрик) на исследуемых многообразиях и бордизмах, поскольку мы нацелены на приложения к анализу на многообразиях. Иначе говоря, классификация должна учитывать метрическую величину, метрический размер (M^n, g). Этот факт играет важную роль для нашего подхода к теории бордизмов.

Как мы уже несколько раз отмечали, наш подход к классификации можно легко объяснить. Первым шагом мы определяем метризуемые равномерные структуры на множестве классов изометрии собственных метрических пространств, в частности на множестве (открытых) полных римановых многообразий. Далее мы вводим обобщённые компоненты, определённые конечным расстоянием между ними. Возникает естественная задача «подсчёта» компонент и элементов внутри этих компонент. «Подсчёт» компонент был частично осуществлён в теоремах первой половины предыдущего раздела с использованием нескольких (несимплициальных) теорий (ко)гомологий. «Подсчёт» многообразий внутри компоненты был частично выполнен с помощью ε- и Δ-(ко)гомологий, для которых, более того, выполнена теорема Уайтхеда, приспособленная к наличию концов. Мы продолжим «подсчёт» элементов внутри компонент в этом разделе, используя теорию бордизмов, а начнём мы с очень краткого изложения теории бордизмов для открытых многообразий. Значимым результатом нам представляется теорема 4.36, которая утверждает, что сигнатура в K-теории является инвариантом класса бордизма в нашей теории бордизмов ограниченной геометрии.

Пусть (M^n, g), (M'^n, g') — открытые, ориентированные, метрически полные многообразия. Будем говорить, что (M^n, g) бордантно (M'^n, g'), если существует ориентированное метрически полное многообразие (B^{n+1}, g_B) с границей ∂B, такое что

1) $(\partial B, g_B|_{\partial B}) \cong (M, g) \cup -(M', g')$; здесь $\cong$ обозначает изометрию;

2) существует равномерный риманов воротник $\Phi\colon \partial B \times [0,\delta[\cong U_\delta(\partial B) \subset B$, $\Phi^*(g_B|_{U_\delta(\partial B)}) = g_{\partial B} + dt^2$;
3) существует такое $R = R_B > 0$, что $B \subseteq U_R(M)$, $B \subset U_R(M')$.

В этом случае будем писать $(M,g) \underset{\mathrm{b}}{\sim} (M',g')$; (B^{n+1}, g_B) называется бордизмом.

Лемма 4.1. $\underset{\mathrm{b}}{\sim}$ *является отношением эквивалентности.* $\square$

Обозначим класс эквивалентности (бордизма) многообразия (M,g) через $[M,g]$.

Лемма 4.2. $[M \cup M',\, g \cup g'] = [M \# M', g \# g']$. $\square$

Замечание 4.3. Многообразие $(M \# M',\, g \# g')$ не определено однозначно метрически, но класс бордизма определён однозначно. $\square$

Лемма 4.4. *Сложение*

$$[M,g] + [M',g'] := [M \cup M', g \cup g'] = [M \# M', g \# g']$$

корректно определено, поэтому на множестве всех классов $[M^n,g]$ существует структура абелевой полугруппы. $\square$

Обозначим через Ω_n^{nc} соответствующую группу Гротендика, т. е. группу бордизмов всех ориентированных открытых полных римановых многообразий. Здесь 0 порождён диагональю Δ и $-\big[[M,g],[M',g']\big] = \big[[M',g'],[M,g]\big]$.

Замечания 4.5.

1. Условие 3) выглядит как условие $d_{\mathrm{GH}}(M,M') \leqslant R$, где d_{GH} — расстояние Громова—Хаусдорфа. Но это не всегда верно, так как из условий 1) и 2) не следует, что $\partial B = M \cup M'$ изометрически вкладывается относительно метрики длины на B. При этом ∂B изометрично вложено как риманово многообразие, но его внутренняя метрика длины не будет совпадать с метрикой длины на B, даже если ∂B является вполне геодезическим многообразием, как следует из условия 2). Условие 3) фактически означает, что $d_{\mathrm{GH}}(M,M') \leqslant R$, т. е. $M' \in \mathrm{gen\ comp}_{\mathrm{GH}}(M)$, если мы предположим, что выполнено наше условие (GH), которое означает, что метрика длины на B, ограниченная на ∂B, и внутренняя метрика длины на ∂B совпадают с точностью до константы.
2. Класс бордизма (M,g) не зависит от выбора g, по крайней мере в наших предположениях. Если g' — другая полная метрика на M, то (M,g) и (M,g') бордантны в следующем смысле. Пусть $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ — гладкая и убывающая функция, $\varphi = 1$ на $[0,\delta]$, $\varphi = 0$ на $[1-\delta,1]$, $0 < \delta < 1/2$. Тогда $(B,g_B) = (M \times [0,1], g_B)$, где $g_B(x,t) = \varphi(t)g(x) + (1-\varphi)(t)g'(x)$, является бордизмом между (M^n,g) и (M^n,g'). $\square$

Не существует, по крайней мере насколько нам известно, никакого разумного подхода к вычислению Ω_n^{nc}, поскольку Ω_n^{nc} слишком велика.

Основательный подход требует получения хотя бы частичных решений некоторых из следующих задач:

1) геометрическая реализация 0 и $-[M, g]$;
2) характеризация с помощью характеристических чисел;
3) геометрическое описание независимых образующих.

В дальнейшем мы представим и обсудим несколько теорий бордизмов, которые частично удовлетворяют поставленным требованиям. Первой такой теорией бордизмов является теория бордизмов с компактным носителем. Для бордизма (B^{n+1}, g_B) между (M^n, g) и (M'^n, g') с компактным носителем мы потребуем, чтобы по-прежнему выполнялись вышеприведённые условия 1) и 2), а также потребуем выполнения следующего условия:

3 cs) существует такое компактное подмногообразие $C^{n+1} \subset B^{n+1}$, что $\big(\overline{B \setminus C}, g_B|_{\overline{B\setminus C}}\big)$ является произведением бордизмов, т. е.

$$\big(\overline{B \setminus C}, g_B|_{\overline{B\setminus C}}\big) \cong \Big(\big(\overline{M \setminus C}\big) \times [0,1], g|_{\overline{M\setminus C}} + dt^2\Big).$$

3 cs) влечёт вышеприведённое условие 3) (после компактной замены метрики). Будем писать $\underset{\mathrm{b,cs}}{\sim}$ для обозначения соответствующего бордизма. Соответствующую группу бордизмов (группу Гротендика) будем обозначать $\Omega_n^{nc}(\mathrm{cs})$. На первый взгляд задача нахождения $\Omega_n^{nc}(\mathrm{cs})$ или по крайней мере характеризации классов бордизмов кажется очень сложной. Однако мы увидим, что это не так. Мы определим равномерные структуры, которые очень похожи на те, которые были введены в разделе 2. Будем писать $(M^n, g) \underset{\mathrm{iso,rel}}{\sim} (M'^n, g')$, если дополнения к компактам K и K' изометричны, причём изометрия не фиксирована. Обозначим через $[(M^n, g)]_{\mathrm{iso,rel}}$ соответствующий класс эквивалентности. Если зафиксировать (M_1, g_1), то иногда удаётся получить хорошее представление об элементах в $[(M_1^n, g)]_{\mathrm{iso,rel}}$.

Пример 4.6. Пусть $(M_1, g_1) = (\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{standard}})$. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между $[(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{standard}})]_{\mathrm{iso,rel}}$ и

$$\{(M^n, g) \mid M^n \text{ — замкнутое многообразие, } g \text{ является плоской в кольце, содержащемся в шаровой окрестности точки}\}. \quad \square$$

Этот пример можно обобщить следующим образом.

Теорема 4.7. *Каждый класс $[(M^n, g)]_{\mathrm{iso,rel}}$ содержит не более чем счётное число классов диффеоморфизма.* $\square$

Таким образом, если зафиксировать (M, g), кажется, что классификация классов диффеоморфизма элементов в $[(M^n, g)]_{\mathrm{iso,rel}}$ сводится к решаемой «счётной дискретной» задаче. Это действительно так в некотором смысле.

Теперь мы свяжем вычисление $\Omega_n^{nc}(\mathrm{cs})$ с обобщёнными компонентами $[(M^n, g)]_{\mathrm{iso,rel}}$.

Замечание 4.8. Если $(M_1, g_1), (M_2, g_2) \in [(M^n, g)]_{\mathrm{iso,rel}}$, то, вообще говоря, $(M_1, g_1) \# (M_2, g_2) \notin [(M^n, g)]_{\mathrm{iso,rel}}$. $\square$

Пусть

$$\Omega_n^{nc}(\mathrm{cs}, [(M^n, g)]_{\mathrm{iso,rel}}) \subset \Omega_n^{nc}(\mathrm{cs}) —$$

это подгруппа, порождённая

$$\{[M', g']_{\mathrm{cs}} \mid (M', g') \in [(M^n, g)]_{\mathrm{iso,rel}}\}.$$

Мы будем знать $\Omega_n^{nc}(\mathrm{cs})$, если мы будем знать все подгруппы группы $\Omega_n^{nc}(\mathrm{cs}, [(M^n, g)]_{\mathrm{iso,rel}})$, и мы будем знать $\Omega_n^{nc}(\mathrm{cs}, [(M^n, g)]_{\mathrm{iso,rel}})$, если мы будем знать соответствующее порождающее множество. К счастью, элементы такого множества определены их (относительными) характеристическими классами. В [17] мы представили полное вычисление $\Omega_n^{nc}(\mathrm{cs}, [(M^n, g)]_{\mathrm{iso,rel}})$ и, в частности, получили следующий результат.

Утверждение 4.9. *По модулю кручения (которое корректно определено на Ω_n-уровне) $\Omega_n^{nc}(\mathrm{cs}, M^n) = 0$ для $n \neq 4k$ и для $n = 4k$*

$$[M \# P^{2i_1}(\mathbb{C}) \times \ldots \times P^{2i_k}(\mathbb{C}), g_{M \# P^{2i_1}(\mathbb{C}) \times \ldots \times P^{2i_k}(\mathbb{C})}]$$

являются независимыми образующими $\Omega_n^{nc}(\mathrm{cs}, M^n)$ над $\mathbb{Q}$, где $i_1 + \ldots + i_k = k$. □

Как было отмечено ранее, любая полноценная теория должна быть развита в трёх направлениях.

1. Желательна удобная характеризация классов бордизма.
2. Желательна возможность представить множества независимых образующих, как минимум для пересечения с обобщёнными компонентами.
3. Желательна геометрическая реализация нулевого и обратного элементов.

Общая группа бордизмов Ω_n^{nc} не удовлетворяет ни одному из этих трёх условий. $\Omega_n^{nc}(\mathrm{cs})$ удовлетворяет первым двум условиям. Ниже мы представим теорию бордизмов, которая будет удовлетворять второму и третьему требованию. Это будет теория бордизмов для многообразий, имеющих конечное число концов, каждый из которых является нерасширяющимся. Поскольку в ней имеются существенные фрагменты теории бордизмов ограниченной геометрии, мы только кратко опишем эту теорию бордизмов.

Пусть (M^n, g), $({M'}^n, g')$ — открытые, ориентированные многообразия, удовлетворяющие (I) и (B_k). Будем говорить, что (M^n, g) является (I), (B_k)-бордантным $({M'}^n, g')$, если существует такое ориентированное многообразие (B^{n+1}, g_B) с границей ∂B, что выполнены следующие условия:

1) $(\partial B, g_B|_{\partial B}) = (M, g) \cup -(M', g')$;
2) существует $\delta > 0$, такое что $\exp\colon U_\delta(0_\nu) \to U_\delta(\partial B)$ является $(k+1)$-биограниченным диффеоморфизмом, т. е. существует «равномерный воротник» ∂B. Здесь 0_ν обозначает нулевое сечение внутреннего нормального расслоения $\nu = \nu(\partial B)$ к ∂B в B;
3) g_B удовлетворяет (B_k) на B и (I) на $B \setminus U_{1/2}(\partial B)$;
4) существует такое $R > 0$, что $B \subseteq U_R(M)$ и $B \subseteq U_R(M')$.

В этом случае будем писать $(M,g) \underset{\mathrm{b,bg}}{\sim} (M',g')$ и $[M,g]_{\mathrm{bg}}$ или $[M,g]_{\mathrm{bg},k}$ для обозначения класса бордизма.

Лемма 4.10. *Предположим, что* $(M,g) \underset{\mathrm{b,bg}}{\sim} (M',g')$ *посредством* (B,g_B). *Тогда существуют* $\delta_1 > 0$ *и* $\tilde g_B$, *такие что* $(M,g) \underset{\mathrm{b,bg}}{\sim} (M',g')$ *посредством* $(B,\tilde g_B)$, $\tilde g_B|_{U_{\delta_1}(\partial B)} = g_{\partial B} + dt^2$.

Следствие 4.11. *Без потери общности мы всегда можем предположить, что воротник* ∂B *является метрическим произведением.* □

Следствие 4.12. $\underset{\mathrm{b,bg}}{\sim}$ *является отношением эквивалентности.* □

Лемма 4.13. $[M \cup M', g \cup g']_{\mathrm{bg},k} = [M\#M', g\#g']_{\mathrm{bg},k}$. *Положим*

$$[M,g]_{\mathrm{bg},k} + [M',g']_{\mathrm{bg},k} := [M \cup M', g \cup g']_{\mathrm{bg},k} = [M\#M', g\#g']_{\mathrm{bg},k}.$$

Тогда операция + *корректно определена, множество*

$$\{[M,g]_{\mathrm{bg},k} \mid (M^n,g) \text{ — открытое ориентированное многообразие и выполнены условия } (I) \text{ и } (B_k)\}$$

становится абелевой полугруппой. □

Для $k = \infty$ мы получаем группу бордизмов $\Omega_n^{nc}(I, B_\infty)$. Достаточно естественным образом мы можем определить $\Omega_n^{nc}(B_\infty)$. Существует естественная обратная система

$$\ldots \to \Omega_n^{nc}(I, B_{k+1}) \to \Omega_n^{nc}(I, B_k) \to \ldots \to \Omega_n^{nc}(I, B_0).$$

Легко получить, что $\Omega_n^{nc}(I, B_\infty) = \varprojlim \Omega_n^{nc}(I, B_k)$.

К сожалению, мы не можем вычислить $\Omega_n^{nc}(I, B_k)$. Ситуация значительно изменится, если мы наложим геометрическо-топологические условия на ∞ для рассматриваемых многообразий M^n и для бордизмов. Первым важным классом, который будет рассмотрен, является класс многообразий с конечным числом концов, каждый из которых является нерасширяющимся. Опишем его следующим образом.

Пусть ε — изолированный конец риманова многообразия (M^n, g). Луч в ε — это геодезическая γ, определённая на $[0,\infty[$, являющаяся кратчайшей геодезической между любыми двумя своими точками и такая, что любая окрестность ε содержит $|\gamma|$ полностью, кроме конечного сегмента. Тогда следующее утверждение выполняется для любой окрестности ε.

Лемма 4.14. *Пусть* ε — *изолированный конец многообразия* (M^n, g).

1. *Существует луч в* ε.
2. *Если* (M^n, g) *дополнительно удовлетворяет условию* (I), *то существует луч в* ε *с равномерно толстой окрестностью.*

Доказательство. Доказательство первого утверждения можно найти, например, в [18, с. 43]. Второе утверждение немедленно следует из первого и (I). □

Мы будем называть конец ε многообразия (M^n, g) нерасширяющимся, если существуют луч γ в ε и такие число $R = R_M > 0$ и элемент $G \in \varepsilon$, что $G \subseteq U_R(|\gamma|)$, или, менее формально, $\varepsilon \subseteq U_R(|\gamma|)$.

В дальнейшем мы ограничимся открытыми многообразиями, удовлетворяющими (I), $B(_\infty)$, с конечным числом концов, каждый из которых является нерасширяющимся.

Примеры 4.15.

1. Рассмотрим сферу $S_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ радиуса r и
$$\mathrm{chc}^n(r) := (S_r^{n-1} \times [0, \infty[\cup D_r^n, g_{\mathrm{st}}),$$
т. е. закрытую половину бесконечного цилиндра радиуса r со стандартной метрикой g_{st}, которая должна быть метрикой произведения на $S_r^{n-1} \times [0, \infty[$, гладко продолженной на приклеенный диск D_r^n, и обладать стандартной ориентацией. Тогда $\mathrm{chc}^n(r)$ является открытым многообразием с одним нерасширяющимся концом, которое удовлетворяет условиям (I), (B_∞).
2. $\mathop{\#}\limits_{i=1}^{k} \mathrm{chc}(r_i)$ имеет конечное число нерасширяющихся концов.
3. Любое многообразие $(M^n = M' \cup \partial M' \times [0, \infty[, g_M)$, где M' компактно и $g_M|_{\partial M' \times [a,\infty[} = dt^2 + g_{\partial M'}$, удовлетворяет (I), (B_∞) и имеет конечное число нерасширяющихся концов.
4. Аналогичное утверждение останется верным, если мы позволим метрике g_M из 3 меняться в пределах $\mathrm{comp}^{p,r}(g_M) \cap C^\infty$.
5. Если мы рассмотрим M как в 3 и гладкого типа, а также метрику $g_M|_{\partial M' \times [a,\infty[} = dt^2 + f(t)^2 g_{\partial M'}$ с $c_2 \geqslant f(t) \geqslant c_1 > 0$, $f^{(\nu)}/f$ ограниченным для всех ν, $t \geqslant a$, то тогда M имеет конечное число нерасширяющихся концов. □

Сейчас мы определим немного усиленное отношение бордизма.

Пусть (M^n, g), (M'^n, g') будут как раньше, каждое с конечным числом нерасширяющихся концов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ и $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{s'}$ соответственно. Обозначим соответствующие им лучи $\gamma_{M,1}, \ldots, \gamma_{M,s}$ и $\gamma_{M',1}, \ldots, \gamma_{M',s'}$, как и раньше. Из того что $(M, g) \underset{\mathrm{bg}}{\sim} (M', g')$ и все концы нерасширяющиеся, следует, в частности, что для любого достаточно большого компакта $C^{n+1} \subset B^{n+1}$ существует такое $R = R_B > 0$, что
$$B^{n+1} \setminus C^{n+1} \subset \bigcup_1^s U_R(|\gamma_{M,\sigma}|), \quad B^{n+1} \setminus C^{n+1} \subset \bigcup_1^{s'} U_R(|\gamma_{M',\sigma'}|).$$
В дополнение к этому условия мы потребуем аддитивной совместимости γ-расстояния и $(B \setminus C)$-расстояния для точек x_γ, y_γ на γ. А именно, существуют $C^{n+1} \subset B^{n+1}$ и $c > 0$, такие что для $x_\gamma, y_\gamma \in |\gamma| \setminus C$ выполняется
$$d_\gamma(x_\gamma, y_\gamma) - c \leqslant d_{B \setminus C}(x_\gamma, y_\gamma) \leqslant d_\gamma(x_\gamma, y_\gamma) + c. \tag{GH}$$

Здесь γ обозначает $\gamma_{M,1},\ldots,\gamma_{M,s}$, $\gamma_{M',1},\ldots,\gamma_{M',s'}$ соответственно, а $d(\cdot,\cdot)\equiv \equiv \operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$, $d_\gamma(x_\gamma,y_\gamma)$ — расстояние, вычисленное в γ.

Мы будем обозначать $(M,g)\underset{\mathrm{ne}}{\sim}(M',g')$, если они bg-бордантны и их бордизм (B,g_B) удовлетворяет (GH).

Замечания 4.16.

1. Правое неравенство (GH) очевидно выполнено. Мы добавили его только из соображений симметрии.
2. Значение условий (GH) и (GH_1) показал автору Томас Шик, он же предложил включить их в определение бордизма. □

Вместо (GH) рассмотрим следующее условие. Существуют такие $C^{n+1}\subset \subset B^{n+1}$ и $c'>0$, что для всех $x,y\in U(\varepsilon)$ выполнено

$$d_{U(\varepsilon)}(x,y)-c'\leqslant d_{B\setminus C}(x,y)\leqslant d_{U(\varepsilon)}(x,y)+c'. \qquad (\mathrm{GH}_1)$$

Здесь ε обозначает $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s$, $\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_{s'}$, а $U(\varepsilon)$ — окрестность ε, $U(\varepsilon)\cap C=\varnothing$.

Лемма 4.17. *(GH) и (GH_1) эквивалентны.*

Доказательство может быть найдено в [15].

Замечание 4.18. Из (GH_1) немедленно вытекает, что $d_{\mathrm{GH}}\Big(\overline{B\setminus C},\overline{U(\varepsilon)}\Big)< <\infty$, где $d_{\mathrm{GH}}(\cdot,\cdot)$ — расстояние Громова—Хаусдорфа между собственными метрическими пространствами. Это вытекает из того, что $d_{\mathrm{GH}}\Big(\overline{B\setminus C},\overline{U(\varepsilon)}\Big)<\infty$, если мы введём на $\overline{U(\varepsilon)}$ индуцированную метрику длины и используем соотношение $\overline{B\setminus C}\subset U_R\big(U(\varepsilon)\big)$. Затем используем соотношение

$$d_{\mathrm{GH}}\Big(\big(U(\varepsilon),\text{её собственная метрика длины}\big),\\ \big(U(\varepsilon),\text{индуцированная метрика длины}\big)\Big)<\infty,$$

которое следует из (GH_1). По сути, мы ввели условие (GH), чтобы быть уверенными, что $d_{\mathrm{GH}}\Big(\overline{B\setminus C},\overline{U(\varepsilon)}\Big)<\infty$. □

Утверждение 4.19. $\underset{\mathrm{ne}}{\sim}$ *является отношением эквивалентности.*

Доказательство очень длинное и сложное, поэтому за ним мы отсылаем читателя к [15].

$\Omega_n^{nc}(\mathrm{ne})\equiv\Omega^{nc}(f_e,\mathrm{ne},b_g)$ снова определяется как группа Гротендика. Далее мы представим геометрическую реализацию 0 и $-[M,g]_{\mathrm{ne}}$ в $\Omega_n^{nc}(\mathrm{ne})$.

Пусть (M^n,g), как и выше, — это ориентированное многообразие с (I), (B_∞) с конечным число концов $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s$, каждый из которых является нерасширяющимся. Пусть ε — это один из концов, $C\subset M$ компактно и настолько большое, что ε определено одной из компонент $M\setminus C$, $U_\varepsilon\subset M\setminus C$ — это окрестность, а γ — это луч в $U(\varepsilon)$. Пусть γ допускает наличие трубчатой окрестности радиуса $\delta_3>0$. Рассмотрим $(B,g_B)=(M\times I,g_M+dr^2)$. Тогда $\varepsilon\times I=\{U_j(\varepsilon)\times I\}_{j\in J}$ — это конец $M\times I$, $U(\varepsilon\times I)=U(\varepsilon)\times I$ — окрестность, не пересекающаяся с $C_{M\times I} = C\times I$, и для $0<\delta_1<1$ кривая $\gamma_{\delta_1} = \gamma\times\{\delta_1\} = (\gamma,\delta_1)$ является лучом в $U(\varepsilon\times I)$. Конец $\varepsilon\times I$ является нерасширяющимся, а γ_{δ_1} допускает трубчатую окрестность радиуса $\delta_2>0$, $T_{\delta_2}(\gamma_{\delta_1})$.

Теорема 4.20. *$\partial T_{\delta_2}(\gamma_{\delta_1})$ имеет ограниченную геометрию, один нерасширяющийся конец, и выполнено следующее условие:*

$$\partial T_{\delta_2}(\gamma_{\delta_1}) \underset{\mathrm{ne}}{\sim} \mathrm{chc}^n(\delta_2), \quad \delta_2>0. \qquad \square$$

Как мы увидим, $(\mathrm{chc}^n(\delta), g_{\mathrm{st}})$ будет играть роль нулевого элемента в $\Omega_n^{nc}(\mathrm{ne})$.

Лемма 4.21.

1. *Для* $r_1<r_2$ *справедливо* $\mathrm{chc}^n(r_1) \underset{\mathrm{ne}}{\sim} \mathrm{chc}^n(r_2)$.
2. $\Big[\mathop{\#}\limits_{i=1}^{k} \mathrm{chc}^n(r_i)\Big]_{\mathrm{ne}} = [\mathrm{chc}^n(r)]_{\mathrm{ne}}$ *для* $r>r_1+\ldots+r_k$.

Теорема 4.22. *Для любого ориентированного многообразия (M^n,g) , имеющего ограниченную геометрию и конечное число концов, каждый из которых является нерасширяющимся, выполнено следующее условие:*

$$[M^n,g]_{\mathrm{ne}} = [(M^n,g)\cup(\mathrm{chc}^n(r),g_{\mathrm{st}})]_{\mathrm{ne}}. \tag{4.1}$$

Теорема 4.23. $\Omega_n^{nc}(\mathrm{ne}) \equiv \Omega_n^{nc}(\mathrm{bg},\mathrm{ne})$ *является абелевой группой с* $-[M^n,g]_{\mathrm{ne}} = [(-M^n,g)]_{\mathrm{ne}}$ *и* $0=[\mathrm{chc}^n(r),g_{\mathrm{st}}]_{\mathrm{ne}}$. $\square$

Нашей следующей целью является построение независимых образующих $\Omega_n^{nc}(\mathrm{ne})$. Как мы увидим в дальнейшем, бесконечные связные суммы комплексных проективных пространств (или их декартовы произведения) и будут давать такие элементы. Пусть $P^{2k}(\mathbb{C})$ — комплексное проективное пространство со стандартной ориентацией и метрикой Фубини—Штуди, зафиксируем две точки z_1,z_2 и построим с помощью конкретно выбранных сфер вокруг z_1,z_2 линейную бесконечную связную сумму

$$M^{4k} = (M^{4k},g) = \mathop{\#}\limits_{1}^{\infty} P^{2k}(\mathbb{C}), \tag{4.2}$$

всегда с одной и той же метрикой склейки. Тогда (M^{4k},g) является ориентированным многообразием, имеет ограниченную геометрию и один конец, который является нерасширяющимся.

Теорема 4.24. $M^{4k} = \mathop{\#}\limits_{1}^{\infty} P^{2k}(\mathbb{C})$ *определяет ненулевой класс бордизма в* $\Omega_{4k}^{nc}(\mathrm{ne})$.

Доказательство содержит несколько нетривиальных составляющих, поэтому мы вынуждены его пропустить.

Как обычно, обозначим сигнатуру компактного ориентированного многообразия через $\sigma(M^n)$.

Теорема 4.25. *Пусть (M^{4k},g) — открытое ориентированное многообразие, имеющее ограниченную геометрию и конечное число концов, каждый из которых является нерасширяющимся. Если для любого исчерпания $M_1\subset M_2\subset\ldots$*

компактными подмногообразиями, $\bigcup M_i = M$, *выполнено*

$$\lim_{i\to\infty} \sigma(M_i^{4k}) = \infty,$$

то $[M^{4k}, g]_{\mathrm{ne}} \neq 0$ *в* $\Omega_{4k}^{nc}(\mathrm{ne})$. □

Следствие 4.26. $\overset{\infty}{\underset{1}{\#}} P^{2k}(\mathbb{C})$, *или, более общо,*

$$P^{2i_1}(\mathbb{C}) \times \ldots \times P^{2i_{r_1}} \# P^{2j_1}(\mathbb{C}) \times \ldots \times P^{2j_{r_2}} \# \ldots,$$

$i_1+\ldots+i_{r_1} = k$, $j_1+\ldots+j_{r_2} = k, \ldots$ *не являются элементами конечного порядка в* $\Omega_{4k}^{nc}(\mathrm{ne})$. □

Рассмотрим частный случай теоремы 4.25 для многообразий M^{4k} вида

$$M^{4k} = \overset{\infty}{\underset{1}{\#}} M_i^{4k},$$

$\mathrm{vol}(M_i^{4k}) \leqslant C_1$, $|K(g_i)| \leqslant C_2$, $r_{\mathrm{inj}}(g_i) \geqslant C_3 > 0$, $\sigma(M_i^{4k}) \geqslant 0$ для $i \geqslant i_0$ и > 0 для бесконечного числа $i \geqslant i_0$. Тогда, в частности, $\mathcal{H}_{2k,2}(M^{4k})$ бесконечномерна и $[M^{4k}, g] \neq 0$ в $\Omega_{4k}^{nc}(\mathrm{ne})$, т. е. добавление конечного числа замкнутых многообразий отрицательной кривизны и бесконечного числа замкнутых многообразий с нулевой сигнатурой (такое что bg- и ne-структура в окрестности концов сохраняется) не переводит ненулевой элемент в нулевой в $\Omega_{4k}^{nc}(\mathrm{ne})$. Более подробное описание ненулевых элементов в $\Omega_{4k}^{nc}(\mathrm{ne})$ приведено в [17].

Одной из характеризующих черт открытых многообразий является поведение их концов. Выше мы ограничивались нерасширяющимися концами. Дальнейшим обобщением было бы рассмотрение многообразий с контролируемым диаметром расширения в концах.

Пусть (M^n, g) — открытое многообразие, $p \in M$, $r > 0$, $C(p,r)$ — объединение неограниченных компонент $M \setminus \overline{B_r(p)}$. Тогда мы определим рост диаметра следующим образом:

$$\mathrm{diam}(p,r) := \sup_{\Sigma_k} \mathrm{diam}\left(\Sigma_k, C\left(p, \frac{3}{4}r\right)\right),$$

где $\mathrm{diam}\big(\Sigma_k, C(p,(3/4)r)\big)$ — диаметр связной компоненты Σ_k границы метрического шара $B_{(1/2)r}(p_0)$, вычисленный по отношению к внутреннему расстоянию $C(p,(3/4)r)$.

Пример 4.27. Нерасширяющиеся концы имеют ограниченный рост диаметра. $\mathrm{diam}(p,r)$ ограничен константой.

Чтобы рассмотреть более общие концы, мы напомним некоторые факты о функциях роста. Две неубывающие функции $v, w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ имеют одинаковый характер роста, если существует такое $A > 0$, что для всех $r \in \mathbb{R}_+$

$$w(r) \leqslant Av(Ar + A) + A, \quad v(r) \leqslant Aw(Ar + A) + A. \tag{4.3}$$

Напомним определение из [24]: функция $v\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ имеет ограниченный рост производной, если существует такая положительная константа L, что для всех $r \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{1}{L} \leqslant v(r+2) - v(r+1) \leqslant L\big(v(r+1) - v(r)\big). \tag{4.4}$$

Пусть $d(r)$ имеет ограниченный рост производной. Мы будем говорить, что открытое полное многообразие (M^n, g) имеет расширение диаметра не больше $d(r)$, если $\operatorname{diam}(p, r) \leqslant d(r)$, т. е. каждый конец имеет расширение диаметра не больше $d(r)$. Если мы ограничимся ориентированными многообразиями, имеющими ограниченную геометрию, мы получим соответствующую теорию бордизмов $\Omega_n^{nc}\big(\text{расширение диаметра} \leqslant d(r)\big)$. Нулевой класс задаётся формулой

$$(\mathbb{R}_+ \times S^{n-1} \cup n\text{-диск},\ g_{\mathbb{R}_+ \times S^{n-1}} = dr^2 + d(r) d\sigma^2_{S^{n-1}}). \tag{4.5}$$

Тогда для $n = 4k$

$$P^{2k}(\mathbb{C}) \# \ldots \# P^{2k}(\mathbb{C}) \# \ldots,\ \ldots, \}$$

$$\# P^{2k}(\mathbb{C}) \# \cdots \# \mathop{\#}_{1}^{[d(r)]} P^{2k}(\mathbb{C}) \# \mathop{\#}_{1}^{[d(r+1)]} P^{2k}(\mathbb{C}) \# \ldots$$

являются независимыми образующими $\Omega_n^{nc}\big(\text{расширение диаметра} \leqslant d(r)\big)$. Здесь $\mathop{\#}_{1}^{d(r)} P^{2k}(\mathbb{C})$ — «горизонтальный слой» индекса r, а горизонтальные слои индексов r и $r+1$ связаны одной $\#$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.25 и подробно изложено в [17].

Замечание 4.28. Рост диаметра, кривизна и гомологии связаны друг с другом. Согласно У. Абрешу и Д. Громоллу, для открытых многообразий с неотрицательной кривизной Риччи $0 \leqslant$ порядок $diam(p, r) \leqslant 1$. Й. Итокава и Р. Кобаяси доказали, что если у (M^n, g) неотрицательная кривизна Риччи и ограниченный рост диаметра, то либо $H_{n-1}(M; \mathbb{Z}) = 0$, либо конечное накрытие $\tilde{M}$ допускает риманово разложение $\tilde{M} = \bar{M} \times \mathbb{R}$. Более того, рост объёма и рост диаметра сильно связаны. $\square$

Мы ввели и обсудили обобщение понятия сигнатуры в [15]. При очень общем подходе к построению сигнатуры было бы желательно, чтобы

1) была независимость от «ограниченной геометрии»;
2) было возможно определить сигнатуру для более общих ситуаций.

Первый шаг выполнен А. С. Мищенко, σ из L-группы.

Второй шаг, где σ из K (некоторой C^*-алгебры), выполнен Н. Хигсоном, Дж. Роу и др. для комплексов Пуанкаре, не являющихся конечно порождёнными.

Первый шаг был очень хорошо проработан ещё в начале семидесятых. Поэтому мы кратко обсудим второй шаг, детали могут быть найдены в [26, 27]. Пусть X — собственное метрическое пространство. Гильбертово пространство H называется X-модулем, если существует C^*-гомоморфизм $C_0(X) \to \mathfrak{B}(H)$, где $C_0(X)$ — это C^*-алгебра ограниченных непрерывных функций на X, обращающихся в R0R на бесконечности. Оператор T на X-модуле H называется локально компактным, если для всех $\varphi \in C_0(X)$ операторы $T\varphi$ и φT компактны в H. Оператор T на X-модуле H имеет конечное распространение, если существует такая константа $R > 0$, что $\varphi T \psi = 0$ для всех таких $\varphi, \psi \in C_0(X)$, что $d\big(\mathrm{supp}(\varphi), \mathrm{supp}(\psi)\big) > R$. Пусть теперь $\mathfrak{A}^*(X)$ — это C^*-категория, объектами которой являются гильбертовы X-модули, а морфизмами являются пределы по норме локально компактных операторов, имеющих конечное распространение.

Мы рассмотрим гильбертов комплекс

$$E_n \xrightarrow{b_n} E_{n-1} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{b_1} E_0$$

X-модулей с возможно неограниченными операторами, $E = \bigoplus E_i$, $b = \bigoplus b_i$, $B = b + b^\star$. Для того чтобы определить комплексы Гильберта—Пуанкаре, рассмотрим оператор

$$T\colon E_p \to E_{n-p}, \tag{4.6}$$

такой что для любого $v \in E_p$ выполнены следующие условия:

$$T^*v = (-1)^{(n-p)p} Tv, \quad Tb^*v + (-1)^p bTv = 0. \tag{4.7}$$

Тогда T индуцирует изоморфизм

$$H_*(E) \cong H^{n-*}(E^*). \tag{4.8}$$

Пусть $\dim E = n = 2l$ или $\dim E = 2l + 1$. Определим $S\colon E \to E$ по формуле

$$Sv = i^{p(p-1)+l} Tv \tag{4.9}$$

для $v \in E_p$.

Лемма 4.29. *Если (E, b, T) — комплекс Гильберта—Пуанкаре и S определяется с помощью T по вышеприведённой формуле, то $S = S^*$ и $bS + Sb^* = 0$.*

Лемма 4.30. *Пусть (E, b, T) — комплекс Гильберта—Пуанкаре и $B = b + b^\star$. Тогда самосопряжённые операторы $B \pm S\colon E \to E$ обратимы.*

В доказательствах используются простые вычисления (см. [26]). □

Для приложений, в частности для случая неограниченных комплексов, нам необходимо конкретизировать вышеприведённые общие конструкции. Зафиксируем $C^\star$-подкатегорию $\mathfrak{A}$ категории всех гильбертовых пространств, таких что множества $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(H_1, H_2)$ являются банаховыми пространствами, замкнутыми относительно $*$. Зафиксируем также идеал $\mathfrak{J}$ в $\mathfrak{A}$. Теперь дадим определение.

Неограниченный, самосопряжённый оператор D называется аналитически контролируемым над $(\mathfrak{A}, \mathfrak{J})$, если выполнены следующие условия:

1) гильбертово пространство, на котором он определён, является объектом $\mathfrak{J}$;
2) резольвентные операторы $(D \pm i)^{-1}$ являются морфизмами $\mathfrak{J}$;
3) оператор $D(1 + D^2)^{-1/2}$ является морфизмом $\mathfrak{A}$.

Комплекс гильбертовых пространств (H, b) аналитически контролируем над $(\mathfrak{A}, \mathfrak{J})$, если самосопряжённый оператор $B = b + b^*$ аналитически контролируем над $(\mathfrak{A}, \mathfrak{J})$. Комплекс Гильберта—Пуанкаре называется аналитически контролируемым над $(\mathfrak{A}, \mathfrak{J})$, если

1) комплекс (H, b) аналитически контролируем;
2) оператор двойственности T является морфизмом в $\mathfrak{A}$.

Утверждение 4.31. *Если D — аналитически контролируемый самосопряжённый оператор и S — ограниченный самосопряжённый оператор в $\mathfrak{A}$, то $D+S$ также является аналитически контролируемым.*

За доказательством мы отсылаем читателя к [26].

Пусть A — C^*-алгебра $\mathfrak{A}$-эндоморфизмов H, J — идеал $\mathfrak{J}$-эндоморфизмов. Если теперь (H, b, T) — нечётномерный аналитически контролируемый комплекс Гильберта—Пуанкаре, то определим сигнатуру следующим образом:

$$\text{сигнатура}(H, b, T) = [(B+S)(B-S)^{-1}] \in K_1(J).$$

В случае чётномерных аналитически контролируемых комплексов мы определим сигнатуру следующим образом:

$$\text{сигнатура}(H, b, T) = [P_+] - [P_-] \in K_0(\mathfrak{J}).$$

Ключевое свойство инвариантности сигнатуры выражается в следующей теореме.

Теорема 4.32. *Если (H, b, T) и (H', b', T') — гомотопически эквивалентные n-мерные аналитически контролируемые комплексы Гильберта—Пуанкаре, то их сигнатуры в $K_n(\mathfrak{J})$ совпадают.*

За доказательством мы отсылаем читателя к [26, теорема 5.12].

Теперь ясно, что единственным основанием для введения такой сигнатуры является наличие важных примеров. $\mathfrak{C}^*(X)$ является идеалом в $\mathfrak{A}^*(X)$. Далее под аналитической контролируемостью будем понимать аналитическую контролируемость по отношению к $\big(\mathfrak{A}^*(X), \mathfrak{C}^*(X)\big)$. В примерах ниже X — это ориентированное комбинаторное (равномерно локально конечное) гомологическое n-многообразие K или ориентированное полное риманово многообразие (M^n, g). Как мы уже видели в разделе 3, это так в случае ориентированных (равномерно локально конечных) комбинаторных гомологических n-многообразий (которые мы рассматриваем вместе с метрикой, делающей их собственными метрическими пространствами). Для P — двойственности Пуанкаре в L_2-(ко)гомологиях —

$$T = \frac{1}{2}(P^* + (-1)^{q(n-q)}P)$$

является ограниченным оператором в гильбертовом пространстве.

Теорема 4.33. *Пусть K — ориентированное (равномерно локально конечное) комбинаторное гомологическое n-многообразие. Тогда на $(C_{*,2}(K), d^*, T)$ имеется структура аналитически контролируемого комплекса Гильберта—Пуанкаре.*

Доказательство. Нужно показать только то, что $(C_{*,2}(K), d+d^*)$ и T являются аналитически контролируемыми над $\big(\mathfrak{A}^*(K), \mathfrak{C}^*(K)\big)$. Это вытекает из свойства равномерной локальной конечности. За простыми деталями мы отсылаем читателя к [27]. $\square$

Следовательно, для указанного пространства корректно определена сигнатура со значениями в K (C^*-алгебре).

Другой хорошо известный классический пример — L_2-комплекс де Рама ориентированного полного риманова многообразия (M^n, g)

$$\Omega^{0,2}(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^{n,2}(M), \tag{4.10}$$

где областью определения является замыкание d. Взяв сопряжённый $b = d^*$, мы получаем комплекс гильбертовых пространств

$$\Omega^{0,2}(M) \xleftarrow{b} \ldots \xleftarrow{b} \Omega^{n,2}(M). \tag{4.11}$$

Оператор Ходжа

$$T\colon \Omega^{q,2} \longrightarrow \Omega^{n-q,2},$$

который задан формулой

$$\langle T\alpha, \beta\rangle = \int\limits_M \alpha \wedge \bar{\beta},$$

удовлетворяет соотношениям

$$T^*\alpha = (-1)^{(n-p)p} T\alpha$$

и

$$Td\alpha + (-1)^p d^* T\alpha = 0,$$

что эквивалентно условию

$$Tb^*\alpha + (-1)^p bT\alpha = 0.$$

Таким образом, L_2-комплекс Ходжа—де Рама становится комплексом Гильберта—Пуанкаре.

Теорема 4.34. *L_2-комплекс Ходжа—де Рама (M^n, g) является аналитически контролируемым.*

За простым доказательством мы отсылаем читателя к [27]. □

Таким образом мы ставим в соответствие каждому ориентированному риманову n-многообразию сигнатуру в K (C^*-алгебре).

Наконец, есть и другой способ определить сигнатуру в K-теории, а именно как K-теорный индекс оператора сигнатуры. Пусть $S = i^{p(p-1)}T$. Тогда S является самосопряжённым и унитарным, а также антикоммутирует с B. Для чётномерного (M^{2l}, g) оператор сигнатуры на M имеет вид градуированного симметрией S оператора $B = d + d^*$. В случае (M^{2l+1}, g) это просто оператор iBS, действующий на чётномерных формах. Согласно [39] индекс оператора сигнатуры лежит в $K_n\big(\mathfrak{C}^*(M)\big)$. Соотношения между этим индексом и сигнатурой комплекса Гильберта—Пуанкаре (M, g) описаны в следующей фундаментальной теореме.

Теорема 4.35. *Если (M, g) — ориентированное полное риманово многообразие, то индекс его оператора сигнатуры совпадает с сигнатурой комплекса Гильберта—Пуанкаре, построенного по L_2-комплексу Ходжа—де Рама M.*

За нетривиальным доказательством мы отсылаем читателя к [27]. $\square$

Закончим этот обзор следующей фундаментальной теоремой — одним из наших основных достижений.

Теорема 4.36. *Пусть* $(B^{n+1}, \partial B = M_1 \cup M_2)$ — *ориентированный риманов бордизм. Тогда* K*-теорная сигнатура* ∂B *равна нулю.*

Доказательство. Мы предположили с самого начала построения нашей теории бордизмов, что существует равномерный риманов воротник

$$\Phi\colon \partial B \times [0,\delta[\,\cong U_\delta(\partial B) \subset B, \quad \Phi^*\big(g_B|_{U_\delta(\partial B)}\big) = g_{\partial B} + dt^2.$$

Отождествим $\partial B \times [0,\delta[$ с $U_\delta(\partial B)$. Обозначим

$$\Omega^{0,2,0}(\Lambda^q T^* B) \equiv \Omega^{q,2}(B) \equiv L_2\big(\Omega^q(B)\big).$$

Тогда мы получим гильбертов комплекс

$$\Omega^{0,2}(B) \xrightarrow{d} \Omega^{1,2}(B) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^{n+1,2}(B), \tag{4.12}$$

где $d = b^\star$ обозначает (максимальное) замыкание $(\mathcal{D}_{\bar d}, \bar d)$ гладкого d. Тогда (3.2) даёт нам двойственный комплекс

$$\Omega^{n+1,2}(B) \xrightarrow{b} \Omega^{n,2}(B) \xrightarrow{b} \ldots \xrightarrow{b} \Omega^{0,2}(B). \tag{4.13}$$

Здесь $b = d^*$ — гильбертов сопряжённый к d.

Следующим шагом мы определим пространство $\Omega^{q,2}(B,\mathrm{cc})$, которое является замкнутым подпространством $\Omega^{q,2}(B)$, таким что $(\Omega^\star(B,\mathrm{cc}), b^\star)$, $(\Omega^\star(B,\mathrm{cc}), b)$ являются гильбертовыми комплексами (b, $b^\star$ — ограничение на области определения из предыдущих построений). $\Omega^{q,2}(B,\mathrm{cc})$, грубо говоря, состоит из L_2-форм, которые постоянны на воротнике. Здесь «cc» означает «constant on the collar» (постоянные на воротнике). Рассмотрим квазиизометрическое вложение

$$\Psi\colon \Omega^{q,2}(\partial B) \hookrightarrow \Omega^{q,2}(B,\mathrm{cc}), \quad \omega \equiv \omega(0) \to \varphi \cdot \omega(0), \tag{4.14}$$

где на воротнике мы полагаем $\omega(x,t) = \omega(x)$, $x \in \partial B$, а вне воротника $\varphi\omega \equiv 0$. Очень легко заметить, что $\Psi\big(\Omega^{q,2}(\partial B)\big)$ является замкнутым подпространством и подкомплексом (т. е. $d(\varphi\omega) = \varphi\tilde{d}\omega$). Значит, существует единственная ортогональная проекция

$$P\colon \Omega^{q,2}(B,\mathrm{cc}) \to \Psi\big(\Omega^{q,2}(\partial B)\big) \cong \Omega^{q,2}(\partial B). \tag{4.15}$$

Следующим шагом будет доказательство того, что $\Psi\big(\Omega^{q,2}(\partial B)\big)$ является подкомплексом Гильберта—Пуанкаре, т. е. надо проверить условия i)—iv) из [26, с. 295], которые требуют некоторых вычислений. Затем с $T_0 = Tb^\star(-1)^q bT$ $(\Omega^{\star,2}(B,\mathrm{cc}), b, T, P) = (\Omega^{\star,2}(B,\mathrm{cc}), d^\star, \star, P)$ будет $(n+1)$-мерной алгебраической парой Гильберта—Пуанкаре. Поэтому согласно [26, теорема 7.6] K-теорная сигнатура $\big(\Psi\big(\Omega^{\star,2}(\partial B)\big), T_0\big)$ равна нулю.

На последнем шаге покажем, что $\big(\Psi\big(\Omega^{\star,2}(\partial B)\big), T_0\big)$ и $(\Omega^{\star,2}(\partial B), T_0)$ гомотопически эквивалентны в смысле комплексов Гильберта—Пуанкаре, и получим, что $\mathrm{sign}\big((\Omega^{\star,2}(\partial B), T_0)\big) = 0$. $\square$ $\square$

5. Простая теория гомотопий для открытых пространств и теорема о собственном s-кобордизме

Уже в самом начале определения открытых комплексов Пуанкаре требуются понятия простых цепных эквивалентностей и простых изоморфизмов для комплексов с бесконечномерными группами цепей. Есть несколько подходов к определению простоты, кручения и собственных простых гомотопических эквивалентностей в этом случае, они были развиты в [20, 21, 42, 46]. В этом разделе мы в основном сосредоточимся на более геометрическом подходе, описанном в [20, 42], и будем следовать ему. Очень кратко представим основные определения и результаты без доказательств, для наших целей этого будет достаточно. За иногда довольно сложными доказательствами мы будем отсылать к источникам. Материал этого раздела не новый, но он потребуется нам в дальнейшем.

Начнём с равномерной локальной конечности симплициальных комплексов. Вложение $i\colon X \hookrightarrow Y$ таких комплексов называется элементарным (симплициальным) расширением, если $Y \setminus i(X)$ состоит из ровно двух открытых симплексов, один из которых является гранью другого. В дальнейшем мы хотим рассмотреть некоторую локализацию, поэтому напомним определение локализации категории.

Пусть $\mathcal{C}$ — категория, а Σ — семейство морфизмов в $\mathcal{C}$. Тогда можно построить новую категорию $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ и функтор $\Theta\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}(\Sigma^{-1})$, удовлетворяющие следующему универсальному свойству: если $\varphi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — произвольный функтор, переводящий Σ в изоморфизмы $\mathcal{D}$, то φ единственным образом пропускается через $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$. Как следствие, Θ биективно на объектах и $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ порождено морфизмами $\Theta(f)$, $f \in \mathcal{C}$, вместе с $\Theta(s)^{-1}$, $s \in \Sigma \subset \mathcal{C}$.

Пример 5.1. Пусть $\mathcal{C}_F$ — категория симплициальных комплексов и симплициальных включений, а Σ — класс тех морфизмов $\mathcal{C}_F$, которые являются конечными композициями элементарных расширений, называемых расширениями. Тогда локализация $\mathcal{C}_F(\sigma^{-1})$ категории $\mathcal{C}_F$ в Σ естественно изоморфна категории конечных симплициальных комплексов и гомотопических классов непрерывных отображений.

За доказательством мы отсылаем читателя к [42, с. 480].

Мы повторим геометрические основы теории простого гомотопического типа. Гомотопическая эквивалентность $f\colon X \to Y$ между конечными симплициальными комплексами называется простой гомотопической эквивалентностью, если существует конечная последовательность отображений $X = X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_n = Y$, каждое из которых является либо расширением, либо гомотопически обратным к расширению, причём их композиция гомотопна f. Это определение можно формализовать, а в дальнейшем мы используем его для определения простых гомотопических эквивалентностей для случая бесконечных комплексов. Пусть $\Theta\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ — локализация категории $\mathcal{C}$ в семействе Σ морфизмов, которое мы будем предполагать замкнутым относительно композиций. Категория $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ содержит все изоморфизмы $\Theta(\Sigma)$ и их обратные, а также образы изоморфизмов из категории $\mathcal{C}$. Они задают подкатегорию $\{\Sigma, \Sigma^{-1}\}$, которую мы будем называть простыми изоморфизмами $\Theta(\Sigma)$. В некоторых случаях эти простые изоморфизмы не включают все изоморфизмы $\Theta(\Sigma^{-1})$. Это приводит к так называемой проблеме простых изоморфизмов для $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$: проверить все изоморфизмы $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ по модулю изоморфизмов, содержащихся в $\{\Sigma, \Sigma^{-1}\}$. Для решения этой задачи Зибенманн построил семейство простых структур $\mathcal{S}(X)$, где X — объект $\mathcal{C}$. Элемент $\mathcal{S}(X)$ представлен изоморфизмом $f\colon X \to Y$ из $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$, и $f'\colon X \to Y'$ эквивалентен данному изоморфизму, если существует отображение $s\colon X \to Y$ в $\{\Sigma, \Sigma^{-1}\}$, такое что $sf = f'$. Мы будем писать $[f] = [f']$. Предположим, что все $\mathcal{S}(X)$ являются множествами и рассмотрим следующие две аксиомы.

(a) Если два морфизма $f, f' : X \to Y$ определяют одинаковые изоморфизмы $\Theta(f) = \Theta(f')$ в $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$, то существуют такие $s, s'\colon Y \to Z$ в Σ, что $sf = s'f'$.

(b) Два морфизма $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Z$ категории $\mathcal{C}$ имеют инъективный предел в $\mathcal{C}$ (амальгамированную сумму)

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \varinjlim(f, g) \\ {\scriptstyle f}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle f'} \\ X & \underset{g}{\longrightarrow} & Z \end{array}$$

и условие $f \in \Sigma$ влечёт условие $f' \in \Sigma$.

Утверждение 5.2. *Если выполнены условия* (a) *и* (b), *то $\mathcal{S}$ является функтором $\mathcal{S}\colon \mathcal{C}(\Sigma^{-1}) \to \{$*абелевы группы*$\}$.*

Доказательство. Если $f, g \in \Sigma$, а $\Theta(f)$ и $\Theta(g)$ изоморфны, то (b) показывает, что $[f + g] := [f'g] = [g'f]$ корректно определён (мы часто пишем $[g]$ вместо $[\Theta(g)]$). Если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ — изоморфизмы в $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$, то в $\mathcal{S}(Y)$ выполнено равенство $f_*[gf] = f_*[f] + [g]$. Для заданного g можно выбрать f, обратное к g в $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$, чтобы получить $-[g] = f_*[f]$. □

Теперь в качестве $\mathcal{C}$ возьмём категорию равномерно строго локально конечных симплициальных комплексов и симплициальных включений. Мы знаем, что равномерные симплициальные комплексы K равномерно строго локально конечны, поэтому они образуют подкатегорию $\mathcal{C}$. Пусть Σ — семейство морфизмов в $\mathcal{C}$, порождённое изоморфизмами и конечными элементарными расширениями с помощью следующих операций:

1) дизъюнктное объединение, т. е. если каждый $X_\alpha \hookrightarrow Y_\alpha$ лежит в Σ, $\alpha \in A$, то дизъюнктное объединение
$$\bigsqcup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} \hookrightarrow \bigsqcup\{Y_\alpha \mid \alpha \in A\}$$
также лежит в Σ;

2) амальгамированная сумма, т. е. если $X = Y \cup Z$ и $Y \cap Z \hookrightarrow Y$ лежат в Σ, то $Z \hookrightarrow X$ тоже лежит в Σ;
3) конечной композиции этих морфизмов.

Теорема 5.3. $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ *является категорией равномерно строго локально конечных симплициальных комплексов и гомотопических классов собственных отображений.*

За доказательством мы отсылаем читателя к [42].

Простые изоморфизмы как выше теперь будут называться простыми собственными гомотопическими эквивалентностями. Всё это можно легко обобщить на (равномерно строго локально конечные) CW-комплексы.

Пусть $K(\pi)$ обозначает либо группу Уайтхеда $\mathrm{Wh}(\pi)$, либо группу проективных классов $\tilde{K}_0(\pi)$ стабильно изоморфных классов конечно порождённых проективных левых $Z[\pi]$-модулей. Обозначим через $K\pi_1(X)$ прямую сумму $K\pi_1(X_\alpha)$, где $X_\alpha \subset X$ — компоненты линейной связности. Определим $K\big(\pi_1 E(X)\big)$ как проективный предел системы $\big\{K\big(\pi_1(X \setminus C)\big) \mid C \text{ — компакт в } X\big\}$. Пусть $K\big(\pi_1 E'(X)\big)$ — первый производный функтор проективного предела. Для полноты изложения коротко напомним определение $\varprojlim^1$ обратной системы абелевых групп $A_1 \xleftarrow{\varphi_2} A_2 \ldots$. Это коядро

$$\prod_{n\geqslant 1} A_n \xrightarrow{(1-S)} \prod_{n\geqslant 1} A_n,$$

где

$$(1-S)(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_1 - \varphi_2(a_2), a_2 - \varphi_3(a_3), \ldots).$$

Подпоследовательность $\{A_n\}$ даёт тот же результат. Более того, $K\big(\pi_1 E'(X)\big)$ равен нулю, если обратная система состоит из сюръекций. Тогда $K(\pi_1 E)$ и $K(\pi_1 E')$ являются функторами

$$\mathcal{S}(\Sigma^{-1}) \to \{\text{абелевы группы}\}.$$

Следующий инвариант является предельной версией относительного препятствия к конечности Уолла. Если CW-комплекс Y конечно доминирован относительно подкомплекса X, то приведённая проективная группа классов Y содержит препятствие, которое равно нулю тогда и только тогда, когда Y гомотопически эквивалентно конечному комплексу относительно X. Мы применим этот факт в нашей ситуации. Представим заданный элемент $\mathcal{S}(X)$ включением $f\colon X \hookrightarrow W$. Положим $X' =: W' \cap X$ для коконечного подкомплекса W' комплекса W. Тогда препятствие к относительной конечности $\sigma(W', X') \in \tilde{K}_0\pi_1(W')$ корректно определено, так как W' может быть доминировано $X' \cup C$, если X' зафиксировано, где $C \subset W'$ — конечный комплекс. Для также коконечного $W'_1 \subset W'$ $\sigma(W'_1, X'_1)$ отображается в $\sigma(W', X')$. Поэтому общий набор $\{\sigma(W', X')\}$ всех таких $\sigma(W', X')$ является элементом

$$\varprojlim\big\{\tilde{K}_0\big(\pi_1(W')\big) \mid W' \text{ коконечен в } W\big\} \cong \tilde{K}_0\big(\pi_1 E(X)\big).$$

Следуя [39], будем называть этот элемент $\sigma_\infty([f])$, он является аддитивным и естественным. Композиция σ_∞ с отображением $j\colon \tilde{K}_0\bigl(\pi_1 E(X)\bigr) \to \tilde{K}_0\bigl(\pi_1(X)\bigr)$, возникающим из включений, является нулевой, так как $\sigma(W, X) = 0$. Пусть $\Sigma_b \supset \Sigma$ — семейство в $\mathcal{C}$, порождённое из изоморфизмов бесконечных комплексов и всех гомотопических эквивалентностей $X \hookrightarrow Y$ конечных комплексов с помощью дизъюнктного объединения, амальгамированной суммы и конечных композиций. Тогда $\sigma_\infty[f] = 0$, если $f \in \Sigma_b$. Обозначим через $\mathcal{S}_b(X)$ подгруппу $\{[f] \in \mathcal{S}(X) | f \in \Sigma_b\}$. Теперь мы готовы сформулировать первые две основные теоремы Зибенманна.

Теорема 5.4. *Пусть X — равномерный комплекс. Тогда последовательность*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_b(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\sigma_\infty} \tilde{K}_0\bigl(\pi_1 E(X)\bigr) \xrightarrow{j} \tilde{K}_0\bigl(\pi_1(X)\bigr)$$

является точной.

Теорема 5.5. *Существует естественная точная последовательность*

$$\mathrm{Wh}\bigl(\pi_1 E(X)\bigr) \longrightarrow \mathrm{Wh}\bigl(\pi_1(X)\bigr) \longrightarrow \mathcal{S}_b(X) \xrightarrow{\tau_\infty} \mathrm{Wh}\bigl(\pi_1 E'(X)\bigr) \longrightarrow 0.$$

Мы отсылаем читателя к [42] за глубоко нетривиальными ключевыми аргументами и леммами для доказательств теорем 5.4 и 5.5.

Теорема 5.5 может быть выведена из следующей теоремы.

Теорема 5.6. *Существует естественный изоморфизм*

$$\tau'\colon \mathcal{S}_b(X) \to \mathrm{Wh}'\bigl(\pi_1(X)\bigr).$$

За доказательством мы отсылаем читателя к [42].

Рассмотрев точные последовательности в теоремах 5.4 и 5.5, можно легко получить следующие примеры.

Примеры 5.7.

1. Если X является конечным комплексом, то

$$\mathcal{S}(X) \cong \mathrm{Wh}\bigl(\pi_1(X)\bigr), \quad \mathcal{S}(X \times \mathbb{R}) = \ker(j) \cong \tilde{K}_0\bigl(\pi_1(X)\bigr),$$
$$\mathcal{S}(X \times \mathbb{R}^2) = \ker\Bigl(j\colon \tilde{K}_0\bigl(\pi_1(X \times S^1)\bigr) \to \tilde{K}_0\bigl(\pi_1(X)\bigr)\Bigr)$$

а для некомпактных X справедливо $\mathcal{S}(X \times \mathbb{R}^2) = 0$.

2. Для $X = X_1 \sharp X_2 \sharp X_3 \ldots$, где X_i — многообразия, используя $\mathrm{Wh}(G * H) = \mathrm{Wh}(G) \oplus \mathrm{Wh}(H)$, можно получить

$$S(X) \cong \mathrm{Wh}'\pi_1(X) \cong \prod_i \mathrm{Wh}\bigl(\pi_1(X_i)\bigr).$$

Мы завершим обзор этого подхода Зибенманна версией его теоремы о собственном s-кобордизме. Наше определение (гладких) открытых бордизмов (W^n, V, V') было приведено в разделе 4. Такие бордизмы будем называть собственными h-кобордизмами, если включения $V \hookrightarrow W, V' \hookrightarrow W$ являются собственными гомотопическими эквивалентностями.

Теорема 5.8. *Пусть* (W^n, V, V'), $n \geqslant 6$, *— собственный h-кобордизм. Тогда* W *диффеоморфно* $V \times [0,1]$, *если и только если* $V \hookrightarrow W$ *является простой эквивалентностью. Для любого* $x \in \mathcal{S}(V)$ *существует такой собственный h-кобордизм* (W, V, V'), *что у* $V \hookrightarrow W$ *есть класс* $x \in \mathcal{S}(V)$.

За доказательством мы отсылаем читателя к [42].

Как видно из предыдущих определений и результатов, явные вычисления провести будет очень сложно. Однако есть более явный подход к теории собственных простых гомотопий, который был впервые использован Ф. Т. Фарреллом и Дж. Б. Вагонером в [20, 21]. Он очевидным образом связан с структурой концов X. Основная идея заключается в постановке в соответствие комплексу X дерева T, которое отражает структуру концов, а затем в постановке в соответствие дереву T семейства $Z\pi_1$, отвечающих окрестностям концов, определённых деревом T. Дерево групповых колец индуцирует дерево, образованное K_1, которое наконец позволяет определить $\mathrm{Wh}(\pi)$. Мы не имеем возможности представить здесь в достаточно понятной форме этот подход и отсылаем читателя к [17, 20, 21].

Конечная цель состоит в определении кручения для s-свободного проективного ациклического комплекса и кручения $\tau(K, L)$ для L, являющегося собственным деформационным ретрактом K. Мы не имеем возможности пояснить здесь достаточно подробно этот подход и отсылаем читателя к [17, 46].

6. Собственные перестройки открытых многообразий

В разделе 2 мы определили липшицевы компоненты для римановых многообразий, которые являются специальным случаем собственных метрических пространств. Это определение очень легко обобщить на римановы векторные расслоения, потребовав дополнительно, чтобы отображения между ними накрывали отображения между многообразиями, являющимися базами. Мы покажем ниже в (6.1) и (6.2) оба слагаемых соответствующей локальной метрики. Как и в компактном случае, в открытом случае отправной точкой перестройки является такое отображение степени 1 $(f, \Phi)\colon \big((M^n, g), \nu_M\big) \to (X, \nu_X)$, что нормальное расслоение ν_M и расслоение $\Phi^\star \nu_X$ являются (стабильно) эквивалентными, X является открытым равномерным комплексом Пуанкаре, ν_X является расслоением («Спивака») над X.

Здесь необходимо уточнить следующее:

1) в каких гомологиях отображение имеет «степень 1»,
2) какое определение открытого равномерного комплекса Пуанкаре нужно использовать,
3) какие виды ν_X нужно рассматривать,
4) откуда берётся пара (f, Φ).

Начнём с последнего и второго вопросов. Обычная конструкция Тома—Понтрягина не работает в нашей ограниченной собственной категории, потому что нет ограниченного собственного вложения X в S^N. Но если рассмотреть $\operatorname{gen\,comp_L}(X, \nu_X)$ (где, в частности, X — открытый равномерный CW- или симплициальный комплекс), то будут возможны два случая.

1. $\operatorname{gen\,comp_L}(X, \nu_X)$ не содержит никакого открытого многообразия. Тогда при перестройке не возникает никаких проблем.
2. $\operatorname{gen\,comp_L}(X, \nu_X)$ содержит многообразия. Тогда существует такое (M^n, g, ν_M), что $d_L\big((X, \nu_X), (M, \nu_M)\big) < \infty$.

Последнее условие означает, что существуют такие равномерно собственные отображения

$$f\colon M \to X, \quad g\colon X \to M,$$

что

$$\max\{0, \log \operatorname{dil} f\} + \max\{0, \log \operatorname{dil} g\} + \\ + \sup_{x \in M} d(gf(x), x) + \sup_{y \in X} d(fg(y), y) < \infty, \quad (6.1)$$

и такие

$$\Phi\colon \nu_M \to \nu_X, \quad \Psi\colon \nu_X \to \nu_M,$$

что

$$\max\{0, \log \operatorname{dil} \Phi\} + \max\{0, \log \operatorname{dil} \Psi\} + \\ + \sup_{e \in E(\nu_M)} d(\Psi\Phi(e), e) + \sup_{f \in E(\nu_X)} d(\Phi\Psi(f), f) < \infty. \quad (6.2)$$

Затем нужно понять, есть ли среди этих отображений (f, Φ) отображение степени 1 (пока мы не уточняем, в какой теории гомологий). Для этого достаточно рассмотреть случай $d_L(X, M) < \varepsilon$, т. е. случай, в котором X будет пространством с радиусом выпуклости не меньше ε. Тогда, в частности,

$$\operatorname{dist}(fg(y), y) < \varepsilon, \quad fg \sim \mathrm{id}_X, \quad \deg(f_\star \circ g_\star) = \deg\big((\mathrm{id}_X)_\star\big) = 1, \quad \deg(f_\star) = \pm 1$$

в любой разумной теории гомологий, которую мы выберем в дальнейшем. Здесь собственное внутренне метрическое пространство X имеет радиус выпуклости ϱ, если

$$\varrho = \sup\{r \mid B_r(p) \text{ выпукло для всех } p \in X\}.$$

Значит, в L-окрестности многообразия с ограниченной геометрией есть много соответствующих соседей степени 1.

Как мы уже замечали ранее, есть несколько разных способов задания двойственности Пуанкаре и определений комплекса Пуанкаре. Выбор зависит от той цели, которой мы хотим добиться. Если нужно определить инварианты, например обобщение сигнатуры, то подходящими будут язык и контекст функционального анализа. Это мы (а по сути Н. Хигсон и Дж. Роу) показали в разделе 4. Так как в этих случаях пространства полны, то кручение полностью исчезает. Но для нашей геометрической классификации (например, посредством перестроек) надо выразить/сохранить полностью локальную и глобальную гомотопические структуры, т. е. пространства нельзя пополнять.

Наверное, лучшее, очень естественное и подходящее определение дано Л. Тейлором в [46]. Мы напомним определение равномерного CW-комплекса. Пусть X — равномерный CW-комплекс с ориентирующим классом $w_1 \in H^1(X; Z_2)$. Комплекс X называется открытым комплексом Пуанкаре относительно фундаментального класса $[X] \in H_{n,\mathrm{ulf}}(X; Z^{w_1})$ и функтора накрытия $\sim$, если

$$\cap[X]\colon \Delta^{n-*}(X;\sim) \to \Delta_*(X;\sim)$$

является изоморфизмом. Здесь $\Delta_k(X;\sim) := \Delta(X; \{p\}; H_k, \sim)$, последнее определено семейством $G(C,p) = H_k(\widetilde{X \setminus C})$, n называется размерностью X, а $Z^{w_1} = Z^t$ обозначает коэффициенты, подкрученные на w_1.

Замечание 6.1. Как видно, чтобы определить условие двойственности, мы использовали большую часть раздела 3. Без него это просто было бы невозможно сделать. Аналогично для определения простоты комплексов Пуанкаре нам понадобится раздел 5.

Равномерная CW-пара $(X, \partial X)$ называется парой Пуанкаре (формальной размерности n), если существует такой класс $[X] \in H_{n,\mathrm{ulf}}(X, \partial X; Z^{w_1})$, что

$$\cap[X]\colon \Delta^{n-*}(X;\sim) \to \Delta_*(X, \partial X;\sim)$$

и

$$\cap[X]\colon \Delta^{n-*}(X, \partial X;\sim) \to \Delta_*(X;\sim)$$

являются изоморфизмами.

Согласно [46] у любого комплекса Пуанкаре X есть собственное кручение Уайтхеда $\tau(X) \in \mathrm{Wh}(X)$ (как определено в разделе 5, $\mathrm{Wh}(X) := \mathrm{Wh}(X, t)$), такое что $\tau(X)^* = (-1)^n \tau(X)$. Это кручение является кручением отображения $\cap[X]$ на уровне (о-)цепей. Мы ссылались на это в конце предыдущего раздела.

Теорема 6.2. *Если $(M, \partial M)$ — равномерное триангулированное гладкое или PL-многообразие (с возможно пустым ∂M) и если $[M] \in H_{n,\mathrm{ulf}}(M, \partial M; Z^t)$ является фундаментальным классом, а $\sim$ — универсальным функтором накрытия, то*

$$\cap[M]\colon \Delta^{n-*}(M, \partial M;\sim) \to \Delta_*(M;\sim)$$

и

$$\cap[M]\colon \Delta^{n-*}(M;\sim) \to \Delta_*(M, \partial M;\sim)$$

являются простыми как цепные эквивалентности.

За простым доказательством мы отсылаем читателя к [46].

Основная идея состоит в том, что $\cap[M]$ переводит порождающие элементы когомологий в порождающие элементы гомологий (с точностью до сдвигов на π_1). □

Теперь мы поясним, что означает, что отображение имеет «степень 1». Пусть M и X — (равномерные) системы Пуанкаре длины n по отношению к $([M], \sim)$ и $([X], -)$ соответственно. Пусть $f\colon M \to X$ — такое равномерно собственное ограниченное отображение, что $f^*(-) = \sim$ и если $w_1 \in H^1(X; Z_2)$ — ориентирующий класс X, то $f^\star w_1 \in H^1(M; Z_2)$ — ориентирующий класс M. Тогда f — отображение степени 1, если

$$f_*[M] = [X].$$

Мы ответили на первый, второй и четвёртый вопросы. Первым основным шагом в сведении задачи перестройки к вопросу о (ко-)гомологиях является следующая теорема.

Теорема 6.3. *Пусть $f\colon M \to X$ — отображение степени 1. Тогда f индуцирует коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \Delta^r(M; \sim) & \xrightarrow{f^*} & \Delta^r(X; \sim) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \cap[M]} & & \big\downarrow{\scriptstyle \cap[X]} \\ \Delta_{n-r}(M; \sim) & \xrightarrow{f_*} & \Delta_{n-r}(X; \sim). \end{array}$$

Здесь мы используем морфизм из раздела 3

$$\Delta f_*\colon \Delta(X, \{p\}; G) \to \Delta(Y, \{f(p)\}; G). \qquad \square$$

Следствие 6.4. *Пересечение $\cap[M]$ индуцирует изоморфизм коядра f^*, $K^r(M; \sim)$, на ядро f_*, $K_{n-r}(M; \sim)$. Если f является k-связным, то f_* и f^* являются изоморфизмами для $r < k$ и $r > n - k$ соответственно.* $\square$

Подобная диаграмма и выводы имеют место и для случая пар (и n-систем).

Пусть M_f — цилиндр отображения f. Обозначим $\Delta(f; \pi_k) \equiv \Delta(M_f, M; \pi_k)$. Тогда наша задача перестройки состоит из нахождения такого g, бордантного f, что

$$\Delta(g; \{p\}; \pi_k, \text{no cov}) = \Delta(M_g, M; \{p\}; \pi_k, \text{no cov}) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

(это теорема 3.42). По (относительной версии) теоремы 3.36 это означает, что

$$\varepsilon(g; \{p\}; \pi_k) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \tag{6.3}$$

и

$$\pi_k(g, p) := \pi_k(M_g, M) = 0 \ \text{ для всех } \ p \in \{p\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Соотношение (6.5) просто означает, что f является собственной гомотопической эквивалентностью в бесконечности. Поэтому у нас есть, как уже было отмечено, две версии перестройки:

1) тотальная перестройка, приводящая к равномерно собственной ограниченной гомотопической эквивалентности, общий контекст которой (без метрик и ограниченности) был установлен Л. Тейлором в [46],

2) перестройка, приводящая к равномерно собственной гомотопической эквивалентности на бесконечности (без метрик и ограниченности), как показал С. Момари в [31, 32].

В обоих случаях есть версии простой и не простой равномерной собственной гомотопической эквивалентности. «Равномерность» объясняется тем, что начальные отображения являются равномерно собственными (и ограниченными), так как мы оперируем в $\mathrm{comp}_{\mathrm{L}}(\cdot)$, а перестройки ограниченной геометрии сохраняют эти свойства. Мы не будем здесь приводить подобное описание результатов Л. Р. Тейлора и С. Момари. Это, наверное, будет проделано в [17]. Перед нами же стоит задача удостовериться, что если $(f,\Phi)\colon (M,\nu_M)\to(X,\nu_X)$, $\nu_M\simeq\Phi^*\nu_X$ (стабильно), ограниченно, а (M^n,g) имеет ограниченную геометрию, то полученные после перестройки отображения и многообразия будут всё ещё ограниченными и будут иметь ограниченную геометрию соответственно, что является одной из новых частей нашего подхода. Как показывает следствие 6.4 и как можно заключить из теоремы 3.42, после перестройки исчезнут $K_{n-r}(M,\sim)$, $n-r$ от 0 до средней размерности. Это же выполнено и для ε-случая.

Утверждение 6.5. *Пусть $\alpha\in K_k(M,\sim)\subset\Delta(f;\pi_k)$ может быть обнулено перестройкой. Тогда результат может быть снабжён полной метрикой с ограничениями на кривизну, зависящими от исходной метрики и толщины трубчатой окрестности вложенных сфер $\varphi(S^k)$.*

Доказательство. По нашему предположению α определяет регулярный гомотопический класс вложения несвязного набора $\Lambda\times S^k\times D^{n-k}$ в M. Существует исчерпание $M_1\subset M_2\subset\ldots$, $\bigcup M_i=M$, компактными подмногообразиями M_i с границей $\partial M_i=N_i$, такое что $\mathrm{dist}(N_i,N_j)\geqslant 1$ для всех $i\neq j$, $\mathrm{dist}(\varphi_\lambda(S^k),N_i)>0$ для всех i и λ. Это следует, например, из разделяющей теоремы Чигера (см. [6]). Множество $M_i\setminus\mathring{M}_{i-1}$ содержит образы $\varphi_{\lambda_{i,1}}(S^k),\ldots,\varphi_{\lambda_{i,r_i}}(S^k)$. Так как их нормальное расслоение эквивалентно тривиальному, мы получаем вложения $\psi=\psi_{\lambda_j}\colon S^k\times D^{n-k}_{\delta_{\lambda_j}}\hookrightarrow M_i\setminus\mathring{M}_{i-1}$. Производим перестройку, вырезая $\mathrm{int}\big(\psi(S^k\times D^{n-k}_\delta)\big)$ и приклеивая $D^{k+1}\times S^{n-k-1}_\delta$ с помощью отождествления $\partial(D^{k+1}\times S^{n-k-1}_\delta)=S^k\times S^{n-k-1}_\delta$ с $\psi(S^k\times S^{n-k-1}_\delta)$ при помощи ψ. При этом возникают две задачи:

1) сгладить возникающее пространство;
2) снабдить полученное многообразие метрикой ограниченной геометрии.

Обе задачи можно выполнить, взяв подходящий риманов воротник. Существуют воротники

$$\kappa_1\colon M\supset U_{\delta_1}\big(\psi(S^k\times S^{n-k-1})\big)\xrightarrow{\cong}S^k\times S^{n-k-1}_\delta\times[0,\delta_1),\quad \delta_1<\delta,\tag{6.4}$$

и

$$\kappa_2\colon S^k\times D^{n-k}_{\delta_1}\supset U_{\delta_1}(S^k\times S^{n-k-1})\xrightarrow{\cong}S^k\times S^{n-k-1}_\delta\times[0,\delta_1).\tag{6.5}$$

Мы снабжаем обе правые части метриками $g_1 = g_{S^k \times S_\delta^{n-k-1}} + dt^2 = g_2$ и отождествляем $\psi(S^k \times S_\delta^{n-k-1})$ с $S^k \times S_\delta^{n-k-1}$ при помощи ψ. Тогда во («внешней») окрестности $U_{\delta_1}\big(\psi(S^k \times S^{n-k-1})\big) \subset M$ есть две метрики, исходная и новая ($\cong g_{S^k \times S_{\delta_1}^{n-k-1}} + dt^2$)). Пусть $\chi = \chi_{\delta_1}$ — такая гладкая срезающая функция, что $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\chi = 1$ на $[0, (1/4)\delta_1]$, $\chi = 0$ на $[(3/4)\delta_1, \delta_1]$. Определим на многообразии M_{new} новую метрику

$$g_{\text{new}} = \chi g_1 + (1-\chi) g_{M,\text{old}} + \chi g_2 + (1-\chi) g_{D_\delta^{n-k}}. \tag{6.6}$$

Тогда g_{new} гладкая, и ограничения на её кривизну (вместе с её производными) возникают из ограничений на кривизну M и из производных χ_{δ_1} в частности. Чем меньше δ_1, тем больше ограничения на кривизну g_{new}. Если есть общая для всех трубчатых окрестностей толщина $0 < \delta$, т. е. для всех $\lambda \in \Lambda$, то мы получим метрику с ограниченной геометрией, а новое отображение $f_{\text{new}} \colon M_{\text{new}} \to X$ останется ограниченным и равномерно собственным. Если такой общей толщины $\delta > 0$ нет, то существует подсемейство вложений в ∞, таких что толщина становится всё меньше и меньше, а ограничения на кривизну всё растут и растут. Такое положение дел разрушает ограниченную геометрию на итоговом многообразии. Но мы можем избежать этой трудности, вставив в любую процедуру перестройки цилиндр $\psi(S^k \times S^{n-k-1} \times [0,1])$ и построив затем соответствующую выпуклую комбинацию метрик с помощью фиксированной $\chi = \chi_{\delta_1}$, например $\delta = 1/4$. □

Последний вопрос относится к ν_X, стабильному «нормальному» расслоению. К счастью, Л. Р. Тейлор доказал в [46] существование стабильного расслоения Спивака ν_X для открытых равномерных комплексов Пуанкаре. Пусть сначала ν_X является сферическим расслоением; если мы ищем многообразие M, равномерно собственно гомотопически эквивалентное X, то у ν_X должна быть редукция к векторному расслоению. Гладкое представление препятствия к перестройке и получающаяся точная последовательность будут приведены в [17].

Наконец, обратимся к задаче построения с помощью перестройки «равномерно собственной гомотопической эквивалентности на бесконечности». Как мы заметили в (6.5), основная проблема состоит в доказательстве равенства $\varepsilon(f;\{p\};\pi_k) = 0$. Согласно теореме 3.36 и её доказательству это эквивалентно тому факту, что соответствующая обратная система эквивалентна тривиальной. К счастью, С. Момари в некотором смысле «вычислил» соответствующие группы перестроек. Коротко приведём его результат, на который также ссылаются в [34]. Пусть $X \to K$ — собственная 1-эквивалентность сильно локально конечных CW-комплексов, а $L_n^{\mathrm{q,open}}$ — группа препятствий к перестройке в (равномерную) собственную гомотопическую эквивалентность в ∞, $\mathrm{q} = \mathrm{s}$ или $\mathrm{q} = \mathrm{h}$, где s отмечает случай простоты. Тогда $L_n^{\mathrm{q,open}}(X) \xrightarrow{\cong} L_n^{\mathrm{q,open}}(K)$. Для базиса окрестностей $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ бесконечности, $\bigcap K_i = \varnothing$, определим $\Pi_n^{\mathrm{q}}(K) := \prod_{i=1}^{\infty} L_n^{\mathrm{q}}\big(\pi_1(K_i)\big)$. Здесь q — это p или h. Остальные L-группы в (6.10) являются классическими группам Уолла, которые были введены и рассмотрены в [48].

Теорема 6.6. *Группы* $L_n^{\mathrm{h,open}}(K)$ *составляют точную последовательность*

$$\Pi_n^{\mathrm{h}}(K) \to L_n^{\mathrm{h}}\big(\pi_1(K)\big) \oplus \Pi_n^{\mathrm{h}}(K) \to L_n^{\mathrm{h,open}}(K) \to \\ \to \Pi_{n-1}^{p}(K) \to L_{n-1}^{p}(\pi_1(K) \oplus \Pi_{n-1}^{p}(K). \quad (6.7)$$

Мы отсылаем читателя к [31] за доказательством длиной в 100 страниц и надеемся привести более простую версию этого доказательства в [17].

Литература

[1] Attie O. Quasi-isometry classification of some manifolds of bounded geometry // Math. Z. — 1994. — Vol. 216. — P. 501—527.

[2] Attie O. A surgery theory for manifolds of bounded geometry: Preprint. — 2008. — `arXiv:math/0312017v3`.

[3] Aubin T. Espaces de Sobolev sur les varietes Riemanniennes // Bull. Soc. Math. (France). — 1976. — Vol. 100. — P. 149—173.

[4] De Baun D. L_2-cohomology of noncompact surfaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — Vol. 284. — P. 543—565.

[5] Cheeger J., Gromov M. On the characteristic numbers of complete manifolds of bounded geometry and finite volume // Differential Geometry and Complex Analysis. — Berlin: Springer, 1985. — P. 115—154.

[6] Cheeger J., Gromov M. Chopping Riemannian manifolds // Differential Geometry. — Harlow: Longman Sci. Tech., 1991. — (Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math.; Vol. 52). — P. 85—94.

[7] Cheeger J., Gromov M., Taylor M. Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplacian and geometry of complete Riemannian manifolds // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 17. — P. 15—53.

[8] Dodziuk J. Finite-difference approach to the Hodge theory of harmonic forms // Amer. J. Math. — 1976. — Vol. 98. — P. 79—104.

[9] Dodziuk J. Sobolev spaces of differential forms and the de Rham–Hodge isomorphism // J. Diff. Geom. — 1981. — Vol. 16. — P. 63—73.

[10] Dodziuk J., Patodi V. K. Riemannian structures and triangulation of manifolds // J. Indian Math. Soc. — 1976. — Vol. 40. — P. 1—52.

[11] Eichhorn J. The manifold structure of maps between open manifolds // Ann. Global Anal. Geom. — 1993. — Vol. 11. — P. 253—300.

[12] Eichhorn J. Spaces of Riemannian metrics on open manifolds // Results Math. — 1995. — Vol. 27. — P. 256—283.

[13] Eichhorn J. Uniform structures of metric spaces and open manifolds // Results Math. — 2001. — Vol. 40. — P. 144—191.

[14] Eichhorn J. Invariants for proper metric spaces and open Riemannian manifolds // Math. Nachr. — 2003. — Vol. 253. — P. 8—34.

[15] Eichhorn J. Characteristic numbers, bordism theory and the Novikov conjecture for open manifolds // Banach Center Publ., Vol. 76. — Warsaw: Polish Acad. Sci., 2007. — P. 269—312.

[16] Eichhorn J. Global Analysis on Open Manifolds. — New York: Nova Sci. Publ., 2007.

[17] Eichhorn J. On the Classification of Open Manifolds. — In preparation.

[18] Eschenburg J.-H. Comparison Theorems in Riemannian Geometry. — Lect. Notes Ser. Dip. Mat. Univ. Studi Trento, No. 3. — Trento, 1994.

[19] Farrell F. T., Taylor L., Wagoner J. The Whitehead theorem in the proper category // Compositio Math. — 1973. — Vol. 27. — P. 1—23.

[20] Farrell F. T., Wagoner J. Algebraic torsion for infinite simple homotopy types // Comm. Math. Helv. — 1972. — Vol. 47. — P. 502—513.

[21] Farrell F. T., Wagoner J. Infinite matrices in algebraic K-theory and topology // Comm. Math. Helv. — 1972. — Vol. 47. — P. 474—501.

[22] Golstein V. M., Kuzminov V. I., Shvedov I. A. The de Rham isomorphism of L_p-cohomology of noncompact Riemannian manifolds // Sib. Math. J. — 1988. — Vol. 29. — P. 34—44.

[23] Greene R. Complete metrics of bounded curvature on noncompact manifolds // Arch. Math. (Basel). — 1978/1979. — Vol. 31. — P. 89—95.

[24] Grimaldi R., Pansu P. Bounded geometry, growth and topology. — `arXiv:math/1008.4887v1`.

[25] Gromov M., Lafontaine J., Pansu P. Stuctures metriques pour les varietes Riemanniennes. — Paris: CEDIC, 1981. — (Math. Texts, Vol. 1).

[26] Higson N., Roe J. Mapping surgery to analysis I: analytic signatures // K-Theory. — 2004. — Vol. 33. — P. 277—299.

[27] Higson N., Roe J. Mapping surgery to analysis II: geometric signatures // K-Theory. — 2004. — Vol. 33. — P. 301—324.

[28] Higson N., Roe J. Mapping surgery to analysis III: exact sequences // K-Theory. — 2004. — Vol. 33. — P. 325—346.

[29] Hilton P. J., Wylie S. Homology theory. — New York 1960.

[30] Hughes B., Ranicki A. Ends of complexes. — Cambridge, 1996. — (Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 123).

[31] Maumary S. Proper surgery groups for non-compact manifolds of finite dimension: Preprint. — U. C., Berkeley, 1972.

[32] Maumary S. Proper surgery groups and Wall—Novikov groups // Algebraic K-Theory. — Berlin: Springer, 1973. — (Lect. Notes Math., Vol. 343). — P. 526—539.

[33] Megginson R. E. An Introduction to Banach Space Theory. — Berlin: Springer, 1988.

[34] Pedersen E., Ranicki A. Projective surgery theory // Topology. — 1980. — Vol. 19. — P. 239—254.

[35] Ranicki A., Sullivan D. A semilocal combinatorial formula for the signature of a $4k$-manifold // J. Diff. Geom. — 1976. — Vol. 11. — P. 23—29.

[36] Richards I. On the classification of noncompact surfaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 106. — P. 259—269.

[37] Rinow W. Lehrbuch der Topologie. — Berlin: Deutscher Verlag d. Wiss., 1975.

[38] Roe J. Coarse Cohomology and Index Theory on Complete Riemannian Manifolds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1993. — (Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 497).

[39] Roe J. Index Theory, Coarse Geometry, and Topology of Manifolds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1996. — (CBMC Reg. Conf. Ser. Math., Vol. 90).

[40] Schick T. Analysis on ∂-manifolds of bounded geometry, Hodge–de Rham isomorphism and L_2-index theorem: Thesis. — Mainz, 1996.

[41] Schubert H. Topologie. — Stuttgart: Teubner, 1964.

[42] Siebenmann L. Infinite simple homotopy types // Indag. Math. — 1970. — Vol. 32. — P. 479—495.

[43] Siebenmann L. The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five: Thesis. — Princeton Univ., 1965.

[44] Stöcker R., Zieschang H. Algebraische Topologie. — Stuttgart: Teubner, 1994.

[45] Stong R. Notes on Cobordism Theory, Princeton: Princeton Univ. Press, 1968. — (Math. Notes).

[46] Taylor L. R. Surgery on paracompact manifolds: Thesis. — U. C., Berkeley, 1971.

[47] Vanhecke L. Geometry in normal and tubular neighborhoods // Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari. — 1988. — Vol. 58, Suppl. — P. 73—176.

[48] Wall C. T. C. Surgery on Compact Manifolds. — New York: Academic Press, 1970.