Разбиение чисел Бетти—Новикова и гомологий Новикова, индуцированных S^1-значным отображением

Д. БУРГЕЛЯ
Университет Огайо, США
e-mail: burghele@math.ohio-state.edu

УДК 515.142

Ключевые слова: числа Бетти—Новикова, пополнение по фон Нейману.

Аннотация

Паре (X, f), где X — компактный абсолютный окрестностный ретракт и $f\colon X \to \mathbb{S}^1$ — непрерывное отображение, полю κ и неотрицательному целому числу r мы поставим в соответствие конечный набор комплексных чисел z с кратностями $\delta^f_r(z)$, а также соответствующее конечное семейство свободных $\kappa[t^{-1}, t]$-модулей рангов $\delta^f_r(z)$. Предлагаемое соответствие схоже с соответствием, связывающим оператор в конечномерном комплексном векторном пространстве с множеством его собственных значений и системой обобщённых собственных подпространств. Числа δ^f_r для фиксированного r образуют разбиение r-го числа Бетти—Новикова, а система $\hat{\delta}^f_r$ задаёт разложение гомологий Новикова в градуировке r, ассоциированных с когомологическим классом, определённым отображением f. В случае поля $\kappa = \mathbb{C}$ система $\hat{\delta}^f_r$ задаётся пополнением по фон Нейману системы $\hat{\hat{\delta}}^f_r$ попарно ортогональных замкнутых гильбертовых подмодулей в L_2-гомологиях бесконечнолистного циклического накрытия X, заданного отображением f, которые представляют собой гильбертов $L^\infty(\mathbb{S}^1)$-модуль.

Abstract

D. Burghelea, Refinement of Novikov–Betti numbers and of Novikov homology provided by an angle valued map, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 6, pp. 93—113.

To a pair (X, f), X compact ANR and $f\colon X \to \mathbb{S}^1$ a continuous angle valued map, κ a field, and a nonnegative integer r, one assigns a finite configuration of complex numbers z with multiplicities $\delta^f_r(z)$ and a finite configuration of free $\kappa[t^{-1}, t]$-modules $\hat{\delta}^f_r$ of rank $\delta^f_r(z)$ indexed by the same numbers z. This is in analogy with the configuration of eigenvalues and of generalized eigenspaces of a linear operator in a finite-dimensional complex vector space. The configuration δ^f_r refines the Novikov–Betti number in dimension r and the configuration $\hat{\delta}^f_r$ refines the Novikov homology in dimension r associated with the cohomology class defined by f. In the case of the field $\kappa = \mathbb{C}$, the configuration $\hat{\delta}^f_r$ provides by “von-Neumann completion” of a configuration $\hat{\hat{\delta}}^f_r$ of mutually orthogonal closed Hilbert submodules of the L_2-homology of the infinite cyclic cover of X determined by the map f, which is an $L^\infty(\mathbb{S}^1)$-Hilbert module.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 6, с. 93—113.

Посвящается памяти Юрия Петровича Соловьёва

1. Введение

В [2, 6] полю κ, неотрицательному целому числу r и паре (X, f), состоящей из компактного абсолютного окрестностного ретракта X (см. определение в разделе 2.1) и вещественнозначного отображения f, ставятся в соответствие множество δ^f_r комплексных чисел z кратностей $\delta^f_r(z)$ и система векторных пространств $\hat{\delta}^f_r(z)$, соответствующих тем же комплексным числам, образующим множество $\{z \mid \delta^f_r(z) \geqslant 1\} = \operatorname{supp}(\delta^f_r)$, так, что выполнены следующие свойства.

1. $\dim \hat{\delta}^f_r(z) = \delta^f_r(z)$;
2. $\sum\limits_{z\in\operatorname{supp}(\delta^f_r)} \delta^f_r(z) = \beta_r(X;\kappa)$, $\beta_r(X;\kappa) = \dim H_r(X;\kappa)$;
3. $\bigoplus\limits_{z\in\operatorname{supp}(\delta^f_r)} \hat{\delta}^f_r(z) \simeq H_r(X;\kappa)$ (через $\simeq$ мы обозначаем изоморфизм).

Целые числа $\beta_r(X;\kappa)$ будем называть числами Бетти пространства X с коэффициентами в κ.

Векторные пространства $\hat{\delta}^f_r(z)$ возникают как факторы некоторых подпространств в $H_r(X;\kappa)$, разделённых в определённом смысле, описанном ниже. Соответствие аналогично случаю *спектрального пакета* пары (V, T), где V — конечномерное векторное пространство, $T\colon V \to V$ — линейное отображение. Здесь паре (V, T) ставятся в соответствие δ^T и $\hat{\delta}^T$, задающиеся собственными значениями T, их кратностями и набором обобщённых собственных пространств. В [6] было показано следующее.

- P1. Соответствие $f \rightsquigarrow \delta^f_r$ непрерывно.
- P2. В случае замкнутого топологического многообразия M^n выполняется равенство $\delta^f_r(z) = \delta^f_{n-r}(i\bar{z})$.
- P3. Если X гомеоморфно симплициальному комплексу или Q-многообразию, то для открытого плотного множества отображений f выполняется неравенство $\delta^f_r(z) \leqslant 1$.

В случае $\kappa = \mathbb{C}$ эрмитово скалярное произведение в $H_r(X;\mathbb{C})$ позволяет каноническим образом описать векторные пространства $\hat{\delta}^f_r(z)$ как набор взаимно ортогональных подпространств $\hat{\hat{\delta}}^f_r(z) \subseteq H_r(M;\mathbb{C})$, таких что для них выполняются аналоги свойств P1—P3. Конфигурация δ^f_r определяет *характеристический полином* $P^f_r(z)$; этот полином является приведённым, его степень равна числу Бетти в градуировке r, а его корни — комплексные числа z кратностей $\delta^f_r(z)$, образующие носитель δ^f_r.

Комплексные числа z вместе с их кратностями $\delta^f_r(z)$ (или, что эквивалентно, корни $P^f_r(z)$ вместе с их кратностями) в случае, если X — симплициальное пространство и f — симплициальное отображение, могут быть вычислены при помощи эффективных алгоритмов. Эти данные являются частью информации, содержащейся в так называемых бар-кодах, связанной с глобальной топологией X. В случае замкнутого риманова многообразия конфигурация $\hat{\hat{\delta}}{}^f_r$ — ортогональное разложение пространств гармонических форм на данном многообразии, зависящее от f. В частности, для типичного f компоненты разложения имеют размерность 1, тем самым возникает *канонический базис* пространства гармонических форм.

В данной работе будут представлены аналогичные результаты для случая пары (X, f), состоящей из компактного ANR-пространства X и отображения в окружность $f\colon X \to \mathbb{S}^1$. В рассматриваемом случае получена дополнительная гомологическая информация: построен когомологический класс $\xi^f \in H^1(X;\mathbb{Z})$, задаваемый отображением f. Как можно было бы ожидать, результаты аналогичны упомянутым ранее, однако более сложны и имеют более тонкий характер.

В случае отображения в окружность вместо чисел Бетти $\beta_r(X;\kappa)$ необходимо рассматривать числа Бетти—Новикова $\beta^N(X,\xi;\kappa)$, а вместо векторного пространства $H_r(X;\kappa)$ над κ — гомологии Новикова $H^N_r(X,\xi;\kappa[t^{-1},t])$ и $\beta^N_r(X,\xi;\kappa) = \operatorname{rank} H^N_r(X,\xi;\kappa[t^{-1},t])$. Под гомологиями Новикова в данной работе будем понимать свободный $\kappa[t^{-1},t]$-модуль, который строится по $H_r(\tilde{X};\kappa)$ — гомологиям бесконечнолистного циклического накрытия $\tilde{X}$, ассоциированного с ξ. Тогда определены аналоги конфигураций δ^f_r и $\hat{\delta}^f_r$, обладающие свойствами, аналогичными 1—3 и P1—P3, приведёнными выше. В случае $\kappa = \mathbb{C}$ вместо эрмитовой структуры на $H_r(X;\mathbb{C})$ рассматривается структура гильбертова модуля на пополнении по фон Нейману $H^N_r(X,\xi;\kappa[t^{-1},t])$; указанное пополнение всегда существует (см. подраздел 2.1). Это позволяет по аналогии с $\hat{\delta}^f_r$ построить конфигурацию $\hat{\hat{\delta}}{}^f_r$ замкнутых гильбертовых подмодулей, для которой выполнены условия P1—P3. Для того чтобы строго сформулировать результаты этой работы, необходимо напомнить некоторые результаты из алгебры и алгебраической топологии, а также ввести необходимые обозначения.

Зафиксируем поле κ и рассмотрим кольцо многочленов Лорана $\kappa[t^{-1},t]$ с коэффициентами в κ. Кольцо $\kappa[t^{-1},t]$ является κ-алгеброй, областью целостности и областью главных идеалов. Поэтому для любого конечно порождённого $\kappa[t^{-1},t]$-модуля M фактор $F(M) := M/T(M)$ по подмодулю кручения $T(M)$ является свободным конечно порождённым модулем. Конечно порождённый модуль $T(M)$ является конечномерным векторным пространством над κ. Единственным инвариантом $F(M)$ является ранг, который в случае поля Q, содержащего $\kappa[t^{-1},t]$, равен размерности Q-векторного пространства $M \otimes_{\kappa[t^{-1},t]} Q = F(M) \otimes_{\kappa[t^{-1},t]} Q$.

Для пары $\bigl(X, \xi \in H^1(X;\mathbb{Z})\bigr)$ рассмотрим бесконечнолистное циклическое накрытие $\pi\colon \tilde{X} \to X$, ассоциированное с ξ, и преобразование накрытия $\tau\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ — ограничение на $1 \times \tilde{X}$ свободного действия $\mu\colon \mathbb{Z} \times \tilde{X} \to \tilde{X}$. Снабжённое изоморфизмом $t_r\colon H_r(\tilde{X};\kappa) \to H_r(\tilde{X};\kappa)$, индуцированным τ, κ-векторное пространство $H_r(\tilde{X};\kappa)$ превращается в $\kappa[t^{-1},t]$-модуль. В случае, когда X является компактным ANR-пространством, этот модуль конечно порождён.

Пусть Q — коммутативное кольцо, содержащее $\kappa[t^{-1},t]$. Обозначим

$$H_r^N(X,\xi;Q) := F\big(H_r(\tilde{X},\kappa)\big) \otimes_{\kappa[t^{-1},t])} Q;$$

будем называть этот свободный модуль *гомологиями Новикова* с коэффициентами в Q. В случае $Q=\kappa[t^{-1},t]$ гомологии Новикова являются $\kappa[t^{-1},t]$-векторным пространством, в точности тем, что рассматривал Новиков в рамках своего подхода к теории Морса для отображений в окружность. В данной статье мы будем работать с $Q=\kappa[t^{-1},t]$.

Ранг $H_r^N(X,\xi;Q)$ не зависит от Q. Число Бетти—Новикова в размерности r с коэффициентами κ будем обозначать $b_r^N(X,\xi;\kappa)$.

Пусть $\kappa=\mathbb{C}$. Кольцо $\mathbb{C}[t^{-1},t]$ может быть пополнено до конечной алгебры фон Неймана $\mathcal{N}$ (см. подраздел 2.1 или [11]). Эта алгебра совпадает с алгеброй $L^\infty(\mathbb{S}^1)$. Свободный конечно порождённый $\mathbb{C}[t^{-1},t]$-модуль M, снабжённый $\mathbb{C}[t^{-1},t]$-скалярным произведением, может быть пополнен до гильбертова $\mathcal{N}$-модуля $\bar{M}$ конечного типа, набор расщепляющих подмодулей M — до замкнутых гильбертовых подмодулей $\bar{M}$. Поэтому набор N_α факторов расщепляющих подмодулей M каноническим образом задаёт набор замкнутых гильбертовых подмодулей $\bar{N}_\alpha$ в $\bar{M}$, как описано в 2.1. Различные $\mathbb{C}[t^{-1},t]$-скалярные произведения на M задают изометричные пополнения гильбертовых модулей, так что скалярное произведение в обозначении модуля $\bar{M}$ может быть опущено.

Отправной точкой данной работы служат пара (X,ξ), где X — компактное ANR-пространство, $\xi\in H^1(X;\mathbb{Z})$, а также основное поле κ. Рассмотрим свободный $\kappa[t^{-1},t]$-модуль $H_r^N(X,\xi;\kappa[t^{-1},t])$. В случае $\kappa=\mathbb{C}$ с помощью *пополнения по фон Нейману*, описанного в подразделе 2.1, $\mathbb{C}[t^{-1},t]$-скалярное произведение на $H_r^N(X,\xi;\mathbb{C}[t^{-1},t])$ позволяет перейти к гильбертову $\mathcal{N}$-модулю $\overline{H_r^N(X,\xi;\mathbb{C}[t^{-1},t])}$ и конфигурации взаимно ортогональных гильбертовых подмодулей $\overline{H_r^N(X,\xi;\mathbb{C}[t^{-1},t])}$ вместо конфигураций $\hat{\delta}_r^f$.

Заметим, что гильбертов $\mathcal{N}$-модуль $\overline{H_r^N(X,\xi;\mathbb{C}[t^{-1},t])}$ изоморфен гильбертову $\mathcal{N}$-модулю $H_r^{L_2}(\tilde{X})$, т. е. L_2-гомологиям, которые для замкнутого риманова многообразия определяются при помощи римановой метрики, а для конечного CW-комплекса — с помощью клеточной структуры.

Основной результат данной работы следующий.

Теорема 1.1.

1. *Непрерывному отображению $f\colon X\to\mathbb{S}^1$ может быть поставлен в соответствие приведённый многочлен $P_r^f(z)$ степени $b_r^N(X,\xi^f;\kappa)$, корни которого отличны от нуля, или, что эквивалентно, конфигурация δ_r^f ненулевых комплексных чисел z с кратностями $\delta_r^f(z)\geqslant 1$, удовлетворяющая* P1—P3. *Эквивалентность задаётся соответствием, при котором нулю z многочлена $P_r(z)$ отвечает его кратность $\delta_r^f(z)\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.*
2. *Конфигурация δ_r^f допускает уточнение в следующем смысле. Определено соответствие*

$$\text{нули } P_r(z)\ni z \rightsquigarrow \big(L'(z)\subset L(z)\big)\in\mathcal{S}(M),\ \ M=H^N(X,\xi;\kappa[t^{-1},t]),$$

где $\mathcal{S}(M)$ — множество пар расщепляющих подмодулей $L' \subset L$ в M, таких что

а) $\bigoplus \hat{\delta}^f_r(z)$ *изоморфно* $H^N_r(X,\xi;\kappa[t^{-1},t])$, *причём* $\hat{\delta}^f_r(z) = L_r(z)/L'_r(z)$;

б) $\operatorname{rank}\bigl(\hat{\delta}^f_r(z)\bigr) = \delta^f_r(z)$.

3. *Пусть* $\kappa = \mathbb{C}$ *и на* $H^N_r(X,\xi;\mathbb{C}[t^{-1},t])$ *задано* $\mathbb{C}[t^{-1},t]$*-значное скалярное произведение* (см. определение в подразделе 2.1)*. При помощи пополнения по фон Нейману конфигурация* $\hat{\delta}^f_r$ *определяет конфигурацию* $\hat{\hat{\delta}}^f_r(z)$ *взаимно ортогональных замкнутых гильбертовых подмодулей гильбертова* $L^\infty(\mathbb{S}^1)$*-модуля* $\overline{H^N_r(X,\xi;\mathbb{C}[t^{-1},t])}$*, удовлетворяющую условиям* P1 *и* P2*. С точностью до изометрии гильбертова модуля конфигурация* $\hat{\hat{\delta}}^f_r$ *не зависит от скалярного произведения.*

Мы будем рассматривать конфигурации δ^f_r как разложение чисел Бетти—Новикова $b^N_r(X,\xi;\kappa)$, а конфигурации $\hat{\delta}^f_r$ — как разложение гомологий Новикова $H^N_r(X,\xi;\mathbb{C}[t^{-1},t])$ или, лучше сказать, дополнительную структуру на $H^N_r(X,\xi;\mathbb{C}[t^{-1},t])$. В данной работе будут построены только конфигурации $\delta^f_r, \hat{\delta}^f_r$ и $\hat{\hat{\delta}}^f_r$. Детальное доказательства того, что конфигурации $\hat{\hat{\delta}}^f_r$ удовлетворяют свойствам P1—P3, будет дано в [4]. Конфигурации δ^f_r были введены в [6]; конфигурации $\hat{\delta}^f_r$ и $\hat{\hat{\delta}}^f_r$ ранее не рассматривались.

Заметим, что в случае конечного симплициального комплекса X и симплициального отображения f конфигурация δ^f_r или, что эквивалентно, полином $P^f_r(z)$, рассматриваемый как набор корней с соответствующими кратностями, могут быть вычислены явно. Более того, может быть построен алгоритм, принимающий в качестве исходных данных симплициальный комплекс и значения f в его вершинах и возвращающий нули многочлена $P^f_r(z)$ в виде набора пар действительных чисел (действительной и мнимой части корней многочлена) вместе с соответствующими кратностями. Такой алгоритм представлен в работе [5], где нули многочлена $P^f_r(z)$ возникают как «замкнутые r-баркоды» и «открытые $(r-1)$-баркоды» (корень $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus 0$ при $\rho \geqslant 1$ задаёт замкнутый баркод и при $\rho < 1$ — открытый). Указанный алгоритм использует определение конфигурации δ^f_r, основанное на баркодах (см. [5,7]).

Отметим также, что в случае $\kappa = \mathbb{C}$ для замкнутого риманова многообразия X размерности n с помощью теории Ходжа пространство L_2-гармонических дифференциальных форм размерности $n-r$ на полном римановом многообразии $\tilde{X}$ отождествляется с L_2-гомологиями $\tilde{X}$ размерности r. В этом случае конфигурация $\hat{\hat{\delta}}^f_r$ задаёт разложение гильбертова модуля гармонических форм, непрерывно зависящее от f. Для типичного набора непрерывных функций f гильбертовы подмодули $\hat{\hat{\delta}}^f_r(z)$ имеют размерность по фон Нейману, равную 1.

В разделе 2 приводятся необходимые сведения для описания конструкции δ^f_r, $\hat{\delta}^f_r$ и $\hat{\hat{\delta}}^f_r$. В разделе 3 определяются конфигурации и доказывается ряд промежуточных результатов, а затем описывается схема доказательства теоремы 1.1.

Автор благодарит рецензента за найденные им неточности и несоответствия в обозначениях, содержавшиеся в предварительной версии работы.

2. Предварительные сведения

2.1. Пополнение

Пусть $\mathbb{C}[t^{-1},t]$ — кольцо многочленов Лорана (т. е. групповое кольцо $\mathbb{C}[\mathbb{Z}]$). Это алгебра с инволюцией $*$ и следом tr, которые для элемента $a = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n$ задаются формулами

$$*\,(a) := a^* = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{a}_n t^{-n},$$
$$\mathrm{tr}(a) = a_0,$$

где $\bar{a}$ — комплексно сопряжённое к a.

Алгебра $\mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ может рассматриваться как подалгебра алгебры ограниченных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве

$$l_2(\mathbb{Z}) = \Big\{a_n,\ n\in\mathbb{Z} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty\Big\}.$$

Оператор, заданный многочленом Лорана, определяется как произведение последовательности из $l_2(\mathbb{Z})$ и последовательность, все члены которой, за исключением конечного числа, равны нулю. Обозначим через $\mathcal{N}$ слабое замыкание $\mathbb{C}[\mathbb{Z}]$. $\mathcal{N}$ является конечной алгеброй фон Неймана с инволюцией и следом, продолжающими инволюцию и след, определённые выше (подробности см. [11]).

Алгебру $\mathcal{N}$ будем называть пополнением по фон Нейману группового кольца $\mathbb{C}[\mathbb{Z}]$. Данная алгебра изоморфна $L^\infty(\mathbb{S}^1)$. Постановка в соответствие комплекснозначной функции на $\mathbb{S}^1$ её ряда Фурье задаёт изоморфизм $L^\infty(\mathbb{S}^1)$ с $\mathcal{N}$.

Для данного свободного $\mathbb{C}[t^{-1},t]$-модуля M будем называть $\mathbb{C}[t^{-1},t]$-*значным скалярным произведением* отображение $\mu\colon M\times M \to \mathbb{C}[t^{-1},t]$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) линейность над $\mathbb{C}[t^{-1},t]$ по первой переменной,
2) *симметричность*: $\mu(x,y) = \mu(y,x)^*$ для всех $x,y\in M$;
3) *положительная определённость*:
   а) $\mu(x,x)\in\mathbb{C}[t^{-1},t]_+$, где $\mathbb{C}[t^{-1},t]_+$ — множество элементов вида aa^*,
   б) $\mu(x,x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;
4) отображение $M\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[t^{-1},t]}(M,\mathbb{C}[t^{-1},t])$, заданное формулой $\mu(y)(x) = \mu(x,y)$, является взаимно-однозначным соответствием.

Легко заметить, что такие $\mathbb{C}[t^{-1},t]$-значные скалярные произведения существуют. Например, если $e^1,e^2,\ldots,e^k$ — базис M, то скалярное произведение может быть задано формулой

$$\mu\Big(\sum a_i e^i, \sum b_j e^j\Big) := \sum a_i (b_i)^*.$$

Пополняя $\mathbb{C}$-векторное пространство M с помощью скалярного произведения $\langle x, y\rangle := \operatorname{tr}\big(\mu(x, y)\big)$, получаем гильбертово пространство $\bar{M}$, которое является гильбертовым $\mathcal{N}$-модулем (см. [11]), изометричным $l_2(\mathbb{Z})^{\oplus k}$, где k — ранг M. Два различных $\mathbb{C}[t^{-1}, t]$-значных скалярных произведения μ_1 и μ_2 приводят к изометричным гильбертовым модулям $\bar{M}_{\mu_1}$ и $\bar{M}_{\mu_2}$. Таким образом, μ в обозначении модуля может быть опущено. Отождествление $\mathcal{N}$ с $L^\infty(\mathbb{S}^1)$ и $l_2(\mathbb{Z})^{\oplus k}$ с $L^2(\mathbb{S}^1)^{\oplus k}$ (путём постановки в соответствие ряду $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n$ комплекснозначной функции $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}$) позволяет по структуре $\mathcal{N}$-модуля на $l_2(\mathbb{Z})^{\oplus k}$ построить структуру $L^\infty(\mathbb{S}^1)$-модуля на $\big(L^2(\mathbb{S}^1)\big)^{\oplus k}$. В явном виде эта структура задаётся при помощи поэлементного умножения набора длины k, состоящего из элементов пространства $L^2(\mathbb{S}^1)$, на функцию из $L^\infty(\mathbb{S}^1)$.

Пусть $N \subset M$ — свободный расщепляющий подмодуль конечно порождённого свободного $\mathbb{C}[t^{-1}, t]$-модуля M и μ — $\mathbb{C}[t^{-1}, t]$-значное скалярное произведение на M. Тогда $\bar{N}_\mu$ — замкнутый гильбертов подмодуль $\bar{M}_\mu$. Более того, для последовательности расщепляющих подмодулей $N'_i \subseteq N_i \subseteq M$, $i = 1, 2, \ldots$, последовательность факторов N_i/N'_i, $i = 1, 2, \ldots$, состоит из свободных подмодулей. Тогда фактору N_i/N'_i каноническим образом может быть поставлен в соответствие замкнутый гильбертов подмодуль гильбертова модуля $\bar{M}$. Для этого следует рассмотреть замыкание ядра проекции $N_i \to N_i/N'_i$ в N_i. Процесс перехода от $(\mathbb{C}[t^{-1}, t], M)$ к $(\mathcal{N}, \bar{M})$ далее в тексте будем называть *пополнением по фон Нейману*. Первой работой по данной теме является [11], где рассматривается случай произвольного группового кольца $\mathbb{C}[\Gamma]$ и конечно порождённого проективного $\mathbb{C}[\Gamma]$-модуля.

2.2. Конфигурации и топология совпадений на пространстве конфигураций

Пусть дано топологическое пространство X и натуральное число N. Обозначим через

$$\mathcal{C}_N(X) := \left\{\delta\colon X \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \mid \sum_{x\in X} \delta(x) = N\right\}$$

множество конечных конфигураций полной мощности N. Данное множество отождествляется с X^N/Σ_N — фактор-пространством N-кратной декартовой степени X по действию группы перестановок Σ_N на N элементах.

Пусть V — свободный конечно порождённый модуль над коммутативным кольцом R с 1 или гильбертов модуль над конечной алгеброй фон Неймана $\mathcal{N}$. Пусть $\mathcal{P}(V)$ — множество свободных отщепляющихся подмодулей V в первом случае и множество замкнутых гильбертовых подмодулей во втором. Обобщением множества конфигураций $\mathcal{C}_N(X)$ служит множество $\mathcal{C}_V(X)$, состоящее из отображений $\hat{\hat{\delta}}\colon X \to \mathcal{P}(V)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) носитель $\operatorname{supp}(\hat{\hat{\delta}}) = \{x \in X \mid \hat{\hat{\delta}}(x) \neq 0\}$ конечен;

2) если $i(x)\colon \hat{\hat{\delta}}(x) \to V$ — вложение $\hat{\hat{\delta}}(x)$ в V, то отображение

$$I := \sum_{x\in \mathrm{supp}(\hat{\hat{\delta}})} i(x)\colon \bigoplus_{x\in \mathrm{supp}(\hat{\hat{\delta}})} \hat{\hat{\delta}}(x) \to V$$

является изоморфизмом.

Рассмотрим отображение

$$e\colon \mathcal{C}_V(X) \to \mathcal{C}_{\dim V}(X),$$

заданное формулой $e(\hat{\hat{\delta}})(x) := \dim \hat{\hat{\delta}}(x)$.

Множества $\mathcal{C}_N(X)$ и $\boldsymbol{\mathcal{C}}_V(X)$ в случае $R = \mathbb{C}$ и гильбертова $\mathcal{N}$-модуля V обладают естественной топологией, называемой *топологией совпадений*, в которой отображение e непрерывно. Один из способов задать эту топологию в явном виде состоит в описании для каждого δ и $\hat{\hat{\delta}}$ системы *фундаментальных окрестностей*.

Фундаментальная окрестность $\mathcal{U}$ конфигурации δ задаётся набором k непересекающихся открытых окрестностей $U_1, U_2, \ldots, U_k$ точек $x_1, \ldots, x_k$ и определяется как

$$\Big\{\delta' \in \mathcal{C}_N(X) \mid \sum_{x\in U_i} \delta'(x) = \delta(x_i)\Big\},$$

где $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ — носитель δ. Аналогично пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ — носитель $\hat{\hat{\delta}}$, где $\hat{\hat{\delta}}(x_i) = V_i \subseteq V$. Тогда фундаментальная окрестность $\mathcal{U}$ конфигурации $\hat{\hat{\delta}}$ задаётся набором непересекающихся открытых окрестностей $U_1, U_2, \ldots, U_k$ точек $x_1, \ldots, x_k$ и открытых окрестностей $O_1, O_2, \ldots, O_k$ линейных пространств $V_1, V_2, \ldots, V_k$ в $G_{\dim V_i}(V)$; она определяется как

$$\Big\{\hat{\hat{\delta}}' \in \mathcal{C}_V(X) \mid \sum_{x\in U_i} \hat{\hat{\delta}}'(x) \in O_i\Big\}.$$

Выше через $G_k(V)$ обозначено пространство Грассмана k-мерных подпространств линейного пространства V. (В случае гильбертова $\mathcal{N}$-модуля V пространство $G_k(V)$ может быть отождествлено с множеством $\mathcal{N}$-линейных самосопряжённых проекторов, у которых след в смысле фон Неймана равен k, при этом топология наследуется из пространства ограниченных операторов в гильбертовом пространстве V.)

Очевидно, отображение e непрерывно и сюръективно, его слоем над δ является подмножество $G_{n_1}(V)\times G_{n_2}(V)\times\ldots\times G_{n_k}(V)$, состоящее из $(V_1', V_2', \ldots V_k')$, $V_i' \in G_{n_i}(V)$, где $n_i = \dim V_i$.

Заметим, что

1) $\mathcal{C}_N(X) = X^N/\Sigma_N$, т. е. $\mathcal{C}_N(X)$ — это N-кратное симметрическое произведение X, и в случае, когда X является метрическим пространством с метрикой D, топология совпадений определяется индуцированной метрикой $\underline{D}$ на X^N/Σ_N;

2) если $X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, то множество $\mathcal{C}_N(X)$ может быть отождествлено с множеством приведённых многочленов с комплексными коэффициентами. Конфигурации δ с носителем, состоящим из точек $z_1, z_2, \ldots, z_k$, где $\delta(z_i) = n_i$, ставится в соответствие приведённый многочлен $P^f(z) = \prod_i (z - z_i)^{n_i}$, и тогда пространства $\mathcal{C}_N(X)^f(x)$ и $\mathbb{C}^N$ отождествляются как метрические пространства;
3) аналогично если $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$, то $\mathcal{C}_N(X)$ отождествляется с множеством приведённых многочленов степени N со свободным членом, отличным от 0, т. е. с $\mathbb{C}^{N-1} \times \mathbb{C}^*$, где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$.

В данной работе в качестве промежуточного шага будет рассмотрен несколько более общий тип конфигураций, использующий *факторы свободных расщепляющих подмодулей* свободных R-модулей или *факторы замкнутых гильбертовых подмодулей*; использоваться же будет лишь случай $R = \kappa[t^{-1}, t]$.

Пусть дан конечно порождённый свободный $\kappa[t^{-1}, t]$-модуль M. Обозначим через $\tilde{\mathcal{S}}(M)$ множество пар $(L \supset L')$, для которых L и L' — расщепляющие подмодули M. Так как M — свободный конечно порождённый модуль, то таковыми являются L, L' и L/L'.

Конечный набор пар $(L_r \supset L'_r) \in \tilde{\mathcal{S}}(M)$, $r = 1, 2, \ldots, k$, называется *вполне разделённым*, если для любых отображений $i_r\colon L_r/L'_r \to L_r \subseteq M$, являющихся правыми обратными к проекциям $L_r \to L_r/L'_r$, сумма линейных отображений

$$\sum_{1 \leqslant r \leqslant k} i_r\colon \bigoplus L_r/L'_r \to M$$

инъективна.

Для отображения $\hat{\delta}\colon X \to \tilde{\mathcal{S}}(M)$ обозначим через $\operatorname{supp}(\hat{\delta})$ множество

$$\operatorname{supp}(\hat{\delta}) := \bigl\{x \in X \mid \hat{\delta}(x) = \bigl(L(x), L'(x)\bigr),\ L(x) \neq 0\bigr\}.$$

Конечная конфигурация факторов расщепляющих подмодулей M — это отображение $\hat{\delta}\colon X \to \tilde{\mathcal{S}}(M)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) множество $\operatorname{supp}(\hat{\delta})$ конечно;
2) набор пар $\bigl(L(x) \supset L'(x)\bigr)$ является вполне разделённым;
3) для любых правых обратных $i(x)$ линейное отображение

$$\sum_{x \in \operatorname{supp}(\hat{\delta})} i(x)\colon \bigoplus_{x \in \operatorname{supp}(\hat{\delta})} L(x)/L'(x) \to M$$

является изоморфизмом.

При наличии в пространстве V скалярного произведения (эрмитова скалярного произведения) для $R = \mathbb{R}$ (или $R = \mathbb{C}$) от описанного выше отображения $\hat{\delta}$ можно каноническим образом перейти к отображению $\hat{\hat{\delta}}$, заменив пару $L(x) \supset L'(x)$ ортогональным дополнением $L'(x)$ в $L(x)$. То же самое верно и для гильбертова $\mathcal{N}$-модуля V. Как было указано в подразделе 2.1, в случае $\kappa = \mathbb{C}$ произвольное $\mathbb{C}[t^{-1}, t]$-значное скалярное произведение на M задаёт на M эрмитову структуру, и тогда пополнение по фон Нейману произвольную конфигурацию $\hat{\delta}$ преобразует в конфигурацию $\hat{\hat{\delta}}$ замкнутых гильбертовых подмодулей $\bar{M}$.

2.3. Предварительные сведения о компактных абсолютных окрестностных ретрактах и ручных отображениях

Ручные отображения

Для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ хаусдорфовых топологических пространств *регулярное значение* — это точка $y \in Y$, для которой существует окрестность U, такая что для любого $y' \in U$ включение $f^{-1}(y') \subset f^{-1}(U)$ является гомотопической эквивалентностью. Значения, не являющиеся регулярными, называются *критическими*. Отображение f будем называть *ручным*, если множество его критических точек $\mathrm{Cr}(f) \subset Y$ дискретно. В случае метрического пространства Y с функцией расстояния d (в частности, когда $Y = \mathbb{R}$ или $Y = \mathbb{S}^1$) для отображения f может быть введена величина

$$\varepsilon(f) := \inf_{y_1, y_2 \in \mathrm{Cr}(f),\ y_1 \neq y_2)} d(y_1, y_2).$$

Для компактного X и $Y = \mathbb{R}$ или $Y = \mathbb{S}^1$ выполняется неравенство $\varepsilon(f) > 0$, если f ручное, или равенство $\varepsilon(f) = 0$, если f ручным не является.

Абсолютные окрестностные ретракты (ANR-пространства) и Q-многообразия

Гильбертовым кубом $[0,1]^\infty$ называют счётное произведение отрезков $[0,1]$. Хаусдорфово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счётности, локально гомеоморфное $[0,1]^\infty$, называется Q-многообразием (гильбертовым многообразием). Фундаментальный результат Д. Эдвардса, Т. А. Чапмана, Дж. Веста и других [8] о топологии Q-многообразий состоит в том, что локально компактное пространство X является абсолютным окрестностным ретрактом (ANR-пространством) тогда и только тогда, когда его произведение с $[0,1]^\infty$ является Q-многообразием.

В данной работе мы будем работать с компактными ANR-пространствами. Пространство X является компактным ANR-пространством тогда и только тогда, когда оно стабильно гомеоморфно конечному симплициальному комплексу, т. е. существует симплициальный комплекс K, такой что $X \times [0,1]^\infty$ гомеоморфно $K \times [0,1]^\infty$. Напомним также, что два компактных Q-многообразия гомеоморфны тогда и только тогда, когда они гомотопически эквивалентны (см. [8]). Отметим, однако, что не каждая гомотопическая эквивалентность гомотопна гомеоморфизму (в отличии от простой гомотопической эквивалентности [8]). Кусочно-линейные отображения симплициального комплекса K в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{S}^1$ плотны в пространстве непрерывных отображений с компактно-открытой топологией. Кусочно-линейное отображение является ручным, если комплекс K

конечен. Для компактного Q-многообразия множество ручных отображений плотно в пространстве непрерывных отображений с компактно-открытой метрикой.

Мы будем использовать приведённые результаты о компактных Q-многообразиях при доказательстве утверждений об общих компактных ANR-пространствах, проверяя их сначала для конечных симплициальных комплексов.

3. Конфигурации δ^f_r, $\hat{\delta}^f_r$ и $\hat{\hat{\delta}}^f_r$

Пусть дано компактное ANR-пространство X и непрерывное отображение $f\colon X \to \mathbb{S}^1$. Бесконечнолистное циклическое накрытие отображения f задаётся коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "p"] & \mathbb{S}^1 \\ \tilde{X} \arrow[u, "\tilde{f}"] \arrow[r, "\pi"] & X \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}, \qquad (1)$$

при этом определено свободное действие $\mu\colon \mathbb{Z}\times\tilde{X} \to \tilde{X}$, такое что $\pi\bigl(\mu(n,x)\bigr) = \pi(x)$, индуцирующее гомеоморфизм $\pi\colon \tilde{X}/\mathbb{Z} \to X$, где $\tilde{f}\bigl(\mu(n,x)\bigr) = \tilde{f}(x)+2\pi n$. Обозначим через $\tau\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ ограничение μ на $\{1\}\times\tilde{X}$. Зафиксируем поле κ. Для упрощения обозначений вместо $H_r(Y;\kappa)$ будем писать $H_r(Y)$. Гомеоморфизм τ индуцирует изоморфизм $t_r\colon H_r(\tilde{X}) \to H_r(\tilde{X})$, который задаёт структуру $\kappa[t^{-1},t]$-модуля на κ-векторном пространстве $H_r(\tilde{X})$. Изоморфизм t_r представляет собой умножение на $t \in \kappa[t^{-1},t]$. Заметим, что $H_r(\tilde{X})$ — конечно порождённый $\kappa[t^{-1},t]$-модуль и $\kappa[t^{-1},t]$ — область главных идеалов, поэтому подмодуль кручения $T\bigl(H_r(\tilde{X})\bigr)$ является конечномерным κ-векторным пространством, фактор $H^N_r(X,\xi) := H_r(\tilde{X})/T\bigl(H_r(\tilde{X})\bigr)$ — свободный конечно порождённый $\kappa[t^{-1},t]$-модуль, причём $H_r(\tilde{X})$ изоморфен $H^N_r(X,\xi)\oplus T\bigl(H_r(\tilde{X})\bigr)$.

Положим $\tilde{X}_a = \tilde{f}^{-1}\bigl((-\infty,a]\bigr)$, $\tilde{X}^b = \tilde{f}^{-1}\bigl([b,\infty)\bigr)$ и, следуя [2], рассмотрим

$\mathbb{I}_a(r) = \operatorname{img}\bigl(H_r(\tilde{X}_a) \to H_r(\tilde{X})\bigr)$, $\mathbb{I}^b(r) = \operatorname{img}\bigl(H_r(\tilde{X}^b) \to H_r(\tilde{X})\bigr)$;

$\mathbb{I}_{-\infty}(r) := \bigcap\limits_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{I}_a(r)$, $\mathbb{I}^{\infty}(r) := \bigcap\limits_{b\in\mathbb{R}} \mathbb{I}^b(r)$;

$\mathbb{F}_r(a,b) = \mathbb{I}_a(r)\cap\mathbb{I}^b(r)$;

$\mathbb{F}_r(-\infty,b) = \mathbb{I}_{-\infty}(r)\cap\mathbb{I}^b(r)$, $\mathbb{F}_r(a,\infty) = \mathbb{I}_a(r)\cap\mathbb{I}^{\infty}(r)$.

В данных обозначениях (см. [2]) имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.1.

1. Отображения $t_r\colon \mathbb{I}_a(r) \to \mathbb{I}_{a+2\pi}(r)$ и $t_r\colon \mathbb{I}^b(r) \to \mathbb{I}^{b+2\pi}(r)$ являются изоморфизмами. Следовательно, $t_r\colon \mathbb{F}_r(a,b) \to \mathbb{F}_r(a+2\pi, b+2\pi)$ также изоморфизм. Подпространства $\mathbb{I}_{-\infty}(r)$ и $\mathbb{I}^{\infty}(r)$ являются $\kappa[t^{-1},t]$-подмодулями.
2. При $a' \leqslant a$ и $b \leqslant b'$ имеют место включения $\mathbb{F}_r(a',b') \subseteq \mathbb{F}_r(a,b)$, $\mathbb{F}_r(-\infty,b') \subseteq \mathbb{F}_r(a,b)$ и $\mathbb{F}_r(a',\infty) \subseteq \mathbb{F}_r(a,b)$.

3. $\bigcup\limits_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{I}_a(r) = \bigcup\limits_{b\in\mathbb{R}} \mathbb{I}^b(r) = H_r(\tilde{X})$.

Предложение 3.2.

1. *Пересечение* $\mathbb{F}_r(a,b)$ *имеет конечную размерность.*
2. $\mathbb{I}_{-\infty}(r) = \mathbb{I}^{\infty}(r) = T\big(H_r(\tilde{X})\big)$.

Доказательство. Пункт 1 доказан в [2] с помощью последовательности Майера—Вьеториса; при этом используется, что $\tilde{X}$ — локально компактное ANR-пространство, а $\tilde{f}$ — собственное отображение.

Докажем пункт 2. Пусть $x \in T\big(H_r(\tilde{X})\big)$. Тогда существуют целое число $k \in \mathbb{Z}$ и многочлен $P(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0$, где $\alpha_i \in \kappa$ и $\alpha_0 \neq 0$, такие что $P(t)\, t^k x = 0$.

Положим $y = t^k x$. Из пункта 3 утверждения 3.1 следует, что $y \in \mathbb{I}^b$ для некоторого $b \in \mathbb{R}$. Так как $P(t)y = 0$, приходим к равенству $y = -(\alpha_n/\alpha_0)t^{n-1} - \ldots - (\alpha_1/\alpha_0)ty$. Тогда по пункту 1 утверждения 3.1 получим, что $y \in \mathbb{I}^{b+2\pi}$.

Повторяя приведённое рассуждение, получаем, что $y \in I^{b+2\pi k}$ для любого k, поэтому $y \in \mathbb{I}^{\infty}$. Так как $x = t^{-k}y$, по тому же утверждению получаем, что $x \in \mathbb{I}^{\infty}$, откуда следует, что $T\big(H_r(\tilde{X})\big) \subseteq I^{\infty}$.

Пусть $x \in \mathbb{I}^{\infty}$. Из пункта 3 утверждения 3.1 следует, что $x \in \mathbb{I}_a$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$, и по пункту 1 того же утверждения получаем, что $x, t^{-1}x, t^{-2}x, \ldots, t^{-k}x, \ldots \in \mathbb{I}_a \cap \mathbb{I}^{\infty}$. По пункту 1 размерность $\mathbb{I}_a \cap \mathbb{I}^{\infty}$ конечна; следовательно, существует набор $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$, для которого $(\alpha_{i_1}t^{-i_1} + \ldots + \alpha_{i_k}t^{-i_k})x = 0$, откуда следует, что $x \in T\big(H_r(\tilde{X})\big)$. Поэтому $\mathbb{I}^{\infty} \subseteq T\big(H_r(\tilde{X})\big)$ и $\mathbb{I}^{\infty} = T\big(H_r(\tilde{X})\big)$.

Аналогичное рассуждение показывает, что $T\big(H_r(\tilde{X})\big) = \mathbb{I}_{-\infty}$. □

Далее нам понадобится понятие особой точки в слабом смысле (относительно гомологий с коэффициентами в поле κ).

Определение 3.3.

1. Действительное число c будем называть *гомологическим подкритическим значением*, если для любого $\varepsilon > 0$ включение $\mathbb{I}_{c-\varepsilon}(r) \subset \mathbb{I}_{c+\varepsilon}(r)$ является строгим (в частности, $\mathbb{I}_{c-\varepsilon}(r) \neq \mathbb{I}_{c+\varepsilon}(r)$). Множество таких критических значений будем обозначать $\mathrm{CR}_-(\tilde{f})$.
2. Действительное число c будем называть *гомологическим надкритическим значением*, если для любого $\varepsilon > 0$ включение $\mathbb{I}^{c+\varepsilon}(r) \subset \mathbb{I}^{c-\varepsilon}(r)$ является строгим (в частности, $\mathbb{I}^{c+\varepsilon}(r) \neq \mathbb{I}^{c-\varepsilon}(r)$). Множество таких критических значений будем обозначать $\mathrm{CR}^+(\tilde{f})$.
3. Действительное число c будем называть *гомологическим критическим значением*, если оно принадлежит множеству $\mathrm{CR}(\tilde{f}) := \mathrm{CR}_-(\tilde{f}) \cup \mathrm{CR}^+(\tilde{f})$.

Утверждение 3.1 может быть уточнено следующим образом.

Утверждение 3.4. Пусть дано бесконечнолистное циклическое накрытие $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \mathbb{R}$ отображения $f\colon X \to \mathbb{S}^1$, где X — компактное ANR-пространство.

1. Множества $\mathrm{CR}_-(\tilde{f})$, $\mathrm{CR}^+(\tilde{f})$ и, следовательно, $\mathrm{CR}(\tilde{f})$ дискретны. Более того, существует такое $\tilde{\varepsilon}(f) > 0$, что $\tilde{\varepsilon}(f) < |c' - c''|$ для любых $c', c'' \in \mathrm{CR}(\tilde{f})$, $c' \neq c''$.
2. Отображение f является ручным тогда и только тогда, когда является ручным отображение $\tilde{f}$.
3. Имеет место включение $\mathrm{CR}(\tilde{f}) \subseteq \mathrm{CR}(\tilde{f})$, следовательно, $\tilde{\varepsilon}(f) \geqslant \varepsilon(f)$.

Пункт 1 следует из замечания 3.1 и предложения 3.2. Пункты 2 и 3 следуют прямо из определений.

Прямоугольники

Рассмотрим область $B = (a', a] \times [b, b')$ (рис. 1), где $a' < a$, $b < b'$. Такую область будем называть конечным прямоугольником. Бесконечным прямоугольником будем называть область вида $(-\infty, a] \times [b, b')$, или $(-\infty, a] \times [b, \infty)$, или $(a', a] \times [b, \infty)$.

Для фиксированного прямоугольника B введём обозначения

$$\mathbb{F}'_r(B) := \mathbb{F}_r(a', b) + \mathbb{F}_r(a, b') \subseteq \mathbb{F}_r(a, b), \quad \mathbb{F}_r(B) := \mathbb{F}_r(a, b)/\mathbb{F}'_r(B); \tag{2}$$

$\pi^B_{ab,r}\colon \mathbb{F}_r(a, b) \to \mathbb{F}_r(B)$ — проекция на фактор-пространство.

Из определений $\mathbb{F}_r(a, b)$ и $\mathbb{F}_r(B)$ легко выводится (как это было сделано в [2]), что следующие утверждения верны для конечных и для бесконечных прямоугольников. Линейные отображения, о которых пойдёт речь ниже, ин-

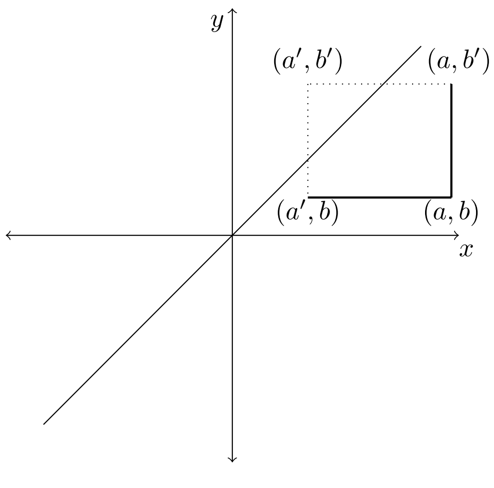

Рис. 1. Прямоугольник $B := (a', a] \times [b, b') \subset \mathbb{R}^2$

дуцируются вложением $\mathbb{F}_r(a',b') \subseteq \mathbb{F}_r(a,b)$, где $a' \leqslant a$, $b \leqslant b'$, и переходом к фактор-пространству (см. пункт 2 утверждения 3.1).

Утверждение 3.5.

1. Для прямоугольников $B_1 = (a'',a'] \times [b,b')$, $B_2 = (a',a] \times [b,b'')$ и $B = (a'',a] \times [b,b')$, где $a'' < a' < a$, $b < b''$ (возможно, что $a'' = -\infty$, $b'' = \infty$), вложения $B_1 \subset B$ и $B_2 \subset B$ (рис. 2) индуцируют линейные отображения $i^B_{B_1,r}\colon \mathbb{F}_r(B_1) \to \mathbb{F}_r(B)$ и $\pi^{B_2}_{B,r}\colon \mathbb{F}_r(B) \to \mathbb{F}_r(B_2)$, такие что следующая последовательность точна:
$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_r(B_1) \xrightarrow{i^B_{B_1,r}} \mathbb{F}_r(B) \xrightarrow{\pi^{B_2}_{B,r}} \mathbb{F}_r(B_2) \longrightarrow 0\,.$$
2. Для прямоугольников $B_1 = (a',a] \times [b',b'')$, $B_2 = (a',a] \times [b',b')$ и $B = (a',a] \times [b,b'')$, где $a' < a$, $b < b' < b''$ (допускается $a' = -\infty$, $b'' = +\infty$), вложения $B_1 \subset B$ и $B_2 \subset B$ (рис. 3) индуцируют линейные отображения $i^B_{B_1,r}\colon \mathbb{F}_r(B_1) \to \mathbb{F}_r(B)$ и $\pi^{B_2}_{B,r}\colon \mathbb{F}_r(B) \to \mathbb{F}_r(B_2)$, такие что следующая последовательность точна:
$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_r(B_1) \xrightarrow{i^B_{B_1,r}} \mathbb{F}_r(B) \xrightarrow{\pi^{B_2}_{B,r}} \mathbb{F}_r(B_2) \longrightarrow 0\,.$$

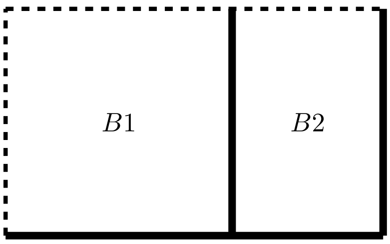

Рис. 2

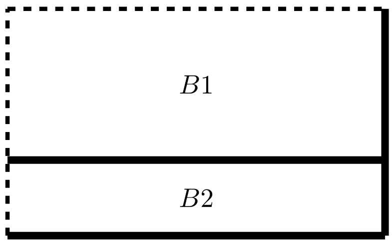

Рис. 3

3. Вложение $B' \subseteq B''$ двух прямоугольников B' и B'', при котором прямоугольник B' находится в левом верхнем углу B'' (рис. 4), индуцирует каноническое линейное инъективное отображение.

   Если прямоугольник B' находится в правом нижнем углу B'' (рис. 5), то вложение $B' \subseteq B''$ индуцирует каноническое линейное сюръективное отображение $\pi^{B''}_{B',r}\colon \mathbb{F}_r(B') \to \mathbb{F}_r(B'')$.
4. Если прямоугольник B представляет собой конечное дизъюнктивное объединение прямоугольников $B = \bigsqcup B_i$, то $\mathbb{F}_r(B)$ изоморфно $\bigoplus\limits_i \mathbb{F}_r(B_i)$; при этом изоморфизм каноническим не является.

Обозначим $B(a,b;\varepsilon) := (a-\varepsilon, a] \times [b, b+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Тогда при $\varepsilon' > \varepsilon$ имеется сюръективное линейное отображение $\mathbb{F}_r\bigl(B(a,b;\varepsilon')\bigr) \to \mathbb{F}_r\bigl(B(a,b;\varepsilon)\bigr)$.

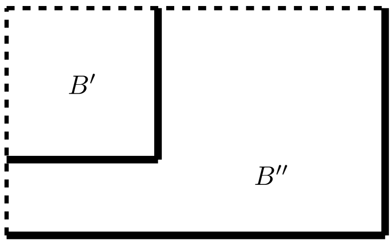

Рис. 4

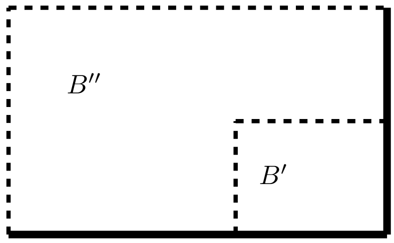

Рис. 5

По пункту 1 предложения 3.2 корректно определён предел

$$\hat{\delta}_r^{\tilde{f}}(a,b) := \varinjlim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{F}_r\big(B(a,b;\varepsilon)\big).$$

Положим

$$\delta_r^{\tilde{f}}(a,b) := \dim\big(\hat{\delta}_r^{\tilde{f}}(a,b)\big).$$

Из пункта 1 утверждения 3.4 вытекает, что для достаточно малых ε пространства $\mathbb{F}_r\big(B(a,b;\varepsilon)\big)$ стабилизируются. Для таких ε поэтому получаем, что

$$\hat{\delta}_r^{\tilde{f}}(a,b) = \mathbb{F}_r\big(B(a,b;\varepsilon)\big). \tag{3}$$

Полезно рассматривать $\hat{\delta}_r^{\tilde{f}}(a,b)$ не только как векторное пространство, но и как фактор подпространств в $H_r(\tilde{X})$:

$$\hat{\delta}_r^{\tilde{f}}(a,b) = \mathbb{F}_r(a,b)/\mathbb{F}'_r(a,b),$$

где

$$\mathbb{F}'_r(a,b) := \mathbb{F}'_r\big(B(a,b;\varepsilon)\big) = \mathbb{F}_r(a-\varepsilon,b) + \mathbb{F}_r(a,b+\varepsilon) \subseteq \mathbb{F}_r(a,b) \subseteq H_r(\tilde{X})$$

для достаточно малых ε (правая часть равенства не зависит от ε, когда ε достаточно мало). Заметим, что в случае, когда хотя бы одно из a, b не является гомологическим критическим значением, имеем $\mathbb{F}_r(a,b) = \mathbb{F}'_r(a,b)$. В случае же, когда оба значения a, b являются критическими, имеет место стабилизация $\mathbb{F}'_r(a,b) = \mathbb{F}'_r\big(B(a,b;\varepsilon)\big)$ для любого ε, такого что $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}(f)$.

Введём обозначения:

$$\operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde{f}}) = \operatorname{supp}(\hat{\delta}_r^{\tilde{f}}) := \{(a,b) \mid \delta_r^{\tilde{f}}(a,b) \neq 0\}.$$

В качестве следствия равенства (3) и утверждения 3.5 получим следующее предложение.

Предложение 3.6.

1. *Если* $\delta_r^{\tilde{f}}(a,b) \neq 0$ *то* $a, b \in \mathrm{CR}(\tilde{f})$.
2. *Для любого конечного или бесконечного прямоугольника* B *множество* $\operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde{f}}) \cap B$ *конечно.*

3. *Для любого конечного или бесконечного прямоугольника B верно равенство*
$$\sum_{(a,b)\in\operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde f})} \delta_r^{\tilde f}(a,b) = \dim \mathbb{F}_r(B).$$

Доказательство. Пункт 1 следует из определения 3.3 и пункта 1 утверждения 3.5.

Докажем пункт 2. Если множество $B\cap\operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde f})$ бесконечно, то по пункту 4 утверждения 3.5 и равенству (3) $\mathbb{F}_r(B)$ имеет бесконечную размерность. Однако это невозможно, так как размерность указанного пространства меньше размерности $\mathbb{F}_r(a,b)$, где (a,b) — правый нижний угол прямоугольника B, которая по предложению 3.2 конечна.

Докажем пункт 3. Из пункта 3 утверждения 3.5 следует, что если $B\cap\operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde f}) = \varnothing$, то $\mathbb{F}_r(B) = 0$, и если $B\cap\operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde f}) = (a',b')$, то $\mathbb{F}_r(B) = \hat\delta_r^{\tilde f}(a',b')$. Для доказательства утверждения в общем случае заметим, что любой прямоугольник (конечный или бесконечный) может быть разделён на конечное число дизъюнктных прямоугольников, $B = \bigsqcup B_{i,j}$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$, таких, что $B_{i,j}$ и $B_{i+1,j}$ расположены так, как показано на рис. 2, $B_{i,j}$ и $B_{i,j+1}$ — на рис. 3, и каждый $B_{i,j}$ содержит не более одного элемента $B\cap\operatorname{supp}(\delta^{\tilde f})_r$. Теперь нужное равенство может быть получено индукцией по m и n при помощи пунктов 1 и 2 утверждения 3.5 и частных случаев, упомянутых выше. □

Последнее предложение может быть усилено следующим образом. Для пары (a,b) рассмотрим сюръективное отображение
$$\pi_r(a,b)\colon \mathbb{F}_r(a,b)\to\hat\delta_r^{\tilde f}(a,b);$$
его правое обратное
$$s_r(a,b)\colon \hat\delta_r^{\tilde f}(a,b)\to\mathbb{F}_r(a,b)$$
будем называть *расщеплением*.

Для произвольного прямоугольника $B = (\alpha',\alpha]\times[\beta,\beta')$, где $a\in(\alpha',\alpha]$, $b\in[\beta,\beta')$, обозначим через
$$i_r^B(a,b)\colon \hat\delta_r^{\tilde f}(a,b)\to\mathbb{F}_r(B) \ \text{ и } \ i_r(a,b)\colon \hat\delta_r^{\tilde f}(a,b)\to\mathbb{H}_r(\tilde X)$$
композиции
$$\hat\delta_r^f(a,b)\xrightarrow{s_r(a,b)}\mathbb{F}_r(a,b)\xrightarrow{\subseteq}\mathbb{F}_r(\alpha,\beta)\xrightarrow{\pi^B_{\alpha\beta,r}}\mathbb{F}_r(B)$$
и
$$\hat\delta_r^f(a,b)\xrightarrow{s_r(a,b)}\mathbb{F}_r(a,b)\xrightarrow{\subseteq}H_r(\tilde X)$$
соответственно.

Для удобства читателя на следующей диаграмме показаны все введённые нами отображения:

$$\begin{tikzcd}
H_r(\tilde X) & \mathbb{F}_r(a,b) \arrow[l, "\supseteq"'] \arrow[r, "\pi_r(a,b)"'] \arrow[d, "\pi^B_{ab,r}"'] & \hat\delta_r^{\tilde f}(a,b) \arrow[l, bend right, "s_r(a,b)"'] \arrow[ll, bend right=40, "i_r(a,b)"'] \arrow[dl, "i_r^B(a,b)"] \\
\mathbb{F}_r(B_1) \arrow[r, "i^B_{B',r}"] & \mathbb{F}_r(B) \arrow[r, "\pi^{B_2}_{B,r}"'] & \mathbb{F}_r(B_2)
\end{tikzcd}\qquad (4)$$

Если $B=B_1\sqcup B_2$ так, как показано на рис. 2 или 3, то с помощью утверждения 3.5 получим следующие свойства.

Утверждение 3.7.

1. Если $(a,b)\in B_2$, то отображение $\pi^{B_2}_{B,r}\cdot i_r^B(a,b)$ инъективно.
2. Если $(a,b)\in B_1$, то отображение $\pi^{B_2}_{B,r}\cdot i_r^B(a,b)$ является нулевым.

Выберем расщепления $\{s_r(a,b)\mid (a,b)\in \operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde f})\}$ и рассмотрим гомоморфизм

$$I_r=\sum_{(a,b)\in\operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde f})} i_r(a,b)\colon \bigoplus_{(a,b)\in\operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde f})} \hat\delta_r^f(a,b)\to H_r(\tilde X),$$

а для конечного или бесконечного прямоугольника B рассмотрим гомоморфизм

$$I_r^B=\sum_{(a,b)\in\operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde f})\cap B} i_r^B(a,b)\colon \bigoplus_{(a,b)\in\operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde f})\cap B} \hat\delta_r^f(a,b)\to \mathbb{F}_r(B).$$

Обозначим через $I_r(K)$ ограничение I_r на $\bigoplus\limits_{(a,b)\in\Sigma}\hat\delta_r^f(a,b)$, где $\Sigma\subseteq\operatorname{supp}(\delta_r^f)$, и через $I_r^B(K)$ — ограничение I_r^B на $\bigoplus\limits_{(a,b)\in\Sigma}\hat\delta_r^f(a,b)$, где $\Sigma\subseteq\operatorname{supp}(\delta_r^f)\cap B$.

Утверждение 3.8. Если $B=B_1\sqcup B_2$ так, как показано на рис. 2 или 3, а $\Sigma\subseteq\operatorname{supp}\delta_r^{\tilde f}$, где $\Sigma=\Sigma_1\sqcup\Sigma_2$, $\Sigma_1\subseteq B_1$, $\Sigma_2\subseteq B_2$, то диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_r(B_1) \arrow[r] & \mathbb{F}_r(B) \arrow[r] & \mathbb{F}_r(B_2) \\
\bigoplus\limits_{(a,b)\in\Sigma_1}\hat\delta_r^{\tilde f}(a,b) \arrow[u, "I_r^{B_1}(\Sigma_1)"'] \arrow[r] & \bigoplus\limits_{(a,b)\in\Sigma}\hat\delta_r^{\tilde f}(a,b) \arrow[u, "I_r^{B}(\Sigma)"'] \arrow[r] & \bigoplus\limits_{(a,b)\in\Sigma_2}\hat\delta_r^{\tilde f}(a,b) \arrow[u, "I_r^{B_2}(\Sigma_2)"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна. В частности, если отображение $I_r^{B_1}(\Sigma_1)$ инъективно, то отображение $I_r^B(\Sigma)$ также является инъективным.

Предложение 3.9.

1. *Для любого Σ отображения $I_r(\Sigma)$ и $I_r^B(\Sigma)$ инъективны.*

2. *Отображение* I_r^B — *изоморфизм.*
3. *Рассмотрим проекцию*

$$\pi_r\colon H_r(\tilde X) \to H_r(\tilde X)/\big(\mathbb{I}_{-\infty}(r) + \mathbb{I}^{\infty}(r)\big) = H_r(\tilde X)/TH_r(\tilde X).$$

Отображение $\pi_r \cdot I_r$ — *изоморфизм.*

Доказательство. Докажем пункт 1. Если мощность Σ равна 1, то утверждение проверяется с помощью утверждения 3.7. В случае, когда точки Σ имеют одинаковую первую координату, мы используем утверждение 3.8 и индукцию по мощности Σ. А именно, представим B в виде $B = B_1 \sqcup B_2$, где мощность B_1 равна $k-1$, B_2 содержит один элемент (здесь k — мощность Σ). Утверждение верно для $\Sigma \cap B_2$ и по предположению индукции для $\Sigma \cap B_1$. Остаётся применить утверждение 3.8.

В общем случае множество Σ представляется в виде $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \ldots \sqcup \Sigma_k$ так, что точки множества Σ_i имеют первую координату, равную a_i, причём $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Далее применим индукцию по k: прямоугольник B представляется в виде $B = B_1 \sqcup B_2$ (см. рис. 3) так, что B_2 содержит множество Σ_1, а B_1 — остальные элементы разложения. Для Σ_1 утверждение следует из доказанного выше, и по предположению индукции оно верно для $\Sigma \cup B_1$. Далее вновь необходимо воспользоваться утверждением 3.8.

Докажем пункт 2. Инъективность следует из пункта 1. Сюръективность получается из равенства размерностей области определения и области значений, которое, в свою очередь, следует из предложения 3.6.

Докажем пункт 3. Из пункта 3 утверждения 3.1 получаем, что

$$\varinjlim_{k\to\infty} \mathbb{F}_r(a+k, b-k) = H_r(\tilde X)$$

и

$$\varinjlim_{k\to\infty} \mathbb{F}_r\big((-\infty, a+k] \times [b-k, \infty)\big) := H_r(\tilde X)/(\mathbb{I}_{-\infty} + \mathbb{I}_{\infty}) = H_r(\tilde X)/TH_r(\tilde X).$$

Для фиксированной точки (a,b) положим $B_k := (-\infty, a+k] \times [b-k, \infty)$, в частности $\mathbb{R}^2 := \bigcup_k B_k$. Теперь нужное нам утверждение следует из того, что

$$\pi_r \cdot I_r = \varinjlim_{\{k\to\infty\}} I_r^{B_k}. \qquad \square$$

Конфигурации δ_r^f и $\hat\delta_r^f$

Определим отображение $\omega\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ формулой

$$\omega\big(n, (a,b)\big) = (a + 2\pi k, b + 2\pi k)$$

и рассмотрим фактор-пространство $\mathbb{T}$, которое может быть отождествлено с $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus 0$ с помощью отображения

$$\mathbb{T} \ni \langle a, b\rangle \to z = e^{(b-a)+ia} \in \mathbb{C}^* \setminus 0,$$

где $\langle a,b\rangle$ обозначает класс (a,b). Ввиду равенства $\delta_r^{\tilde f}(a,b)=\delta_r^{\tilde f}(a+2\pi k,b+2\pi k)$ корректно определена величина

$$\delta_r^f(\langle a,b\rangle)=\delta_r^f(z):=\delta_r^{\tilde f}(a,b). \tag{5}$$

Рассмотрим диаграмму, в которой t_r — отображение умножения на t (т. е. $x\mapsto t\cdot a$) и $\hat t_r(a,b)$ — линейный изоморфизм, замыкающий диаграмму до коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
H_r(\tilde X) \arrow[d, "t\cdot=t_r"] & \mathbb{F}_r(a,b) \arrow[l, "\supseteq"'] \arrow[r, "\pi_r(a,b)"] \arrow[d, "t_r"] & \hat\delta_r^{\tilde f}(a,b) \arrow[d, "\hat t_r(a,b)"] \\
H_r(\tilde X) & \mathbb{F}_r(a+2\pi,b+2\pi) \arrow[l] \arrow[r] & \hat\delta_r^{\tilde f}(a+2\pi,b+2\pi)
\end{tikzcd}.$$

Из равенства $t_r(\mathbb{F}_r(a,b))=\mathbb{F}_r(a+2\pi,b+2\pi)$ получим, что подпространства

$$\begin{aligned}(\mathbb{F}_r)'(\langle a,b\rangle)&:=\sum_k\mathbb{F}_r'(a+2\pi k,b+2\pi k)\subseteq H_r(\tilde X),\\ \mathbb{F}_r(\langle a,b\rangle)&:=\sum_k\mathbb{F}_r(a+2\pi k,b+2\pi k)\subseteq H_r(\tilde X)\end{aligned} \tag{6}$$

являются $\kappa[t^{-1},t]$-подмодулями $H_r(\tilde X)$. Положим

$$\hat\delta_r^f(\langle a,b\rangle):=\bigoplus_k\hat\delta_r^{\tilde f}(a+2\pi k,b+2\pi k). \tag{7}$$

Для этого векторного пространства определён изоморфизм

$$\hat t_r=\hat t_r(\langle a,b\rangle):=\bigoplus_k(\hat t_r(a+2\pi k,b+2\pi k)\colon\hat\delta_r^f(\langle a,b\rangle)\to\hat\delta_r^f(\langle a,b\rangle)$$

который задаёт на $\hat\delta_r^f(\langle a,b\rangle)$ структуру свободного $\kappa[t^{-1},t]$-модуля ранга $\delta_r^f(\langle a,b\rangle)$.

Расщепления набора $\{s_r^{a,b}\colon\hat\delta(a,b)\to\mathbb{F}_r(a,b)\}$, удовлетворяющие условиям $t_r\cdot s_r^{a,b}=s_r^{a+2\pi,b+2\pi}\cdot\hat t_r(a,b)$, называются *совместимыми расщеплениями*. Очевидно, такие наборы расщеплений существуют. В самом деле, достаточно выбрать *расщепления* лишь для $\{(a,b)\in\operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde f}),\ 0\leqslant a<2\pi\}$, заметив, что элементы каждой пары $(a',b')\in\operatorname{supp}(\delta_r^{\tilde f})$ могут быть представлены в виде $a'=a+2\pi k$, $b'=b+2\pi k$ для некоторого $k\in\mathbb{Z}$ так, что $0\leqslant a<2\pi$, и положив $s_r(a',b'):=(\hat t_r)^k\cdot s_r(a,b)(\hat t_r)^{-k}$.

Выберем набор совместимых расщеплений. Положим

$$\operatorname{supp}(\delta_r^f)=\operatorname{supp}(\hat\delta_r^f):=\{\langle a,b\rangle\in\mathbb{T}\mid\delta_r^f(\langle a,b\rangle)\neq0\}$$

или, эквивалентно,

$$\bigl\{z\in\mathbb{C}\setminus0\mid z=e^{ia+(b-a)},\ \langle a,b\rangle\in\operatorname{supp}(\delta_r^f)\bigr\}.$$

Тогда κ-линейное отображение

$$I_r\colon \bigoplus_{\langle a,b\rangle\in\operatorname{supp}(\delta_r^f)} \hat{\delta}_r^f(\langle a,b\rangle)\to H_r(\tilde{X}),$$

построенное по *совместимым расщеплениям*, является $\kappa[t^{-1},t]$-линейным. Из предложения 3.9 выводим следующее утверждение.

Следствие 3.10.

1. *Композиция $\pi_r\cdot I_r$, где $\pi_r\colon H_r(\tilde{X})\to H_r^N(X,\xi)$ — каноническая проекция, является изоморфизмом свободных $\kappa[t^{-1},t]$-модулей.*
2. *Образ ограничения I_r на пространство $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}}\hat{\delta}_r^{\tilde{f}}(a+2\pi k,b+2\pi k)=\hat{\delta}_r^f(\langle a,b\rangle)$, обозначаемого через $I_r(\langle a,b\rangle)$, содержится в $\mathbb{F}_r(\langle a,b\rangle)$, при этом*

$$\operatorname{img} I_r(\langle a,b\rangle)\cap(\mathbb{F}_r)'(\langle a,b\rangle)=0.$$

   Следовательно, композиция I_r с ограничением π_r на $\mathbb{F}_r(\langle a,b\rangle)$ инъективна, так как $\pi_r\cdot I_r$ — изоморфизм. Более того, $\pi_r\cdot I_r(\langle a,b\rangle)$ — это расщепляющееся инъективное $\kappa[t^{-1},t]$-линейное отображение, образ которого может быть отождествлён со свободным модулем $\mathbb{F}_r(\langle a,b\rangle)/(\mathbb{F}'_r(\langle a,b\rangle)$.
3. *Набор целых чисел $\delta_r^f(\langle a,b\rangle)$ и свободных $\kappa[t^{-1},t]$-модулей $\hat{\delta}_r^f(\langle a,b\rangle)$ задаёт конфигурацию δ_r^f точек в $\mathbb{T}=\mathbb{C}\setminus 0$ и конфигурацию $\hat{\delta}_r^f$ конечно порождённых свободных $\mathbb{C}[t^{-1},t]$-модулей, которые являются расщепляющими подмодулями в $H_r^N(X,\xi^f;\kappa[t^{-1},t])$.*

4. Доказательство теоремы 1.1

Пункты 1 и 2 теоремы 1.1 немедленно вытекают из следствия 3.10, предложения 3.2 и формул (5)—(7).

В самом деле, по предложению 3.2 имеем изоморфизм

$$H_r^N(X,\xi^f;\kappa[t^{-1},t])=H_r(\tilde{X})/\big(\mathbb{I}_{-\infty}(r)+\mathbb{I}^{\infty}(r)\big)=H_r(\tilde{X})/T\big(H_r(\tilde{X})\big).$$

Конфигурация δ_r^f задаётся соотношением (5), а многочлены $P_r^f(z)$ формулой

$$P_r^f(z)=\prod_{z_i\in\operatorname{supp}(\delta_r^f)}(z-z_i)^{\delta_r^f(z_i)}.$$

При $z=e^{ia+(b-a)}$ рассмотрим $L(z)=\mathbb{F}_r(\langle a,b\rangle)$ и $L'(z)=\mathbb{F}'_r(\langle a,b\rangle)$. Из пунктов 2 и 3 следствия 3.10 получаем, что для конфигурации $\hat{\delta}_r^f$, заданной соотношением (7), также имеет место изоморфизм $\kappa[t^{-1},t]$-модулей $\hat{\delta}_r^f(z)=L(z)/L'(z)$. Отсюда с помощью пункта 1 и соотношения (5) легко выводятся свойства а) и б) пункта 2 теоремы 1.1.

Пусть $\kappa = \mathbb{C}$. Выбирая $\mathbb{C}[t^{-1}, t]$-значное скалярное произведение на $H^N(X, \xi^f; \mathbb{C}[t^{-1}, t])$ и применяя пополнение по фон Нейману, описанное в подразделе 2.1, по конфигурации $\hat{\delta}^f_r$ построим конфигурацию $\hat{\hat{\delta}}^f_r(r)$ замкнутых гильбертовых подмодулей $\mathcal{N} = L^\infty(\mathbb{S}^1)$-модуля $\overline{H^N_r(X, \xi : \mathbb{C}[t^{-1}, t])}$. Таким образом, пункт 3 доказан.

Проверка утверждений P1 и P2 будет обсуждаться в [4]. Впервые они были установлены для конечных симплициальных комплексов, затем для Q-многообразий и ручных отображений и, наконец, для произвольных непрерывных отображений произвольных компактных ANR-пространств. Именно по этой причине были приведены основные факты о Q-многообразиях в подразделе 2.3.

Литература

[1] Burghelea D. Linear relations, monodromy and Jordan cells of a circle valued map. — `arXiv:1501.02486`.

[2] Burghelea D. Refinements of Betti numbers provided by a real valued map. — `arXiv:1501.01012`.

[3] Burghelea D. Refinements for Novikov—Betti numbers = L_2-Betti numbers of $\big(X, \xi \in H^1(X; \mathbb{Z})\big)$ induced by an angle valued map $f\colon X \to \mathbb{S}^1$. — In preparation.

[4] Burghelea D. Refinements of Betti numbers provided by an angle valued map. — In preparation.

[5] Burghelea D. and Dey T. K. Persistence for circle-valued maps // Discrete Comput. Geom. — 2013. — Vol. 50, no. 1. — P. 69—98. — `arXiv:1104.5646`.

[6] Burghelea D., Haller S. Topology of angle valued maps, bar codes and Jordan blocks. — `arXiv:1303.4328`. — Max Plank preprints.

[7] Carlsson G., de Silva V., Morozov D. Zigzag persistent homology and real-valued functions // SCG '09 Proc. of the 25th Annual Symposium on Computational Geometry. — New York: ACM, 2009. — P. 247—256.

[8] Chapman T. A. Lectures on Hilbert Cube Manifolds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1976. — (CBMS Reg. Conf. Ser. Math.; Vol. 28).

[9] Cohen-Steiner D., Edelsbrunner H., Harer J. L. Stability of persistence diagrams // Discrete Comput. Geom. — 2007. — Vol. 37. — P. 103—120.

[10] Daverman R. J., Walsh J. J. A ghastly generalized n-manifold // Illinois J. Math. — 1981. — Vol. 25, no. 4. — P. 555—576.

[11] Lück W. Hilbert modules and modules over finite von Neumann algebras and applications to L^2 invariants // Math. Ann. — 1997. — Vol. 309. — P. 247—285.