Локальные коэффициенты и формула Герберта

П. М. АХМЕТЬЕВ
Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова
Российской академии наук (*ИЗМИРАН*)
e-mail: pmakhmet@izmiran.ru

Ф. Ю. ПОПЕЛЕНСКИЙ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: popelens@gmail.com

УДК 515.146.6+515.164.635

Ключевые слова: погружение, оснащение, кобордизм, гомоморфизм Гуревича, $\cap$-произведение.

Аннотация

Мы обсуждаем обобщение и приложения формулы Герберта для двойных точек погружения для случая, когда определена дополнительная структура нормального расслоения этого погружения.

Abstract

P. M. Akhmet'ev, Th. Yu. Popelenskii, Local coefficients and the Herbert formula, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 6, pp. 79—91.

We discuss a generalization and applications of the Herbert formula for double points of immersions, when the normal bundle of the immersion admits an additional structure.

1. Введение

В работах, связанных с теорией погружений, часто используется *теорема Герберта*. Напомним, в чём состоит её утверждение. Рассмотрим гладкое замкнутое многообразие N размерности $n-k$ и его погружение $g\colon N^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, трансверсальное вдоль самопересечения. Тогда для многообразия

$$\bar{L} = \{(x,y) \in N \times N \mid x \neq y,\ g(x) = g(y)\},$$

которое называется многообразием самопересечения погружения g, композиция $j\colon \bar{L} \subset N \times N \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} N$ является погружением. Рассмотрим также нормальное расслоение $\nu(g)$ к погружению g. Предположим, что многообразие N является ориентированным. Снабдим $\nu(g)$ и $\bar{L}$ соответствующими ориентациями.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 6, с. 79—91.
© 2016 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Класс, двойственный в N классу Эйлера расслоения $\nu(g)$, будем называть *гомологическим эйлеровым классом* и будем обозначать $e_*\big(\nu(g)\big)$. Тогда в группе $H_{n-2k}(N,\mathbb{Z})$ выполняется равенство (*формула Герберта*)

$$j_*[\bar{L}] + e_*\big(\nu(g)\big) = 0. \tag{1}$$

Если многообразие N неориентируемо, то равенство (1) выполняется, если все группы (ко)гомологий рассматривать с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

Отметим, что оригинальная работа Р. Герберта [9] посвящена k-кратным самопересечениям погружения. Имеется ряд обобщений этой формулы, равно как и работ, посвящённых разным подходам к доказательству результатов Р. Герберта (см. [2, 7, 8]). Самопересечения погружений можно изучать и с точки зрения гомологий классифицирующих петлевых пространств (см. [6]). Интерес к погружениям с точки зрения, развиваемой в данной работе, обусловлен классической работой [10], а также связями с гомотопическими группами сфер и пространств Тома (см. [3, 12]). Отметим в этой связи также работы [1, 4, 5] одного из авторов.

В данной работе мы обсудим обобщение формулы Герберта для двукратных самопересечений на случай, когда нормальное расслоение к g имеет дополнительную структуру, а также одно из возможных применений этой формулы.

Всюду в работе сумму Уитни k экземпляров векторного расслоения ξ будем обозначать $k\xi$. Тривиальное одномерное расслоение над N будем обозначать $\mathbf{e}_N$.

2. Погружения с дополнительной структурой нормального расслоения

Нам нужно определить несколько групп бордизмов регулярных погружений. Зафиксируем группу G и её представление в пространстве $\mathbb{R}^d$. Тогда определено векторное расслоение $\gamma = EG \times_G \mathbb{R}^d \to BG$.

Определение 1. Будем говорить, что для погружения $g\colon N^{n-kd} \looparrowright \mathbb{R}^n$ зафиксирована *G-структура* (нормального расслоения), если выбраны

а) непрерывное отображение $\eta\colon N \to BG$;

б) изоморфизм расслоений $\Xi\colon \nu(g) \to \oplus k\,\eta^*(\gamma)$.

Строго говоря, при термине «G-структура» нужно указывать рассматриваемое представление группы G или же расслоение γ (как это сделано, например, в [1]). Однако в нашем случае для каждой рассматриваемой группы G будет использоваться одно представление, поэтому наша терминология не вызовет недоразумений.

Рассмотрим всевозможные тройки $(g\colon N^{n-kd} \looparrowright \mathbb{R}^n, \eta, \Xi)$, где N замкнуто.

Определение 2. Будем говорить, что тройки $(g_0\colon N_0^{n-kd} \to \mathbb{R}^n, \eta_0, \Xi_0)$ и $(g_1\colon N_1^{n-kd} \to \mathbb{R}^n, \eta_1, \Xi_1)$ *бордантны*, если

1) существует компактное многообразие W^{n-kd+1} и диффеоморфизм

$$\varphi_0 \sqcup \varphi_1\colon N_0 \sqcup N_1 \to \partial W;$$

2) задано погружение $G\colon W^{n-kd+1} \looparrowright \mathbb{R}^n \times [0,1]$, которое в точках ∂W ортогонально подходит к $\mathbb{R}^n \times \{0,1\}$, согласованное с погружениями g_0 и g_1 на ∂W; а именно, при $s = 0,1$ ограничение $G|_{\varphi_s(N_s)}$ совпадает с композицией $N_s \xrightarrow{\varphi_s} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \{s\}$;
3) заданы непрерывное отображение $\eta\colon W^{n-kd+1} \to BG$ и изоморфизм $\Xi\colon \nu(g) \to \oplus k\,\eta^*(\gamma)$, согласованные с η_s и Ξ_s $(s = 0,1)$ на краю W в следующем естественном смысле: $\eta|_{\varphi_s(N_s)} = \eta_s$ и $\Xi|_{N_s} = \Xi_s$.

Стандартным образом проверяется, что введённое отношение бордантности является отношением эквивалентности. Несвязное объединение индуцирует на множестве классов бордантности структуру абелевой группы, эту группу мы будем обозначать $\mathrm{Imm}^G(n-kd, kd)$. Некоторые подробности можно найти в [1].

В случае, когда G-расслоение γ является ориентированным, многообразие N снабжено естественной ориентацией, построенной по Ξ. В общем случае γ не является ориентированным и N снабжено естественной ориентацией лишь при $k \equiv 0 \pmod 2$. Тем не менее для неориентируемого γ и $k \equiv 1 \pmod 2$ на N определена локальная ориентация. К одному такому специальному случаю $G \cong \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$ мы переходим.

Пусть G — некоторая группа, на которой задано действие $\mathbb{Z}$ нетривиальным автоморфизмом $\theta = \theta(1)\colon G \mapsto G$, $1 \in \mathbb{Z}$. Классифицирующее пространство $BG \rtimes \mathbb{Z}$ удобно представлять себе как скрученное произведение BG на окружность S^1, которое получается из $BG \times [0,1]$ отождествлением $BG \times \{0\}$ и $BG \times \{1\}$ с помощью гомеоморфизма $B\theta$. Гомоморфизм $G \rtimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ индуцирует проекцию $\mathrm{pr}_S\colon BG \rtimes \mathbb{Z} \to S^1$, которая в нашем случае является локально тривиальным расслоением со слоем BG.

Зафиксируем также вложение открытого полнотория $T = \dot{D}^{n-1} \times S^1 \subset \mathbb{R}^n$ на стандартное полноторие вращения. Определена проекция pr_T полнотория T на осевую окружность S^1. Обозначим через $\mathrm{pt} \in S^1$ отмеченную точку на осевой окружности. Тогда $\mathrm{pr}_S^{-1}(pt) \subset BG \rtimes \mathbb{Z}$ можно рассматривать как $BG \subset BG \rtimes \mathbb{Z}$.

Выберем некоторое представление $G \rtimes \mathbb{Z}$ в $\mathbb{R}^d$ и соответствующее ему d-мерное векторное (универсальное) расслоение γ над $BG \rtimes \mathbb{Z}$.

Определение 3. Будем говорить, что для погружения $g\colon N^{n-kd} \looparrowright \mathbb{R}^n$ зафиксирована *скрученная* $(G \rtimes \mathbb{Z})$*-структура* (нормального расслоения), если

а) погружение g пропускается через стандартное вложение полнотория T в $\mathbb{R}^n$, т. е. разлагается в композицию $N^{n-kd} \overset{\tilde{g}}{\looparrowright} T \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $K^{n-kd-1} \subset N^{n-kd}$ подмногообразие коразмерности 1, которое определено по формуле $(\mathrm{pr}_T \circ g)^{-1}(\mathrm{pt})$, предполагая, что отображение $\mathrm{pr}_T \circ g$ имеет pt регулярным значением. Обозначим через $U_K \subset N^{n-kd}$ тонкую регулярную окрестность подмногообразия $K^{n-kd-1} \subset N^{n-kd}$;
б) задано непрерывное отображение $\eta\colon N \to BG \rtimes \mathbb{Z}$, которое индуцирует отображение пар $\eta\colon (N; U_N, N \setminus U_N) \to (BG \rtimes \mathbb{Z}; BG, BG \rtimes \mathbb{Z} \setminus BG)$; более того, композиция $\mathrm{pr}_S \circ \eta$ гомотопна композиции $\mathrm{pr}_T \circ \tilde{g}$, причём гомотопический класс этой гомотопии фиксирован;

в) задан изоморфизм расслоений $\Xi\colon \nu(g) \to \oplus k\,\eta^*(\gamma)$.

Для таких погружений со скрученной $(G \rtimes \mathbb{Z})$-структурой определено понятие бордантности по аналогии с определением 2. На классах бордантности погружений со скрученной $(G \rtimes \mathbb{Z})$-структурой можно задать структуру абелевой группы. Сложение определено вложением несвязной суммы двух полноторий в полноторие T параллельно осевой окружности.

Эту группу будем обозначать $\mathrm{Imm}^{G\rtimes\mathbb{Z}}(n-kd, kd; T)$.

Группа $\mathrm{Imm}^{\mathbb{Z}_4\rtimes\mathbb{Z}}(n-2k, 2k; T)$

Рассмотрим группу $\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$. Она задаётся образующими $b \in \mathbb{Z}_4$, $\tilde{a} \in \mathbb{Z}$ и соотношениями $b^4 = e$, $\tilde{a}^{-1} b \tilde{a} = b^3$. Определим представление A группы $\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$ в $\mathbb{R}^2$ соответствием

$$b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{a} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда мы можем рассматривать группу $\mathrm{Imm}_T^{\mathbb{Z}_4\rtimes\mathbb{Z}}(n-2k, 2k; T)$, представителями которой являются погружения $g\colon N^{n-2k} \looparrowright T \subset \mathbb{R}^n$ со скрученной $(\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z})$-структурой.

В случае, когда k чётно, расслоение $\nu(g)$ ориентируемо (так как $w_1\big(\nu(g)\big) = kw_1\big(\eta^*(\gamma)\big) = 0$ даже для неориентируемого $\eta^*(\gamma)$). Тогда N и $\bar{L}$ тоже ориентируемы и при надлежащем выборе ориентаций будет верна формула Герберта

$$j_*[\bar{L}] + e_*\big(\nu(g)\big) = 0 \quad \text{в группе} \quad H_{n-4k}(N, \mathbb{Z}).$$

Если k нечётное, то никаких выводов об ориентируемости сделать нельзя. Однако можно написать формулу Герберта, используя когомологии с ориентирующей локальной системой коэффициентов.

Определим на $B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$ локальную систему коэффициентов $\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}}$ с помощью действия $\pi_1(B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$ автоморфизмами группы $\mathbb{Z}$, заданного композицией

$$\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{mod}\,2} \mathbb{Z}_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}).$$

Аналогичным образом можно определить локальную систему коэффициентов на любом многообразии N^{n-kd}, которое входит в тройку (g, η, Ξ), являющуюся представителем элемента $\mathrm{Imm}^{\mathbb{Z}_4\rtimes\mathbb{Z}}(n-kd, kd; T)$, как обратный образ $\eta^*(\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})$. Эту систему локальных коэффициентов на N мы тоже будем обозначать через $\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}}$ в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений.

Теперь для этого случая обсудим слагаемые в формуле Герберта. Пусть $(g\colon N^{n-2k} \looparrowright T \subset \mathbb{R}^n,\ \eta\colon N \to B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}, \Xi)$ — представитель некоторого элемента группы $\mathrm{Imm}^{\mathbb{Z}_4\rtimes\mathbb{Z}}(n-2k, 2k; T)$. Многообразие двойных точек $\bar{L}$ ориентируемо. В самом деле,

$$\nu(\bar{L} \looparrowright \mathbb{R}^n) = \nu(\bar{N} \looparrowright \mathbb{R}^n)|_{\bar{L}} \oplus \nu(\bar{L} \looparrowright N) = \nu(g)|_{\bar{L}} \oplus \tau^*\nu(g)|_{\bar{L}},$$

где $\tau\colon \bar{L} \to \bar{L}$ — инволюция, индуцированная перестановкой координат в $N \times N$. Расслоения $\nu(g)|_{\bar{L}}$ и $\tau^*\nu(g)|_{\bar{L}}$ имеют одинаковые классы w_1, так как если обход

по петле γ в $\bar{L}$ обращает ориентацию слоя $\nu(g)|_{\bar{L}}$, то обход по петле $\tau\circ\gamma$ тоже обращает ориентацию. Таким образом, можно определить фундаментальный класс $[\bar{L}] \in H_{n-4k}(\bar{L},\mathbb{Z})$. Следовательно, первое слагаемое $i_{\bar{L}\looparrowright N}([\bar{L}]) \in H_{n-4k}(N,\mathbb{Z})$ определено корректно.

Теперь рассмотрим второе слагаемое. Основная проблема состоит в неориентируемости. Однако в нашем случае она легко контролируется. Обозначим через $o\big(\nu(g)\big)$ ориентирующий пучок (локальную систему коэффициентов со слоем $\mathbb{Z}$) расслоения $o\big(\nu(g)\big)$. Напомним, что на N локальная система коэффициентов со слоем $\mathbb{Z}$ задаётся элементом группы $\mathrm{Hom}\big(\pi_1(N),\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})\big) = H^1(N,\mathbb{Z}_2)$. Ориентирующий пучок $o\big(\nu(g)\big)$ задаётся классом $w_1\big(\nu(g)\big) \in H^1(N,\mathbb{Z}_2)$. Для расслоения $\nu(g)$ определён класс Эйлера $e\big(\nu(g)\big) \in H^{2k}(N,o\big(\nu(g)\big))$. С другой стороны, многообразие N ориентируемо в когомологиях с локальной системой коэффициентов $o(TN)$. Ввиду разложения $TN \oplus \nu(g) = n\mathbf{e}_N$, где $\mathbf{e}_N$ — тривиальное одномерное расслоение над N, имеет место изоморфизм $o(TN) = o\big(\nu(g)\big)$. Таким образом, определён фундаментальный класс $[N] \in H_{n-2k}\Big(N,o\big(\nu(g)\big)\Big)$. Отметим, что $o\big(\nu(g)\big) = \big(\eta^*(\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})\big)^{\otimes k}$. Тогда $H_{n-2k}\Big(N,o\big(\nu(g)\big)\Big) = H_{n-2k}\big(N,\big(\eta^*(\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})\big)^{\otimes k}\big)$. Получаем гомологический класс Эйлера $e_*\big(\nu(g)\big) \in H_{n-4k}(N,\mathbb{Z})$, определённый как $[N]\cap e\big(\nu(g)\big) = [N]\cap\Big(e\big(\eta^*(\gamma)\big)\Big)^k$.

Теорема 1. *Пусть многообразие N снабжено скрученной $(\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z})$-структурой. Тогда в группе $H_{n-4k}(N,\mathbb{Z})$ выполняется равенство*

$$j_*[\bar{L}] + e_*\big(\nu(g)\big) = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Рассуждения повторяют классические (см. [9]). □

Замечание 1. Легко заметить, что эта теорема может быть обобщена на случай скрученной $(G \rtimes \mathbb{Z})$-структуры, если задано представление $G \to \mathrm{SO}(d)$, которое продолжается до представления $G \rtimes \mathbb{Z} \to \mathrm{O}(d)$.

Гомоморфизм Гуревича

Определим гомоморфизм

$$H\colon \mathrm{Imm}^{\mathbb{Z}/4\rtimes\mathbb{Z}}(n-2k,2k;T) \to H_{n-2k}(B\mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z};(\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes k}).$$

Пусть элемент $x \in \mathrm{Imm}^{\mathbb{Z}/4\rtimes\mathbb{Z}}(n-2k,2k;T)$ представлен тройкой

$$(g\colon N^{n-2k} \looparrowright T \subset \mathbb{R}^n,\ \eta\colon N \to B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z},\ \Xi).$$

Определён фундаментальный класс $[N] \in H_{n-2k}\Big(N;\eta^*\big((\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes k}\big)\Big)$. Положим $H(x) = \eta_*([N])$. Легко проверить, что этот класс не зависит от выбора представителя элемента x.

Лемма 1.

а) *Соответствующее вложению* $\mathbb{Z}_4 \subset \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$ *отображение классифицирующих пространств* $i\colon B\mathbb{Z}_4 \subset B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$ *индуцирует морфизм* $i^*(\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}}) = \mathbb{Z}$ *локальных систем коэффициентов.*

б) *В размерности* $q = 4m+1$ *имеет место изоморфизм*

$$i_*\colon \mathbb{Z}_4 = H_q(B\mathbb{Z}/4;\mathbb{Z}) \cong H_q\bigl(B\mathbb{Z}/4; i^*(\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})\bigr) \to H_q(B\mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z};\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}}).$$

в) *В размерности* $q = 4m+3$ *имеет место изоморфизм*

$$i_*\colon \mathbb{Z}_4 = H_q(B\mathbb{Z}/4;\mathbb{Z}) \to H_q(B\mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z};\mathbb{Z}).$$

г) $i^*\colon H^2(B\mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z};\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}}) \to H^2(B\mathbb{Z}/4;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4$ — *изоморфизм, причём класс Эйлера* $e = e(\gamma)$ *расслоения* γ *является образующей. Кроме того, операция* $\cap e \mapsto -\cap e$ *задаёт изоморфизмы*

$$H_{4m+1}(B\mathbb{Z}_4 \rtimes Z;\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}}) \to H_{4m-1}(B\mathbb{Z}_4 \rtimes Z;\mathbb{Z})$$

и

$$H_{4m-1}(B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z};\mathbb{Z}) \to H_{4m-3}(B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z};\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})$$

при $m \geqslant 1$.

Доказательство. Напомним, что $H_q(B\mathbb{Z}/4;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4$ для любого нечётного $q \geqslant 1$ и $H_0(B\mathbb{Z}/4;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Гомологии $\mathbb{Z}$ в модуле коэффициентов M известны: $H_0(B\mathbb{Z}, M) = M_{\mathbb{Z}}$ (коинварианты действия $\mathbb{Z}$ на M) и $H_1(\mathbb{Z}, M) = M^{\mathbb{Z}}$ (инварианты действия $\mathbb{Z}$ на M).

Рассмотрим пространство $E\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$, реализованное в виде $S^\infty \times \mathbb{R}$. Здесь

$$S^\infty = \bigcup_n \Bigl\{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n \;\Bigm|\; \sum |z_k|^2 = 1\Bigr\}.$$

Действие образующих b, $\tilde a$ группы $\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$ зададим формулами $b(z,t) = (e^{\pi i/2}z, t)$ и $\tilde a(z,t) = (\bar z, t+1)$. Легко убедиться, что соотношения $b^4 = 1$ и $\tilde a^{-1} b \tilde a = b^3$ при таком действии выполняются, тем самым эти формулы задают (свободное, как можно проверить) действие $\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$ на $E\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z} = S^\infty \times \mathbb{R}$.

Рассмотрим спектральную последовательность расслоения

$$B\mathbb{Z}_4 \to B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z} \to B\mathbb{Z}$$

для тривиального модуля коэффициентов $\mathbb{Z}$. Её второй член равен

$$E^2_{pq} = H_p\bigl(B\mathbb{Z}, H_q(B\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z})\bigr).$$

По соображениям размерности $E^2_{**} = E^\infty_{**}$. Нетривиальными могут быть только E^2_{0q} и $E^2_{1,q-1}$ при нечётных $q \geqslant 1$ и при $q = 0$. Поэтому нам остаётся вычислить действие образующей $\tilde a \in \mathbb{Z}$ в гомологиях $H_q(B\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z})$. Обозначим соответствующий гомоморфизм через $\tilde a_*$. Поскольку нетривиальные группы $H_q(B\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z})$ изоморфны $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_4$, то действие $\tilde a_*$ в гомологиях $H_q(B\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z})$ состоит в умножении на ± 1. Действие образующей $\tilde a$ состоит в сопряжении всех координат точки S^∞,

поэтому знак зависит от q следующим образом: $\tilde{a}_* = 1$ при $q = 4m+3$ и $\tilde{a}_* = -1$ при $q = 4m+1$. Поэтому E^2_{0q} и E^2_{1q} изоморфны $\mathbb{Z}_4$ при $q = 4m+3$ и $\mathbb{Z}_2$ при $q = 4m+1$. Пункт а) доказан. Вычисление гомологий $H_*(B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})$ проводится аналогичным образом. Однако при вычислении действия $\mathbb{Z}$ в гомологиях $H_q\big(B\mathbb{Z}_4, i^*(\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})\big)$ нужно учесть дополнительный знак -1, так как образующая $\tilde{a}$ действует в модуле коэффициентов умножением на -1. В этом случае $\tilde{a}_* = 1$ при $q = 4m+1$ и $\tilde{a}_* = -1$ при $q = 4m+3$. Поэтому E^2_{0q} и E^2_{1q} изоморфны $\mathbb{Z}_4$ при $q = 4m+1$ и $\mathbb{Z}_2$ при $q = 4m+3$. Оставшиеся утверждения доказываются аналогично. $\square$

Многообразия самопересечения погружений со скрученной $(\mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z})$-структурой нормального расслоения

Пусть (g, η, Ξ) — погружение со скрученной $(\mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z})$-структурой. Тогда L^{n-4k} — многообразие самопересечения погружения g — определяется как $L = \bar{L}/\tau$, где τ — инволюция на $N \times N$, переставляющая сомножители. Тем самым имеется каноническое двулистное накрытие $\pi\colon \bar{L} \to L$. Выполняются следующие свойства.

1. Имеется погружение $h\colon L^{n-4k} \looparrowright T \subset \mathbb{R}^n$, двулистное накрытие которого $\bar{L}^{n-4k}$ пропускается через g, а именно

$$\begin{tikzcd} \bar{L} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi"'] & N^{n-2k} \arrow[r, "\tilde{g}"] & T \arrow[d, equal] \\ L \arrow[rr, "h"] & & T \end{tikzcd}.$$

   В этой диаграмме все горизонтальные отображения являются погружениями. Напомним, что погружение $j\colon \bar{L} \to N$ определяется как композиция вложения $\bar{L} \subset N \times N$ и проекции $N \times N \to N$ на первый сомножитель.
2. Нормальное расслоение к $\bar{L}$ разлагается в сумму $\nu(g)|_{\bar{L}} \oplus \tau * \nu(g)|_{\bar{L}}$, где $\tau\colon \bar{L} \to \bar{L}$ — инволюция, переставляющая листы двулистного накрытия. Поэтому нормальное расслоение к $\bar{h}\colon \bar{L} \looparrowright T$ разлагается в сумму Уитни k экземпляров расслоения $\eta \oplus \tau^*\eta$, которое классифицируется отображением в $B(\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z})$. Поскольку $\tilde{h}$ и $\tilde{h} \circ \tau$ совпадают по определению многообразия $\bar{L}$, то композиции $\nu|_{\bar{L}}$ и $\tau^*\nu|_{\bar{L}}$ с проекцией $\mathrm{pr}_S\colon B\mathbb{Z}_4 \rtimes Z \to B\mathbb{Z}$ совпадают друг с другом. Следовательно, отображение, классифицирующее $\eta \oplus \tau^*\eta$, пропускается через отображение

$$B(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z} \to B(\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}),$$

   индуцированное диагональным вложением $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Это означает, что нормальное расслоение к $h\colon L \looparrowright T \subset \mathbb{R}^n$ разлагается в сумму Уитни k экземпляров четырёхмерного расслоения, которое классифицируется отображением $\zeta\colon L \to B\big((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}\big) \rtimes \mathbb{Z}_2$. Соответствующее универсальное

расслоение над $B\big((\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)\rtimes\mathbb{Z}\big)\rtimes\mathbb{Z}_2$ для простоты тоже будем обозначать через $\gamma^{[2]}$. Заметим теперь, что

$$\big((\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)\rtimes\mathbb{Z}\big)\rtimes\mathbb{Z}_2=\big((\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)\rtimes\mathbb{Z}_2\big)\rtimes\mathbb{Z},$$

поскольку действия $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ коммутируют друг с другом (образующая в $\mathbb{Z}$ умножает оба элемента из $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ на -1, а образующая в $\mathbb{Z}_2$ меняет их местами; $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$ друг на друге не действуют).

Итак, тройка (g,η,Ξ) со скрученной $(\mathbb{Z}_4\rtimes\mathbb{Z})$-структурой определяет тройку (h,ζ,Λ), где $h\colon L^{n-4k}\looparrowright\mathbb{R}^n$ — погружение, $\zeta\colon L\to B((\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)\rtimes\mathbb{Z})\rtimes\mathbb{Z}_2$ — непрерывное отображение и $\Lambda\colon\nu(h)\to k\zeta^*(\gamma^{[2]})$ — изоморфизм.

Подгруппы в $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)\rtimes\mathbb{Z}_2$ и $\big((\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)\rtimes\mathbb{Z}_2\big)\rtimes\mathbb{Z}$ и их представления в $\mathrm{SO}(4)$

Представление $A^{[2]}$ группы $\big((\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)\rtimes\mathbb{Z}_2\big)\rtimes Z$ в $\mathrm{O}(4)$ задаётся соответствием

$$b_1=\Big(\big((1,0),0\big),0\Big)\mapsto\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad b_2=\Big(\big((0,1),0\big),0\Big)\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$t=\Big(\big((0,0),1\big),0\Big)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde a=\Big(\big((0,0),0\big),1\Big)\mapsto\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Подгруппа $\mathbf{Q}\subset(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)\rtimes\mathbb{Z}_2$

Группа $\mathbf{Q}$, состоящая из кватернионов ±1, $\pm\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$, $\pm\mathbf{k}$, вкладывается к группу $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)\rtimes\mathbb{Z}_2$ с помощью соответствия

$$1\mapsto\big((0,0),0\big),\quad \mathbf{i}\mapsto\big((1,-1),0\big),\quad \mathbf{j}\mapsto\big((1,1),1\big),\quad \mathbf{k}\mapsto\big((2,0),1\big).$$

Тогда стандартное представление группы $\mathbb{Z}_4$ в $\mathbb{R}^2$ поворотами, кратными $\pi/2$, индуцирует представление группы $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)\rtimes\mathbb{Z}_2$ в $\mathbb{R}^4$. В этом представлении элементам группы $\mathbf{Q}$ соответствуют матрицы

$$\mathbf{i}\mapsto\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{j}\mapsto\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}\mapsto\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Подгруппы $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \subset (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}_2$ и $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z} \subset \big((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}_2\big) \rtimes \mathbb{Z}$

Диагональное отображение $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ индуцирует вложение $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ на подгруппу в $(\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4) \rtimes \mathbb{Z}/2$. Образующие b, t группы $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ при этом отображаются в элементы $\big((1,1),0\big)$ и $\big((0,0),1\big)$ группы $(\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4) \rtimes \mathbb{Z}/2$ и поэтому представляются матрицами

$$b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подгруппа

$$\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2 \rtimes \mathbb{Z} \subset \big((\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4) \rtimes \mathbb{Z}/2\big) \rtimes \mathbb{Z}$$

определена как расширение указанной подгруппы при включении

$$(\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4) \rtimes \mathbb{Z}/2 \subset \big((\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4) \rtimes \mathbb{Z}/2\big) \rtimes \mathbb{Z}.$$

Высечение двумерным классом

Для выбранного представителя $(g\colon N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n, \eta, \Xi)$ некоторого класса $\mathrm{Imm}^{\mathbb{Z}/4\rtimes\mathbb{Z}}(n-2k, 2k; T)$ рассмотрим расслоение $\eta^*(\gamma)$. Нули сечения общего положения образуют подмногообразие $N_1 \subset N$, причём для образа фундаментального класса $[N_1] \in H_{n-2k-2}\big(N_1, (\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes(k+1)}\big)$ при вложении $i_N\colon N_1 \to N$ выполняется равенство $(i_N)_*[N_1] = [N] \cap \eta^*(e)$ в группе $H_{n-2k-2}\big(N, (\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes(k+1)}\big)$. Отсюда следует, что в группе $H_{n-2k-2}\big(B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}, (\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes(k+1)}\big)$ выполняется равенство $H(N_1) = H(N) \cap e$ (или $\eta_* \circ (i_N)_*[N_1] = \eta_*[N] \cap e$).

Многообразия двойных точек $\bar{L}_1 \subset N_1$ и $\bar{L} \subset N$

Как было сказано во введении, для многообразия

$$\bar{L} = \{(x,y) \in N \times N \mid x \neq y,\ g(x) = g(y)\}$$

определено погружение $j\colon \bar{L} \subset N \times N \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} N$. Также имеется двулистное накрытие $\pi\colon \bar{L} \to L$, где $L = \bar{L}/\tau$ и τ — инволюция на $N \times N$, переставляющая координаты: $\tau(x,y) = (y,x)$. Аналогичным образом определяется L_1 и его двулистное накрытие $\bar{L}_1 \subset N_1 \times N_1$. Обозначим через i_L вложение L_1 в L.

Применяя теорему Герберта к погружениям

$$g\colon N^{n-2k} \to \mathbb{R}^n,$$
$$g_1\colon N^{n-2k-2} \to \mathbb{R}^n,$$

получаем два соотношения:

$$j_*[\bar{L}] + [N] \cap \eta^*(e)^k = 0 \ \text{ в } \ H_{n-4k}\big(N, (\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes 2k}\big),$$
$$(j_1)_*[\bar{L}_1] + [N_1] \cap \eta^*(e)^{(k+1)} = 0 \ \text{ в } \ H_{n-4k-4}\big(N, (\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes(2k+2)}\big).$$

Теперь ко второму соотношению применим $(i_N)_*$ и получим, что в группе $H_{n-4k-4}(N, (\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{2k+2})$ выполняется равенство

$$j_*[\bar{L}] \cap \eta^*(e^2) = -[N] \cap \eta^*(e)^{k+2} = -(i_N)_*[N_1] \cap \eta^*(e)^{k+1} = (i_N)_* \circ (j_1)_*[\bar{L}_1]. \quad (3)$$

Теперь вычислим $(i_L)_*[\bar{L}_1]$ в группе $H_{n-4k-4}\big(\bar{L}, (\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes(2k+2)}\big)$ другим способом. Для этого заметим, что $\bar{L}_1$ является пересечением двух многообразий $\bar{L} \cap N_1$ и $\tau(\bar{L} \cap N_1)$, где $\tau\colon \bar{L} \to \bar{L}$ — инволюция, переставляющая листы накрытия $\bar{L} \to L$. Получаем, что в группе $H_{n-4k-4}\big(L, (\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes(2k+2)}\big)$ выполняется соотношение $(i_L)_*[L_1] = [\bar{L}] \cap \big(e|_{\bar{L}} \cup \tau^*(e|_{\bar{L}})\big)$, где $e|_L = (\bar{\zeta} \circ \mathrm{pr}_1)^*(e)$. Отметим теперь, что в общем случае классы $\tau^*(e|_{\bar{L}})$ и $e|_{\bar{L}}$ связаны друг с другом сложным образом. Тем не менее в некоторых случаях, когда структурную группу нормального расслоения к L можно редуцировать к меньшей подгруппе, эту связь можно описать.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\bar{L} \arrow[r, "\bar{\zeta}"] \arrow[d, "\pi"'] & B(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\pi"'] & B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z} \\
L \arrow[r, "\zeta"] & B((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

Ввиду коммутативности диаграммы вместо связи $e|_L$ и $\tau^*(e|_L)$ можно исследовать связь $(\mathrm{pr}_1)^*(e)$ и $\tau^*\big((\mathrm{pr}_1)^*(e)\big)$ в когомологиях классифицирующего пространства $B(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}$. Это делается в следующих двух леммах.

Рассмотрим отображения классифицирующих пространств

$$I_1\colon BQ \subset B(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}_2 \subset B\big((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}_2\big) \rtimes \mathbb{Z},$$
$$I_2\colon B(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z} \subset B\big((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}_2\big) \rtimes \mathbb{Z},$$

которые индуцированы вложениями на подгруппы. Через $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$ обозначим соответствующие отображения двулистных накрытий этих пространств

$$\bar{I}_1\colon B\mathbb{Z}_4 \to B(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z},$$
$$\bar{I}_2\colon B\mathbb{Z}_4 \times \rtimes\mathbb{Z} \to B(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}.$$

Положим $e_0 = (\mathrm{pr}_1)^*(e)$, $e_Q = (\bar{I}_1)^*(e_0)$, $e_{\mathrm{diag}} = (\bar{I}_2)^*(e_0)$.

Лемма 2. *Имеет место равенство* $\tau^*(e_Q) = -e_Q$.

Доказательство. Реализуем BQ как фактор кватернионной сферы $S^\infty_{\mathbb{H}}/Q = S^\infty_{\mathbb{H}}/\{\pm 1, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$, а $B\mathbb{Z}_4$ как фактор кватернионной сферы по циклической группе, порождённой $\mathbf{i}$: $S^\infty_{\mathbb{H}}/\mathbb{Z}_4 = S^\infty_{\mathbb{H}}/\{\pm 1, \pm\mathbf{i}\}$. В этом случае инволюция $\tau\colon S^\infty_{\mathbb{H}}/\mathbb{Z}_4 \to S^\infty_{\mathbb{H}}/\mathbb{Z}_4$, переставляющая листы накрытия $B\mathbb{Z}_4 \to BQ$, состоит в умножении на $\mathbf{j}$.

Удобно изучить действие τ не на образующей двумерных когомологий $i^*(e_Q)$ пространства $B\mathbb{Z}_4$, а на образующей α одномерных гомологий, соответствующей $i^*(e_Q)$ по теореме об универсальных коэффициентах. В качестве образующей α

можно взять любую петлю вида $(\cos t + \mathbf{i}\sin t)x$, где $t \in [0, \pi/2]$ и x — любая точка $S^\infty_{\mathbb{H}}/\{\pm 1, \pm\mathbf{i}\}$. Любые две такие петли задают один и тот же класс α. Поэтому в качестве представителя класса α рассмотрим не $(\cos t + \mathbf{i}\sin t)x$, а $\gamma_(t) = (\cos t + \mathbf{i}\sin t)\mathbf{x}$; как мы сейчас увидим, её удобнее сравнивать с $\tau_*(\alpha)$. Поскольку действие τ состоит в умножении на $\mathbf{j}$, то $\tau_*(\alpha)$ представляется петлей $\gamma_2(t) = \mathbf{j}(\cos t + \mathbf{i}\sin t)x$. Легко заметить, что $\gamma_1(t)$ отличается от $\gamma_2(t)$ только сменой ориентации, поэтому $\tau_*(\alpha) = -\alpha$. □

Следствие 1. *Пусть $\bar{x} \in H_q(B\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}, (\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes k})$ принадлежит образу $(\bar{I}_1)_*$. Тогда для $\bar{x} \cap \tau^*(e_0) \in H_{q-2}(B\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}, (\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes k-1})$ выполняется равенство $\bar{x} \cap \tau^*(e_0) = -\bar{x} \cap e_0$.*

Доказательство. Пусть $\bar{x} = (\bar{I}_1)_*(u)$. Тогда

$$\bar{x} \cap \tau^*(e_0) = (\bar{I}_1)_*(u) \cap \tau^*(e_0) = \\ = (\bar{I}_1)_*\Big(u \cap \tau^*\big(I_1^*(e_0)\big)\Big) = (I_1)_*\big(u \cap \tau^*(e_Q)\big) = (I_1)_*\big(u \cap (-e_Q)\big).$$

Проделав аналогичные выкладки, получим равенство $\bar{x} \cap e_0 = (I_1)_*(u \cap e_Q)$. □

Лемма 3. *Имеет место равенство $\tau^*(e_{\mathrm{diag}}) = e_{\mathrm{diag}}$.*

Доказательство. Нам нужно вычислить действие τ^* на образующей группы $H^2(B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^{\mathrm{tw}}) = \mathbb{Z}_4$. Для этого заметим, что накрытие $B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z} \to B\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}$ можно представить как $B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z} \times S^\infty \xrightarrow{\mathrm{id}\times\pi} B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z} \times (S^\infty/\mathbb{Z}_2)$. Отсюда следует, что инволюция τ, переставляющая листы накрытия, действует в (ко)гомологиях пространства $B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$ тождественно. □

Следствие 2. *Пусть $\bar{y} \in H_q(B\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}, (\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes k})$ принадлежит образу $(\bar{I}_2)_*$.*

а) *Тогда для $\bar{y} \cap \tau^*(e_0) \in H_{q-2}(B\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}, (\mathbb{Z}^{\mathrm{tw}})^{\otimes k-1})$ выполняется равенство $\bar{y} \cap \tau^*(e_0) = \bar{y} \cap e_0$.*

б) *Если к тому же $\bar{y}$ лежит в образе трансфера накрытия, то $\bar{y}$ — чётный элемент.*

Доказательство. Пусть $\bar{y} = (\bar{I}_2)_*(v)$. Тогда

$$\bar{y} \cap \tau^*(e_0) = (\bar{I}_2)_*(v) \cap \tau^*(e_0) = (\bar{I}_2)_*\Big(v \cap \tau^*\big(I_2^*(e_0)\big)\Big) = \\ = (I_2)_*\big(u \cap \tau^*(e_{\mathrm{diag}})\big) = (I_2)_*(u \cap e_{\mathrm{diag}}).$$

Проделав аналогичные выкладки, получим равенство $\bar{y} \cap e_0 = (I_2)_*(v \cap e_{\mathrm{diag}})$.

Для доказательства второго утверждения заметим, что гомоморфизм факторизации $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$ задаёт отображение $s\colon B\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z} \to B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}$, для которого композиция $s \circ \pi$ гомотопна тождественному отображению. Тогда $\bar{y} = s_*\big(\pi_*(\bar{y})\big)$. Элемент $s_*\big(\pi_*(\bar{y})\big)$ чётный. □

Приложение

Дополнительное условие. Предположим, что образ $\zeta_*([L^{n-4k}])$ лежит в подгруппе

$$\mathrm{Im}(I_1)_* + \mathrm{Im}(I_2)_* \subset H_{n-4k}\big(B\big((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}_2\big) \rtimes \mathbb{Z}; \mathbb{Z}\big).$$

Теорема 2. *Предположим, что $n \equiv 3 \pmod 4$, k чётное, причём $n - 4k \geqslant 7$. Предположим также, что выполняется дополнительное условие, сформулированное выше. Тогда $\eta_*([N^{n-2k}] \in H_{n-2k}(B\mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4$ — чётный элемент.*

Доказательство. Пусть $\zeta_*([L^{n-4k}]) = x + y$, где $x = (I_1)_*(u)$ и $y = (I_2)_*(v)$ для подходящих элементов u и v. Применяя трансфер накрытий, получаем, что $\bar{\zeta}_*([\bar{L}^{n-4k}]) = \bar{x} + \bar{y}$, где $\bar{x} = (\bar{I}_1)_*(\bar{u})$ и $\bar{y} = (\bar{I}_2)_*(\bar{v})$.

Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\bar{L}_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "i_L"'] & N_1 \arrow[d, "i_N"'] & \\
\bar{L} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\bar{\zeta}"'] & N \arrow[r, "\eta"] & B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z} \\
& B(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z} \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"'] &
\end{tikzcd}$$

и вычислим образ $[L_1] \in H_{n-4k-4}(\bar{L}_1, \mathbb{Z})$ в группе $H_{n-4k-4}(B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4$ двумя способами.

Во-первых, этот образ можно записать в виде $(\eta \circ i_N \circ j_1)_*[\bar{L}_1]$. Применив к обеим частям формулы (3) гомоморфизм η_*, получим

$$(\eta \circ i_N \circ j_1)_*[\bar{L}_1] = (\eta \circ j)_*[\bar{L}] \cap e^2 = (\mathrm{pr}_1)_*(\zeta_*[\bar{L}]) \cap e^2 = (\mathrm{pr}_1)_*(\bar{x} + \bar{y}) \cap e^2. \quad (4)$$

Во-вторых, вычислим его в виде $(\mathrm{pr}_1 \circ \bar{\zeta} \circ i_L)_*[\bar{L}_1]$. С помощью следствия 1 и пункта а) следствия 2 получаем, что

$$\begin{aligned}(\mathrm{pr}_1 \circ \bar{\zeta} \circ i_L)_*[\bar{L}_1] &= (\mathrm{pr}_1)_* \circ (\bar{\zeta})_*\big([\bar{L}] \cap (\tau^*(e|_L) \cup e|_L)\big) = \\ &= (\mathrm{pr}_1)_*\big(\bar{\zeta}_*[\bar{L}] \cap (\tau^(e_0) \cup e_0)\big) = (\mathrm{pr}_1)_*(-\bar{x} + \bar{y}) \cap e^2. \quad (5)\end{aligned}$$

Приравнивая результаты вычислений (4) и (5), получаем, что $2(\mathrm{pr}_1)_*(\bar{x}) \cap e^2 = 0$ в группе $H_{n-4k-4}(B\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4$, поэтому $(\mathrm{pr}_1)_*(\bar{x}) \cap e^2$ — чётный элемент. По пункту б) следствия 2 элемент $\bar{y}$ тоже чётный. Значит, мы показали, что элемент $(\mathrm{pr}_1)_*(\zeta_*[\bar{L}]) \cap e^2 = \eta_*(j_*[\bar{L}]) \cap e^2$ чётный.

Из формулы Герберта для погружения g получаем, что $\eta_*(j_*[\bar{L}]) \cap e^2 = -\eta_*([N]) \cap e^{k+2}$. Поскольку отображение высечения классом Эйлера $-\cap e$ является изоморфизмом, то $\eta_*([N])$ — чётный элемент. $\square$

Работа авторов частично поддержана грантом РФФИ № 15-01-06302.

Литература

[1] Ахметьев П. М., Фролкина О. Д. О свойствах групп скоснащённых кобордизмов погружений // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 5. — С. 19—46.

[2] Липпнер Г., Сюч А. Новое доказательство формулы Герберта кратных точек // Фундамент. прикл. матем. — 2005. — Т. 11, вып. 5. — С. 107—116.

[3] Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий // Тр. МИАН СССР. — 1955. — Т. 45. — С. 3—139.

[4] Akhmet'ev P. M., Eccles P. J. The relationship between framed bordism and skew-framed bordism // Bull. London Math. Soc. — 2007. — Vol. 39, no. 3. — P. 473—481.

[5] Akhmetiev P., Frolkina O. On non-immersibility of $\mathbb{R}P^{10}$ to $\mathbb{R}^{15}$ // Topology Its Applications. — 2013. — Vol. 160, no. 11. — P. 1241—1254.

[6] Eccles P. J. Multiple points of codimension one immersions // Topology Symposium, Siegen 1979. — Berlin: Springer, 1980. — (Lect. Notes Math.; Vol. 788). — P. 23—38.

[7] Eccles P. J., Grant M. Bordism classes represented by multiple point manifolds of immersed manifolds // Тр. МИАН. — 2006. — Т. 252. — С. 55—60.

[8] Grant M. Bordism of Immersions: Thesis. — 2006.

[9] Herbert R. J. Multiple points of immersed manifolds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1981. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 250).

[10] Hirsch M. W. Immersions of manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol. 93. — P. 242—276.

[11] Szűcs A. Cobordism of immersions and singular maps, loop spaces and multiple points // Geometric Algebraic Topology. — 1986. — Vol. 18. — P. 239—253.

[12] Wells R. Cobordism groups of immersions // Topology. — 1966. — Vol. 5. — P. 281—294.