О непрерывной комбинаторике частично упорядоченных множеств, многогранников и матроидов

Р. Т. ЖИВАЛЬЕВИЧ
Математический институт САНУ, Сербия
e-mail: rade@mi.sanu.ac.rs

УДК 515.142

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, выпуклый многогранник, конфигурации подпространств, матроид.

Аннотация

Мы обосновываем необходимость систематического изучения непрерывных аналогов таких дискретных структур, как конечные частично упорядоченные множества, выпуклые многогранники, ориентированные матроиды, конфигурации подпространств, конечные симплициальные комплексы и другие комбинаторные структуры. Важность такого систематического изучения иллюстрируют формула Эйлера для класса «непрерывных выпуклых многогранников» (гипотеза Калаи и Вигдерсона), двойственность для «непрерывных матроидов», вычисление эйлеровой характеристики идеалов в грассмановом частично упорядоченном множестве (связанном с проблемой Дж.-К. Роты), описание формулы «гомотопического дополнения» для топологических частично упорядоченных множеств и её связь с результатами С. Каллела и Р. Каруи о пространствах взвешенных барицентров, а также гипотеза Васильева о симплициальных резольвентах особенностей. Мы также обсуждаем обобщение неравенства Саркарьи, основанное на интерпретации диаграмм пространств как непрерывных частично упорядоченных множеств.

Abstract

R. T. Živaljević, A glimpse into continuous combinatorics of posets, polytopes, and matroids, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 6, pp. 143—164.

We advocate a systematic study of continuous analogs of finite partially ordered sets, convex polytopes, oriented matroids, arrangements of subspaces, finite simplicial complexes, and other combinatorial structures. Among the illustrative examples reviewed are an Euler formula for a class of “continuous convex polytopes” (conjectured by Kalai and Wigderson), a duality result for a class of “continuous matroids,” a calculation of the Euler characteristic of ideals in the Grassmannian poset (related to a problem of G.-C. Rota), an exposition of the “homotopy complementation formula” for topological posets and its relation to the results of S. Kallel and R. Karoui about “weighted barycenter spaces”, and a conjecture of Vassiliev about simplicial resolutions of singularities. We also include an extension of the index inequality (Sarkaria’s inequality) based on interpreting diagrams of spaces as continuous posets.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 6, с. 143—164.

1. Введение

Идея смешивать непрерывную и дискретную математику в рамках единого подхода так называемой конкретной (ConCrete) математики уже давно перестала быть чем-то неожиданным или новым. Более того, представляется, что существует несколько способов реализации этого подхода (см. [2], где обсуждается интересное взаимодействие анализа и комбинаторики, и [10], где исследуются аналогии между инвариантными мерами на поливыпуклых множествах и мерами на порядковых идеалах конечных частично упорядоченных множеств). Список примеров этими работами не исчерпывается (см., например, также [3, 7, 24], где непрерывные объекты исследуются с дискретной точки зрения и наоборот).

Следуя в основном [24], в этой работе мы собрали некоторые наблюдения (и впечатления) автора о топологических аспектах «конкретной» математики.

В разделе 2 мы исследуем (следуя [7]) возможность рассматривать произвольное выпуклое тело как «непрерывный выпуклый многогранник» (с непрерывным семейством граней, непрерывными флаговыми векторами и т. д.). Основной результат — это формула Эйлера (теорема 2.7), доказанная для так называемых «ручных многогранников».

В разделе 3.1 мы обсуждаем «непрерывные матроиды». Основное наблюдение этой части (предложение 3.5) состоит в том, что с помощью рассуждений, опирающихся на выпуклость, можно показать, что для непрерывных матроидов, определённых в разделе 3.1, имеется естественное понятие двойственного матроида и при этом выполняется некоторая версия теоремы двойственности.

Топологические частично упорядоченные множества представляют собой наиболее разработанные и, вероятно, наиболее полезные в приложениях «конкретные» объекты среди тех, что обсуждаются в этой работе. Раздел 4.1 посвящён грассмановым топологическим частично упорядоченным множествам. Мы показываем их связь (теорема 4.6) с одной из проблем Дж.-К. Роты (см. [12]). Роль топологических частично упорядоченных множеств в хорошо разработанной теории разрешения особенностей (см., например, [1]) показана в разделе 5. Следуя [24], мы даём краткий обзор «формулы гомотопического дополнения» для топологических частично упорядоченных множеств. Среди основных примеров важное место занимает конфигурационное частично упорядоченное множество $\exp_n(X)$. Также мы обсуждаем его связь с «пространствами барицентров» [8] С. Каллела и Р. Каруи, а также с гипотезой Васильева (сформулированной им в докладе на конференции «Геометрическая комбинаторика» в феврале 1997 года в Беркли).

Диаграммы пространств и их гомотопические копределы обсуждаются в разделе 6. Мы показываем, как «непрерывно-дискретная» точка зрения естественным образом приводит к полезному обобщению неравенства Саркарьи (см. [11, 23]) на класс диаграмм пространств (предложение 6.2).

2. Непрерывные многогранники

Любое выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^d$ можно рассматривать как «непрерывный многогранник» (для краткости С-многогранник) с (возможно) недискретными семействами $F_k(K)$ его k-мерных граней. По определению $A \in F_k(K)$ называется k-мерной гранью K, если A — это k-мерное замкнутое подмножество и для любого прямолинейного отрезка $[a,b] \subset K$ из условия $(a,b) \cap A \neq \varnothing$ следует, что $\{a,b\} \subset A$. Из определения легко вывести, что если A является гранью B, а B является гранью C, то A является гранью C. Множество $F_k(K)$ всех k-мерных граней снабжается топологией, индуцированной метрикой Хаусдорфа на множестве замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^d$.

Определение 2.1. Несвязное объединение $\mathcal{F}(K) = \coprod\limits_{k=0}^{d} F_k(K)$ будем называть пространством граней выпуклого тела (или непрерывного многогранника) K. С ним ассоциировано топологическое частично упорядоченное множество граней $\mathcal{F}_K = (\mathcal{F}(K), \prec)$, где $A \prec B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$.

Грань $A \in \mathcal{F}(K)$ будем называть *выступающей*, если $A = K \cap H$ для некоторой опорной гиперплоскости H многогранника K. Через $F_k^{\mathrm{exp}}(K) \subset F_k(K)$ будем обозначать множество всех k-мерных выступающих граней K, а через $\mathcal{F}^{\mathrm{exp}}(K)$ — соответствующее пространство всех выступающих граней K.

Отметим, что если $A \in \mathcal{F}^{\mathrm{exp}}(B)$ и $B \in \mathcal{F}^{\mathrm{exp}}(C)$, то не всегда верно, что $A \in \mathcal{F}^{\mathrm{exp}}(C)$. Например, экстремальная точка $a \in K$, которая не является выступающей гранью, причём $[a,b] \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{exp}}(K)$ для некоторой точки b, является примером 0-мерной грани с таким свойством. Более того, этот пример далеко не единичный. В самом деле, сумма Минковского $K = O + P$ гладкого выпуклого тела O и выпуклого многогранника P всегда имееет точки такого типа.

Тот факт, что $\mathcal{F}(K)$ в определённом смысле устроено лучше, чем $\mathcal{F}^{\mathrm{exp}}(K)$ (как топологическое частично упорядоченное множество) объясняет, почему мы основное внимание уделяем $\mathcal{F}(K)$.

Имеется эмпирическое наблюдение (без формального доказательства), что тело, являющееся суммой Минковского $K = O + P$, можно так изменить (перейти к усечению или регуляризации), что получится выпуклое тело K', у которого структура граней устроена в определённом смысле лучше, чем у исходного, но которое часто оказывается топологически близким к K, в том смысле, что $F_k(K)$ и $F_k(K')$ гомеоморфны (рис. 1).

Проблема 2.2. Было бы полезно иметь строгое доказательство утверждения о возможности регуляризации, показанной на рис. 1, для достаточно широкого класса компактных выпуклых тел. Более точно, задача состоит в том, чтобы по данному компактному выпуклому телу P построить новое выпуклое тело Q, такое что

а) каждая грань Q является выступающей, $\mathcal{F}^{\mathrm{exp}}(Q) = \mathcal{F}(Q)$;

б) $F_k(P)$ и $F_k(Q)$ гомеоморфны (гомотопически эквивалентны) для любого $k = 0, \ldots, d$.

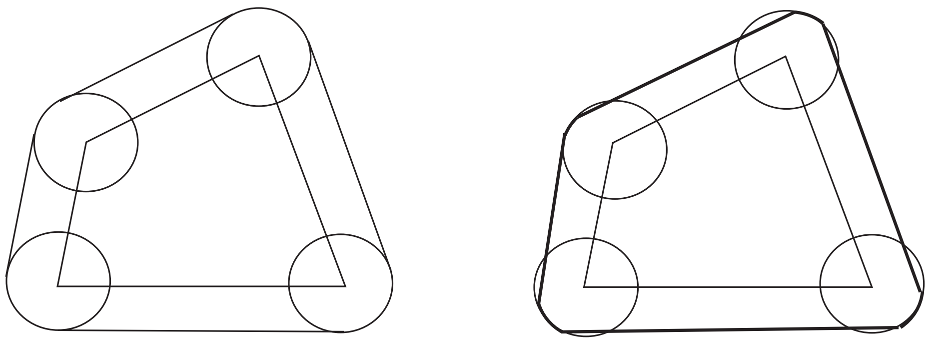

Рис. 1. Регуляризация суммы Минковского

2.1. Ручные С-многогранники

Основная цель раздела 2 — теорема 2.7, которая подтверждает гипотезу Калаи—Вигдерсона (гипотеза 2.6) для класса «ручных непрерывных многогранников». Напомним, что *центроидом Штейнера* назвается непрерывная селекция $\mathrm{SC} : \mathcal{K}_d \to \mathbb{R}^d$ точки из каждого компактного выпуклого множества $A \in \mathcal{K}_d$, которая аддитивна по Минковскому и инвариантна относительно движений евклидова пространства (см. [13], а также [Ži89]).

Определение 2.3. Будем говорить, что выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^d$ с компактным пространством граней $\mathcal{F}(K)$ (см. определение 2.1) является k-регулярным или k-ручным, если выполняются следующие условия:

1) набор $\{E_A\}_{A \in F_k(K)}$ всех k-мерных «касательных» пространств K к k-мерным граням является векторным расслоением $\pi_k \colon \mathcal{E}_k \to F_k(K)$ над $F_k(K)$;
2) обозначим через
$$\mathcal{C}_k = \bigcup \{\mathrm{relint}(A) \mid A \in F_k(K)\}$$
объединение всех относительных внутренностей всех k-мерных граней K, а через $\hat{\mathcal{C}}_k$ его одноточечную компактификацию. Тогда пространство $\hat{\mathcal{C}}_k$ и пространство Тома $\mathrm{Thom}(\mathcal{E}_k)$ расслоения $\mathcal{E}_k$ гомеоморфны.

Выпуклое тело K будем называть *ручным С-многогранником*, если оно k-регулярно для любого $0 \leqslant k \leqslant \dim(K)$.

Прокомментируем условия (1) и (2) в определении 2.3. Для $A \in F_k(A)$ аффинная оболочка $\mathrm{aff}(A)$ множества A может рассматриваться как векторное пространства с элементом $0 = 0_A$ в качестве нулевого. Точнее, E_A является векторным подпространством в $\mathbb{R}^d$, полученным переносом $\mathrm{aff}(A)$ на вектор $-\mathrm{SC}(A)$. Условие (1) означает, что это семейство векторных пространств локально тривиально в том смысле, что

$$\mathcal{E}_k := \bigcup_{A \in F_k(K)} \{A\} \times E_A \subset F_k(K) \times \mathbb{R}^d$$

является тотальным пространством некоторого векторного расслоения над $F_k(K)$.

Условие (2) означает, что k-мерные замкнутые выпуклые подмножества $A \in F_k(K)$ можно рассматривать как «диски» в E_A и (что более важно) объединение относительных внутренностей всех $A \in F_k(K)$ является тотальным пространством расслоения на (открытые) диски, ассоциированным с расслоением $\mathcal{E}_k$.

Проблема 2.4. Было бы полезно найти описание наиболее общего класса выпуклых тел, которые являются ручными в смысле определения 2.3.

Пример 2.5. Другой естественный вопрос, противоположный проблеме 2.4, состоит в поиске простейших примеров C-многогранников, которые являются «дикими», т. е. для которых не выполняется хотя бы одно из условий (1) или (2) из определения 2.3. Пример в размерности 3 получается как выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(D \cup I)$, где $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\}$ — единичный диск в плоскости Oxy, а I — вертикальный отрезок на оси Oz, содержащий начало координат.

2.2. Формула Эйлера для C-многогранников

Г. Калаи и А. Вигдерсон высказали гипотезу (см. [7, гипотеза 6]), что для C-многогранников выполняется аналог формулы Эйлера. Эйлерову характеристику пространства X будем обозначать через $\chi(X)$.

Гипотеза 2.6. Предположим, что K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^d$, и пусть $F_k(K)$ — пространство всех его k-мерных граней, снабжённое метрикой Хаусдорфа. Предположим, что $F_k(K)$ компактно для всех k. Тогда имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \chi\bigl(F_k(K)\bigr) = \chi(S^{d-1}) = 1 + (-1)^{d-1}. \tag{1}$$

Теорема 2.7. *Предположим, что K — выпуклое тело, которое является ручным C-многогранником в смысле определения* 2.3. *Тогда*

$$\sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \chi\bigl(F_k(K)\bigr) = \chi(S^{d-1}) = 1 + (-1)^{d-1}. \tag{2}$$

Более того, гипотеза 2.6 *верна, если для каждого k пространство $F_k(K)$ является базой ассоциированного векторного расслоения $\mathcal{E}_k$ (определение* 2.3).

Доказательство. Обозначим через

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k(K) := \bigcup_{j=0}^{k} F_j(K)$$

объединение всех j-мерных граней K для $j = 0, \ldots, k$.

По определению

$$\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{F}_{k-1} = \bigcup \{\operatorname{relint}(A) \mid A \in F_k(K)\}$$

является объединением относительных внутренностей всех k-мерных граней K, причём имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_k \setminus \mathcal{F}_{k-1} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{E}_k \\ {\scriptstyle\pi_k}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi_k} \\ F_k(K) & \xrightarrow[=]{} & F_k(K) \end{array}, \tag{3}$$

в которой α — вложение. По предположению выполняются свойства из определения 2.3, поэтому для $\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{F}_{k-1}$ одноточечная компактификация $\hat{\mathcal{C}}_k$ гомеоморфна пространству Тома $T_k = \mathrm{Thom}(\mathcal{E}_k)$ расслоения $\mathcal{E}_k$.

Пусть $\tilde{\chi}(Y)$ — приведённая эйлерова характеристика пунктированного пространства Y. По теореме об изоморфизме Тома $\chi\big(F_k(K)\big) = (-1)^k \tilde{\chi}(T_k)$ (нужно помнить о том, что изоморфизм сдвигает размерности на k). Из точной последовательности пары $(\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k-1})$ получаем, что

$$\chi(\mathcal{F}_k) = \chi(\mathcal{F}_{k-1}) + \tilde{\chi}(T_k) = \chi(\mathcal{F}_{k-1}) + (-1)^k \chi\big(F_k(K)\big). \tag{4}$$

Заметим, что при $k = 0$ соотношение (4) принимает вид $\chi(\mathcal{F}_0) = \chi\big(F_0(K)\big)$. Складывая равенства (4) для $k = 0, \ldots, d-1$, получаем

$$\sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \chi\big(F_k(K)\big) = \chi(\mathcal{F}_{d-1}), \tag{5}$$

откуда вытекает равенство (2), поскольку $\mathcal{F}_{d-1} = \partial(K) \cong S^{d-1}$. □

3. Непрерывные матроиды

Непрерывные матроиды представляют из себя ещё один класс непрерывных объектов, изучение и появление которых мотивировано их дискретными аналогами. Материал этого раздела основан на неопубликованной работе [26]. Основной результат — предложение 3.5, которое означает, что по непрерывному матроиду (см. определение в разделе 3.1) естественным образом строится матроид, в определённом смысле двойственный исходному. (классическое изложение для случая ориентированных матроидов см. в [21, лекция 6]). Более свежие результаты с несколько другой точки зрения освещены в [3].

3.1. Комплексные и кватернионные матроиды

Будем обозначать через $\mathbb{K}$ одно из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или же тело кватернионов $\mathbb{H}$. Пусть $S = S_{\mathbb{K}} \cong S^{d(K)-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^n$ — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{K}$ (левый модуль в случае кватернионов).

Определение 3.1. $\mathbb{K}$-кроссполитопом или $\mathbb{K}$-гипероктаэдром в $\mathbb{K}^n$ называется выпуклое тело $\Diamond_{\mathbb{K}}^n$, которое определяется как выпуклая оболочка

$$\Diamond_{\mathbb{K}}^n := \operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{n} S_i,$$

где

$$S_i := \{z \in \mathbb{K}^n \mid |z_i| = 1 \text{ и } z_j = 0 \text{ для всех } j \neq i\} \text{ —}$$

единичная сфера на i-й оси координат.

Как видно, $\Diamond_{\mathbb{K}}^n$ является примером «непрерывного» многогранника (C-многогранника в смысле раздела 2). Напомним, что C-многогранник — это выпуклое тело, которое обладает свойствами и гладкого выпуклого тела, и выпуклого многогранника. Другие примеры C-многогранников дают «непрерывный циклический многогранник», определяемый как выпуклая оболочка кривой $\Gamma_n = \{(z, z^2, \ldots, z^n) \mid |z| = 1)\}$, и вообще выпуклые оболочки вложенных многообразий (см. [7]). Другими интересными мотивирующими примерами (с которыми мы встречались в разделе 2) служат суммы Минковского гладких выпуклых тел и выпуклых многогранников, в частности произведения $C = A \times Q \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, где A — выпуклое тело $\mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый многогранник.

Характеристическое свойство C-многогранника K состоит в том, что частично упорядоченное множество его граней (см. определение 2.1) является непрерывным частично упорядоченным множеством в смысле [24] (см. также раздел 4).

Определение 3.2. Предположим, что $K \subset \mathbb{R}^n$ является C-многогранником, для которого $0 \in \int(K)$. Пусть $\mathcal{F}_K$ — соответствующее частично упорядоченное множество граней (определение 2.1). Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое линейное подпространство. Тогда K-матроидом $\mathcal{M}_K(L)$ подпространства L называется

$$\mathcal{M}_K(L) = \{A \in \mathcal{F}_K \mid \operatorname{relint}(A) \cap L \neq \varnothing\}.$$

$\Diamond_{\mathbb{K}}^n$-матроид подпространства L, где $\Diamond_{\mathbb{K}}^n$ — $\mathbb{K}$-кроссполитоп (см. определение 3.1), будем называть $\mathbb{K}$-матроидом и обозначать через $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(L)$.

Пример 3.3. Пусть $K = \Diamond_{\mathbb{R}}^n = \Diamond^n$ — стандартный (вещественный) кроссполитоп. Тогда частично упорядоченное множество его граней $\mathcal{F}_{\Diamond^n}$ (с минимальным элементом $\varnothing = \hat{0}$) изоморфно частично упорядоченному множеству $\mathcal{S}gn_n = (\{-1, 0, +1\}^n, \leqslant)$ всех знаковых векторов стандартной теории ориентированных матроидов. По определению K-матроид $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(L)$, соответствующий подпространству $L \subset \mathbb{R}^n$, является *реализуемым ориентированным матроидом* из стандартной теории ориентированных матроидов. В самом деле, $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(L)$ в точности совпадает с набором всех знаковых векторов $\operatorname{sgn}(v) \in \{-1, 0, +1\}^n$ для всех $v \in L$.

3.2. Знаковые векторы

Пример 3.3 показывает, что грани С-многогранника $K \subset \mathbb{R}^n$ можно понимать как обобщённые знаковые векторы. В частности, отображение

$$\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}_K, \tag{6}$$

которое ставит в соответствие вектору $v \in \mathbb{R}^n$ его знак $\nu(v)$, определяется как единственная грань $F \in \mathcal{F}_K$, такая что луч $\rho(v) := \{\lambda v \mid \lambda \geqslant 0\}$ и $\mathrm{relint}(F)$ имеют непустое пересечение.

Обоснованием естественности этого определения служит тот факт, что набор $\{\mathrm{relint}(A) \mid A \in \mathcal{F}_K\}$ образует разбиение С-многогранника K (см. [15, теорема 18.2.]). В частности, каждый луч $\rho(v)$ имеет непустое пересечение в точности с одним из множеств $\mathrm{relint}(A)$ для $A \in \mathcal{F}_K$.

По аналогии со случаем ориентированных матроидов будем называть K-знаковым вектором v вектор $\nu(v)$. В частности, множество всех векторов с общим K-знаковым вектором $F \in \mathcal{F}_K$ образует (относительно открытый) конус $\mathrm{cone}\big(\mathrm{relint}(F)\big)$. Семейство конусов

$$\mathcal{F} = \big\{\mathrm{cone}\big(\mathrm{relint}(F)\big) \mid F \in \mathcal{F}_K\big\}$$

является «непрерывно-дискретным» веером $\mathbb{R}^n$. Ясно, что можно было бы начинать непосредственно с С-вееров, а не с С-многогранников. Тем не менее на данном этапе развития теории представляется наиболее естественным исследовать в деталях большое число важных мотивирующих примеров, поэтому мы сосредоточимся на выпуклых телах, уделяя особое внимание $\lozenge^n_{\mathbb{K}}$.

3.3. Ортогональность и двойственность

Предположим, что X и Y — два векторных пространства (левых модуля) над $\mathbb{K}$, и пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times Y \to \mathbb{K}$ — невырожденная билинейная форма, наличие которой позволит нам говорить об ортогональности векторов и множеств X и Y. Можно начать с двух С-тел $A \subset X$ и $B \subset Y$, которым соответствуют A- и B-матроиды, и попытаться развить естественную двойственность между этими двумя объектами.

Мы опять отступим от максимальной общности и рассмотрим в деталях важный частный случай выпуклого тела $\lozenge^n_{\mathbb{K}}$. Наша цель состоит в том, чтобы ввести отношение ортогональности для соответствующих знаковых векторов, которое должно привести нас к понятию двойственности $\mathbb{K}$-матроидов.

Обозначим через $\langle x, y\rangle = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$ стандартную эрмитову форму на $\mathbb{K}^n$.

Определение 3.4. Будем говорить, что два знаковых вектора $a, b \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}} = \mathcal{F}_{\lozenge^n_{\mathbb{K}}}$ ортогональны (обозначение $a \perp b$), если существуют векторы $x, y \in \mathbb{K}^n$, такие что $a = \nu(x)$, $b = \nu(y)$ и $\langle x, y\rangle = 0$. Для заданного подмножества $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ положим

$$\mathcal{M}^{\perp} := \{b \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}} \mid a \perp b \text{ для всех } a \in \mathcal{M}\}.$$

Следующее утверждение о согласованности геометрической двойственности и двойственности матроидов обнадёживает и показывает перспективность разработки теории непрерывных, комплексных и кватернионных матроидов. Для простоты $\mathbb{K}$-матроид $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(V)$ векторного пространства V будем обозначать через $\mathcal{M}(V)$.

Предложение 3.5. $\mathcal{M}(V^\perp) = \mathcal{M}(V)^\perp$.

Доказательство. Если $b \in \mathcal{M}(V^\perp)$, то $b = \nu(y)$ для подходящего $y \in V^\perp$. Тогда $y \perp x$ для любого $x \in V$ и $b \perp a$ для любого $a \in \mathcal{M}(V)$, откуда следует, что $b \in \mathcal{M}(V)^\perp$, и поэтому имеет место включение $\mathcal{M}(V^\perp) \subset \mathcal{M}(V)^\perp$.

Обратное включение $\mathcal{M}(V^\perp) \supset \mathcal{M}(V)^\perp$ докажем от противного. Предположим, что $b \notin \mathcal{M}(V^\perp)$. Тогда b соответствует грани F_b кросcполитопа $\lozenge^n_{\mathbb{K}}$, и для любого $x \in \operatorname{relint}(F_b)$ выполняется $x \notin V^\perp$, т. е.

$$\operatorname{relint}(F_b) \cap V^\perp = \varnothing.$$

По принципу отделимости для выпуклых множеств существует вектор $u \in \mathbb{K}^n$, для которого

1) $\operatorname{Re}\langle z, u\rangle > 0$ для любого $z \in \operatorname{relint}(F_b)$;
2) $\operatorname{Re}\langle z, u\rangle = 0$ для любого $z \in V^\perp$.

Поскольку $V^\perp$ является левым $\mathbb{K}$-модулем, из 2) следует, что $\operatorname{Re}\langle z, \alpha u\rangle = 0$ для любого $\alpha \in \mathbb{K}$, откуда получаем

$2^\sharp$) $\langle z, u\rangle = 0$ для любого $z \in V^\perp$.

Отсюда получаем, что $u \in V$. Положим $a = \nu(u)$. Тогда $a \in \mathcal{M}(V)$, и из 1) следует, что $b \not\perp a$, откуда получаем, что $b \notin \mathcal{M}(V)^\perp$. $\square$

4. Грассмановы частично упорядоченные множества

Непрерывные частично упорядоченные множества (см. [16, 19, 24], вероятно, являются одним из наиболее полезных и широко применяемых примеров непрерывных аналогов дискретных структур. Важным примером здесь служит так называемое *грассманово частично упорядоченное множество*. Порядковый комплекс («флаг-джойн» конструкция), а также многие другие примеры и связанные результаты читатель сможет найти в [16, 19, 24].

Определение 4.1. Грассмановым частично упорядоченным множеством $\mathcal{G}_n(\mathbb{R}) = (G(\mathbb{R}^n), \subseteq)$ будем называть несвязное объединение

$$G(\mathbb{R}^n) := \coprod_{i=0}^{n} G_i(\mathbb{R}^n),$$

где $G_i(\mathbb{R}^n)$ — многообразие всех i-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Порядок определяется включением, т. е. $U \leqslant V$ тогда и только тогда, когда $U \subseteq V$.

Минимальный и максимальный элементы будем обозначать соответственно через $\hat{0}$ и $\hat{1}$. Также будем рассматривать отображение $\rho\colon \mathcal{G}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{N}$, $L \mapsto \dim(L)$. Усечённым грассмановым частично упорядоченным множеством будем называть

$$\tilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{R}) := \mathcal{G}_n(\mathbb{R}) \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}.$$

Пусть $I \subset \tilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{R})$ — некоторый замкнутый порядковый идеал. Порядковый комплекс $\Delta(I)$ (см. [16, 24]) определяется как подпространство джойна

$$G_1(\mathbb{R}^n) * G_2(\mathbb{R}^n) * \ldots * G_{n-1}(\mathbb{R}^n),$$

порождённое всеми флагами из I.

Замечание 4.2. Замечательный факт (см. [16, 19, 24]) состоит в том, что порядковый комплекс усечённого грассманиана $\tilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{R})$ является сферой размерности $\binom{n}{2} + n - 2$,

$$\Delta\big(\tilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{R})\big) \cong S^{\binom{n}{2}+n-2}. \tag{7}$$

В качестве немедленного следствия получаем, что

$$\Delta\big(\hat{\mathcal{G}}_n(\mathbb{R})\big) \cong D^{\binom{n}{2}+n-1} \tag{8}$$

является диском размерности $\binom{n}{2} + n - 1$, где $\hat{\mathcal{G}}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{G}_n(\mathbb{R}) \setminus \{\hat{0}\}$.

Определение 4.3. Пусть $I \subset \tilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{R})$ — замкнутый порядковый идеал в грассманиане, и пусть $I_k = I \cap G_k(\mathbb{R}^n)$. Тогда вектор

$$\chi(I) = \big(\chi_1(I), \chi_2(I), \ldots, \chi_n(I)\big),$$

где $\chi_k(I) = \chi(I_k)$, будем называть χ-вектором идеала I.

4.1. Грассмановы частично упорядоченные множества и проблема Джан-Карло Роты

Определение 4.4. Пусть P — топологическое частично упорядоченное множество, на котором задана (ранговая) функция $\rho\colon P \to \mathbb{N}$. Под P-комплексом будем понимать порядковый идеал I в P. Пусть I_m — множество всех элементов идеала I ранга $m \in \mathbb{N}$. Для P-комплекса I будем называть

$$\chi_P(I) := (\chi(I_0), \chi(I_1), \ldots, \chi(I_m), \ldots)$$

χ-вектором. Здесь через $\chi(X)$ обозначается эйлерова характеристика X.

Например, если P является симплексом, то I — симплициальный комплекс, а $\chi_P(I)$ — обычный f-вектор I. В этом случае имеется хорошо известное соотношение

$$\chi\big(\Delta(I)\big) = f_0 - f_1 + f_2 - \ldots . \tag{9}$$

Дж.-К. Рота на совместной конференции Американского математического общества и Мексиканского математического общества (Оахака, Мексика, декабрь 1997) сделал доклад с любопытным, несколько провокационным названием «Десять математических проблем, которые я никогда не решу»[1]; доклад опубликован в [12].

Седьмая проблема (о объёмах семейств подпространств) из его списка в нашей терминологии состоит в построении теории конечно аддитивной $O(n, \mathbb{R})$-инвариантной меры на классе замкнутых порядковых идеалов грассманова частично упорядоченного множества $\mathcal{G}_n(\mathbb{R})$.

Дж.-К. Рота опирался на аналогию с (простой и хорошо разработанной) теорией S_n-инвариантных мер на классе порядковых идеалов частично упорядоченных подмножеств в подмножествах множества $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. В этом случае порядковые идеалы являются не чем иным, как симплициальными комплексами с вершинами из $[n]$. Дж.-К. Рота связывает известную формулу

$$\chi(K) = f_0(K) - f_1(K) + f_2(K) + \ldots + (-1)^n f_n(K) \tag{10}$$

с тем фактом, что эйлерова характеристика χ является единственной S_n-инвариантной конечно аддитивной мерой на симплициальных комплексах.

Дж.-К. Рота закончил обсуждение седьмой проблемы следующим образом: «В настоящий момент мы не можем получить даже эйлерову характеристику», иными словами, он указал на следующий частный случай седьмой проблемы.

Проблема 4.5. Найти аналог формулы (10) для класса замкнутых порядковых идеалов в $\mathcal{G}_n(\mathbb{R})$.

Читатель, знакомый с результатами В. А. Васильева [16, 18] о структуре порядкового комплекса грассманова частично упорядоченного множества (см. замечание 4.2), немедленно увидит, что эти результаты дают ключевую идею для решения проблемы 4.5.

Следующее утверждение из представленной на конференции «Котор-98» неопубликованной работы [25] даёт ответ на проблему 4.5.

Теорема 4.6. *Пусть $I \subset \tilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{R})$ — замкнутый порядковый идеал в усечённом грассмановом частично упорядоченном множестве $\tilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{R})$, и пусть $\chi(I) = (\chi_1(I), \chi_2(I), \ldots)$ — соответствующий χ-вектор в смысле определения* 4.3. *Тогда*

$$\chi\big(\Delta(I)\big) = \chi_1(I) + \chi_2(I) - \chi_3(I) - \chi_4(I) + \ldots + (\sqrt{-1})^{n^2+n+2}\chi_n(I). \tag{11}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.7. Если $I_{\leqslant k} = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k$, то $\Delta\big(I_{\leqslant k}\big) \subset \Delta(I)$, и тогда определена возрастающая фильтрация

$$\Delta\big(I_{\leqslant 1}\big) \subset \Delta\big(I_{\leqslant 2}\big) \subset \ldots \subset \Delta\big(I_{\leqslant k}\big) \subset \ldots \subset \Delta\big(I_{\leqslant n-1}\big) = \Delta(I). \tag{12}$$

[1] Дж.-К. Рота скончался 18 апреля 1999 года, так что название доклада в ретроспективе имеет ещё и пессимистический оттенок.

Теперь заметим, что $\Delta\big(I_{\leqslant k}\big)/\Delta\big(I_{\leqslant k-1}\big) \cong \mathrm{Thom}(U_k)$ является пространством Тома векторного расслоения U_k размерности $c_k\binom{k}{2}+k-1$ над I_k. В самом деле, имеет место теоретико-множественное разложение

$$\Delta\big(I_{\leqslant k}\big) \setminus \Delta\big(I_{\leqslant k-1}\big) = \biguplus_{V\in I_k} \Delta\big(\hat{\mathcal{G}}(V)\big) \setminus \Delta\big(\tilde{\mathcal{G}}(V)\big), \tag{13}$$

где $\hat{\mathcal{G}}(V)$ и $\tilde{\mathcal{G}}(V)$ соответственно изоморфны $\hat{\mathcal{G}}_k(\mathbb{R})$ и $\tilde{\mathcal{G}}_k(\mathbb{R})$ (описаны в замечании 4.2). Эти изоморфизмы задаются локально определёнными изоморфизмами $V \cong \mathbb{R}^k$ (они возникают из локальных тривиализаций канонического расслоения k-мерных плоскостей над грассманианом $G_k(\mathbb{R})$). С учётом замечания 4.2 легко заметить, что $\Delta\big(\hat{\mathcal{G}}(V)\big) \setminus \Delta\big(\tilde{\mathcal{G}}(V)\big)$ является открытым диском размерности $c_k = \binom{k}{2} + k - 1$. Более того, более внимательный анализ показывает, что (13) является пространством расслоения c_k-мерных плоскостей, ассоциированным с расслоением k-мерных плоскостей над I_k, индуцированным каноническим расслоением k-мерных плоскостей над $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Завершается доказательство так же, как и доказательство теоремы 2.7. □

5. Топологические частично упорядоченные множества

5.1. Разрешение особенностей P-сингулярных пространств

В цикле работ В. А. Васильева по геометрическому разрешению особенностей [1, 16—19] читатель может найти гибкий и мощный метод изучения топологии *пространств с особенностями* и их дополнений. Важная часть этой теории может быть переформулирована и обобщена на языке топологических порядковых комплексов.

Модельным примером сингулярного пространства может служить подпространство $X \subset \mathrm{Fun}(M, N)$ пространства отображений, где $f \in X$ тогда и только тогда, когда f вырожденная в некотором вполне определённом смысле. Наша идея состоит в изучении топологии пространства X посредством изучения пространства $\hat{X}$, полученного из X с помощью «разрешения особенностей». Этот подход обычно реализуется в рамках следующей (в чём-то неформальной) схемы.

1. X — пространство с особенностями, например пространство вырожденных матриц, многочленов с кратными нулями, сингулярных узлов, гладких функций с особенностями определённого вида и т. д.
2. Имеется иерархия *типов особенностей*, реализованная в виде топологического частично упорядоченного множества $(\mathcal{P}, \prec)$, где $p \prec p'$ означает, что особенность типа p' в некотором смысле сложнее особенности p.
3. Определено отображение $\Phi\colon X \to \mathcal{P}$, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие её тип особенности полунепрерывным образом, т. е. так,

что в пределе $x_n \longrightarrow x$ особенность может только усложняться (увеличиваться в $\mathcal{P}$).

4. Пространством $\mathcal{P}$-разрешения особенностей сингулярного пространства X является пространство
$$\hat{X} := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \Delta\big(\mathcal{P}_{\geqslant \Phi(x)}\big) \subset X \times \Delta(\mathcal{P}).$$
Ожидается, что вследствие полунепрерывности Φ пространство $\hat{X}$ является замкнутым подмножеством $X \times \Delta(\mathcal{P})$. Более того, предполагается, что естественная проекция $\pi\colon \hat{X} \to X$ имеет стягиваемые слои и поэтому при необременительных условиях оказывается гомотопической эквивалентностью.
5. Имеется глобальная фильтрация частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$ (например, заданная монотонной функцией ранга $\rho\colon \mathcal{P} \to \mathbb{Z}$). Эта фильтрация индуцирует фильтрацию $\hat{X}$, которая определяет спектральную последовательность, сходящуюся к (ко)гомологиям пространства X.

Эта схема представляется настолько фундаментальной, что само понятие сингулярного пространства, может быть, стоит определять, руководствуясь ею. Категория $\mathcal{P}$-сингулярных пространств $\mathrm{Sing}(\mathcal{P})$ является естественным инструментом для изучения как интересных $\mathcal{P}$-сингулярных пространств, так и самого топологического частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$ (объект $\mathrm{Sing}(\mathcal{P})$ можно понимать как своего рода модуль (пучок) над кольцом (пространством) $\mathcal{P}$).

Определение 5.1. Предположим, что P является топологическим частично упорядоченным множеством. Будем говорить, что на топологическом пространстве X задана структура P-сингулярного пространства, если задано отображение $\Phi\colon X \to P$, которое обладает (некоторыми или всеми) свойствами 1—5. Морфизм $X \dashrightarrow Y$ двух $\mathcal{P}$-сингулярных пространств — это отображение над $\mathcal{P}$ (т. е. коммутативная диаграмма), согласованное со всеми структурами, перечисленными в 1—5. В частности, определено отображение $\hat{f}\colon \hat{X} \to \hat{Y}$ соответствующих пространств разрешения $\mathcal{P}$-особенностей, согласованное с фильтрациями из 5, для которого коммутативна диаграмма
$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \longrightarrow & \hat{Y} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

Для категории $\mathrm{Sing}(\mathcal{P})$, описанной в определении 5.1, естественным образом определён функтор
$$S\colon \mathrm{Sing}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathrm{SpecSeq}$$
из категории $\mathcal{P}$-сингулярных пространств в категорию спектральных последовательностей. В этой общей постановке вопроса отметим, что полезно уметь строить простые тестовые объекты в $\mathrm{Sing}(\mathcal{P})$ и использовать функтор S, чтобы де-

тектировать (или описывать) конкретные (ко)гомологические классы (характеристические классы, например) рассматриваемых $\mathcal{P}$-сингулярных пространств.

5.2. Топологические формулы гомотопического дополнения

Один из важных принципов в [24] состоит в том, что идеи из дискретной комбинаторики, правильным образом интерпретированные и обобщённые, могут предоставлять в определённом смысле объединяющий подход в анализе топологических (непрерывных) частично упорядоченных множеств. В [24] основным примером результата такого типа о конечных (дискретных) частично упорядоченных множествах является так называемая теорема о гомотопическом дополнении А. Бьёрнера и Дж. Уокера [5].

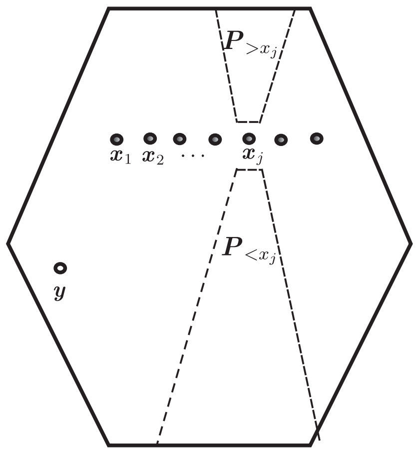

Рис. 2. Гомотопический тип $\Delta(P)/\Delta(P \setminus X)$

Предположим, что $X = \{x_j\}_{j=1}^m$ — антицепь в конечном частично упорядоченном множестве P (рис. 2). Сделанное в [5] важное наблюдение, приводящее к теореме о гомотопическом дополнении, состоит в том, что существует красивая и понятная формула, описывающая гомотопический тип фактора $\Delta(P)/\Delta(P \setminus X)$ порядковых комплексов. В самом деле, несложно показать, что

$$\Delta(P) \setminus \Delta(P \setminus X) \cong \biguplus_{1 \leqslant j \leqslant m} \mathrm{OpenCone}\Big(\Delta\big(P_{<x_j}\big) * \Delta\big(P_{>x_j}\big)\Big), \tag{14}$$

где открытый конус $\mathrm{OpenCone}(Z)$ с основанием Z определяется как $\mathrm{Cone}(Z) \setminus Z$. Переходя к одноточечным компактификациям в обеих частях (14), получаем

$$\Delta(P)/\Delta(P \setminus X) \simeq \bigvee_{1 \leqslant j \leqslant m} \Sigma\Big(\Delta\big(P_{<x_j}\big) * \Delta\big(P_{>x_j}\big)\Big). \tag{15}$$

А. Бьёрнер и Дж. Уокер в [5] заметили, что если $P\cup\big\{\hat{0},\hat{1}\big\}$ (P с добавленными максимумом и минимумом) является решёткой и если антицепь

$$X = Co(y) := \big\{x\in P \mid x\vee y=\hat{1},\ x\wedge y=\hat{0}\big\}$$

возникает как множество всех «дополнений» фиксированного элемента $y\in P$, то частично упорядоченное множество $P\setminus X$ стягиваемо. Тогда теорема о гомотопическом дополнении утверждает, что при этих условиях

$$\Delta(P)\simeq \bigvee_{1\leqslant j\leqslant m}\Sigma\Big(\Delta\big(P_{<x_j}\big)*\Delta\big(P_{>x_j}\big)\Big). \tag{16}$$

Применённая к (усечённой) решётке $\tilde{\Pi}_n=\Pi_n\setminus\big\{\hat{0},\hat{1}\big\}$ разбиений множества $[n]=\{1,\ldots,n\}$ [5], эта теорема приводит к рекуррентному соотношению (17), которое немедленно позволяет вычислить гомотопический тип рассматриваемого пространства в виде букета сфер:

$$\Delta(\tilde{\Pi}_n)\simeq\bigvee_{i=2}^{n}\Sigma\big(\Delta(\tilde{\Pi}^i_{n-1})\big), \tag{17}$$

$$\Delta\big(\tilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{R})\big)\simeq S^{n-1}\wedge\Sigma\Big(\Delta\big(\tilde{\mathcal{G}}_{n-1}(\mathbb{R})\big)\Big), \tag{18}$$

$$\Delta\big(\tilde{\mathcal{G}}^{\pm}_n(\mathbb{R})\big)\simeq(S^{n-1}\vee S^{n-1})\wedge\Sigma\Big(\Delta\big(\tilde{\mathcal{G}}^{\pm}_{n-1}(\mathbb{R})\big)\Big), \tag{19}$$

$$\Delta\big(\exp_n(S^1)\big)\simeq S^n\wedge\big(\Delta(\mathcal{B}_n)/\partial\Delta(\mathcal{B}_n)\big), \tag{20}$$

$$\Delta(\mathcal{P}_n)\simeq P_n\wedge\Sigma\big(\Delta(\mathcal{P}_{n-1})\big), \tag{21}$$

$$\Delta\big(\exp_n(X)\big)\simeq \mathrm{Thom}_n(X\setminus\{x_0\}). \tag{22}$$

Напомним, что $p\prec q$ в решётке Π_n всех (неупорядоченных) разбиений множества $[n]=\{1,\ldots,n\}$, если p является измельчением q.

В [24] было замечено, что подобные идеи могут быть применены к анализу гомотопического типа порядковых комплексов интересных топологических частично упорядоченных множеств. Формулы (18)—(22), иллюстрирующие это наблюдение, взяты из [24, раздел 2].

Чтобы установить связь формул (15)—16 с формулами (18)—(22), взглянем на рисунок 2. Теперь мы будем интерпретировать P как топологическое частично упорядоченное множество, так что антицепь X — это (не обязательно дискретное) топологическое пространство, а разложение (14) пространства $\Delta(P)\setminus\Delta(P\setminus X)$ — расслоение ξ над X.

Более того, пространство $\Delta(P)/\Delta(P\setminus X)$ описывается как «пространство Тома» (одноточечная компактификация) расслоения ξ (для точных формулировок см. предложение 4.8 и следствия 4.10—4.12 в [24]). Если это расслоение тривиально, то пространство Тома сводится к смеш-произведению, как показано в формуле (21), которая учитывает (18) и (19). Соотношение (18) может быть использовано для доказательства гомеоморфизма (7) (см. замечание 4.2).

Соотношение (19) используется для доказательства аналогичного результата о грассманиане ориентированных подпространств в $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что X — конечный CW-комплекс, и пусть $\exp_n(X)$ — топологическое частично упорядоченное множество всех его непустых подмножеств мощности, не превосходящей n (см. пример 3.3 в [24, раздел 3]). Для фиксированной отмеченной точки $x_0 \in X$ множество $\mathrm{Co}(\{x_0\})$ всевозможных дополнений $\{x_0\}$ в $\exp_n(X)$ совпадает с пространством $B(Y,n) = F(Y,n)/S_n$ всех неупорядоченных n-кортежей в $Y := X \setminus \{x_0\}$. Соответствующее векторное расслоение ξ является каноническим векторным расслоением

$$\mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow F(Y,n) \times_{S_n} V \longrightarrow B(Y,n),$$

где $V \cong \mathbb{R}^{n-1}$ — стандартное $(n-1)$-мерное представление группы S_n. Соответствующее пространство Тома является одноточечной компактификацией

$$\mathrm{Thom}_n(Y) := (F(Y,n) \times_{S_n} V) \cup \{\infty\}.$$

Следующее утверждение (см. [24, теорема 5.8]) даёт полное описание гомотопического типа конфигурационного частично упорядоченного пространства $\exp_n(X)$ в категории допустимых пространств (см. [24, определение 5.7.]), которая содержит все конечные CW-комплексы.

Теорема 5.2. *Предположим, что (X, x_0) — конечный CW-комплекс. Тогда*

$$\Delta\big(\exp_n(X)\big) \simeq \mathrm{Thom}_n(X \setminus \{x_0\}). \tag{23}$$

Это утверждение принимает очень простой вид для $X = S^1$. Тогда $Y = X \setminus \{x_0\} \cong \mathbb{R}^1$ и $B(Y,n)$ гомеоморфно внутренности n-мерного симплекса. В качестве следствия отсюда получается формула (20) (где $\mathcal{B}_n = \{I \subseteq [n] \mid I \neq \varnothing\}$), которая в итоге приводит к доказательству того, что $\Delta\big(\exp_n(S^1)\big) \cong S^{2n-1}$ (см. также [1, 17, 24]).

5.3. Пространства взвешенных барицентров и гипотеза Васильева

Следующая конструкция была определена В. А. Васильевым под названием *симплициальной резольвенты* конфигурационных пространств. Предположим, что гладкое компактное многообразие (или более общо — конечный CW-комплекс) X некоторым типичным способом погружено в $\mathbb{R}^N$ очень большой размерности N. Пусть $\mathrm{Conv}_r(X)$ — объединение всех замкнутых $(r-1)$-мерных симплексов с вершинами в погружённом X. Типичность погружения означает, что два симплекса $\mathrm{conv}(A)$ и $\mathrm{conv}(B)$ с вершинами в различных множествах $A \neq B$ имеют непересекающиеся внутренности. Пространство $\mathrm{Conv}_r(X)$ называется *r-й типичной выпуклой оболочкой X*.

В следующем утверждении для удобства ссылок содержится относительно несложный факт, что порядковый комплекс $\Delta\big(\exp_n(X)\big)$ можно рассматривать как барицентрическое подразбиение n-й типичной выпуклой оболочки X. Отметим, что $\mathrm{Conv}_r(X)$ можно рассматривать как «непрерывный симплициальный комплекс», у которого вершины содержатся в X.

Предложение 5.3 [24, раздел 5.2]. *Предположим, что X — конечный CW-комплекс. Тогда имеет место естественный гомеоморфизм*

$$\mathrm{Conv}_n(X) \longrightarrow \Delta\bigl(\exp_n(X)\bigr) \tag{24}$$

n-й типичной выпуклой оболочки X и порядкового комплекса соответствующего конфигурационного частично упорядоченного множества $\exp_n(X)$.

Следующая гипотеза о связи порядкового комплекса $\exp_n(X)$ и n-кратного итерированного джойна X^{*n} пространства X была сформулирована В. А. Васильевым на конференции «Геометрическая комбинаторика» (Математический научно-исследовательский институт MSRI, Беркли, февраль 1997):

$$\Delta\bigl(\exp_n(X)\bigr) \simeq X * \ldots * X \cong X^{*n}. \tag{25}$$

Известно, что гипотеза (25) верна для $X = S^1$, и уже этот случай играет важную роль в приложениях.

«Теория» топологических частично упорядоченных множеств, разработанная в [24], изначально была мотивирована этой гипотезой. В качестве следствия теоремы 5.2 было показано, что $\exp_n(S^2)$ не имеет гомотопического типа сферы при $n \geqslant 2$, в частности

$$\Delta\bigl(\exp_n(S^2)\bigr) \not\simeq (S^2)^{*n},$$

откуда следует, что гипотеза Васильева неверна уже для двумерной сферы (см. [24, утверждение 5.10]).

Хотя этот пример показывает, что общий ответ на гипотезу (25) отрицательный, тем не менее в этом направлении получены важные и интересные результаты. А именно, С. Каллел и Р. Каруи, опираясь на некоторые вопросы нелинейного анализа, начали в [8] изучение пространства $\mathrm{Conv}_n(X)$ с несколько иной точки зрения. Они использовали другое описание этого пространства, а именно как пространства $\mathcal{B}_n(X)$ всех *взвешенных барицентров* n или менее точек X (что совпадает с пространством вероятностных мер на X с носителем конечной мощности, не превосходящей n). Авторам было известно, что это пространство использовалось В. А. Васильевым, но они не были знакомы с работой [24], в частности, не была известна исходная гипотеза Васильева. Поэтому интересно, что один из их основных результатов представляет гипотезу Васильева в новом свете.

Теорема 5.4 [8, теорема 1.1.]. *Пусть X — конечный связный CW-комплекс, и пусть $\mathrm{Sym}^{*n}(X) := X^{*n}/S_n$ — симметрический n-кратный джойн X. Тогда*

$$\mathcal{B}_n(X) \simeq \mathrm{Sym}^{*n}(X). \tag{26}$$

С учётом гомеоморфизма $\Delta\bigl(\exp_n(X)\bigr) \simeq \mathcal{B}_n(X)$ (предложение 5.3), сравнивая (25) и (26), получаем, что В. А. Васильев был прав, предполагая, что гомотопический тип n-й типичной выпуклой оболочки X тесно связан с итерированными джойнами пространства X.

С. Каллел и Р. Каруи получили в [8] несколько других интересных результатов о пространствах взвешенных барицентров. В частности, они получили формулу для выражения $\mathcal{B}_n(X)$ через симметрическое смеш-произведение.

Теорема 5.5 [8, теорема 5.3].

$$\mathcal{B}_n(X) \simeq S^{n-1} \wedge_{S_n} X^{(n)}.$$

В качестве следствия отсюда легко вывести изящный результат И. Джеймса, Э. Томаса, Х. Тоды и Дж. Г. К. Уайтхеда:

$$\mathcal{B}_2(S^n) \simeq \Sigma^{n+1}(\mathbb{R}P^n). \tag{27}$$

Неудивительно, что теорема 5.2 столь же эффективно и элегантно применима к вычислениям в этих примерах. В самом деле, $\Delta\big(\exp_2(S^n)\big)$ имеет тот же гомотопический тип, что и одноточечная компактификация

$$F(\mathbb{R}^n, 2) \times_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times (S^{n-1} \times_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{R}^1).$$

Пусть $Z^+ = Z \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация локально компактного пространства Z. Поскольку $(U \times V)^+ \cong U^+ \wedge V^+$ и $(S^{n-1} \times_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{R}^1)^+ \cong \mathbb{R}P^n$, мы немедленно получаем, что

$$\mathcal{B}_2(S^n) \cong \Delta\big(\exp_2(S^n)\big) \simeq S^{n+1} \wedge \mathbb{R}P^n \cong \Sigma^{n+1}(\mathbb{R}P^n).$$

Аналогичные рассуждения, основанные на применении теоремы 5.2, могут быть проведены для доказательства гомотопической эквивалентности

$$\Delta\big(\exp_n(X)\big) \simeq S^{n-1} \wedge_{S_n} X^{(n)}.$$

6. Гомотопические копределы и неравенство между индексами

Вероятно, гомотопические копределы в рамках комбинаторного подхода впервые были применены в [22] для вычисления (стабильного) гомотопического типа конфигураций пространств и их дополнений. За этой работой последовали [20] и [24], и в наши дни диаграммы пространств и их гомотопические копределы используются всё чаще в геометрической и топологической комбинаторике. Читателю, настроенному на более комбинаторный способ мышления, рекомендуем книгу [9, гл. 15].

С формальной точки зрения диаграмма пространств над конечным частично упорядоченным множеством P — это функтор $\mathcal{D}\colon P \to \mathrm{Top}$ из категории P в категорию топологических пространств. Это формальное определение в точности означает, что диаграмма над P — это частично упорядоченное множество P, причём с каждым элементом $p \in P$ ассоциировано пространство D_p и для каждой пары $p \leqslant q \in P$ задано отображение $d_{pq}\colon D_p \to D_q$, удовлетворяющее естественным условиям согласованности:

$$d_{pp} = \mathbf{1}_{D_p} \quad \text{для любого} \quad p \in P,$$
$$d_{pq} \circ d_{qr} = d_{pr} \quad \text{для любой тройки} \quad p \leqslant q \leqslant r.$$

Каждой диаграмме можно поставить в соответствие топологическое частично упорядоченное множество $P_{\mathcal{D}}$, где $P_{\mathcal{D}} = \coprod_{p\in P} D_p$ — несвязное объединение всех пространств D_p (элементами $P_{\mathcal{D}}$ служат пары (p, x), где $x \in D_p$) и $(p, x) \prec (q, y)$ тогда и только тогда, когда $p \leqslant q$ и $d_{pq}(y) = x$. Эта точка зрения представляется в достаточной степени естественной в силу соотношения

$$\operatorname{hocolim}(\mathcal{D}) \cong \Delta(P_{\mathcal{D}}), \tag{28}$$

которое означает, что гомотопический копредел диаграммы пространств сводится к порядковому комплексу топологического частично упорядоченного множества.

«Неравенство Саркарьи», сформулированное и доказанное в [23], является одним из центральных результатов, используемых в комбинаторных приложениях эквивариантной теории индекса. Рекомендуем читателю книгу [11, гл. 5], в которой обсуждаются эта и некоторые другие связанные темы с многочисленными приложениями в топологической комбинаторике. Напомним, что индекс $\operatorname{Ind}_G(X)$ произвольного G-пространства X — это в некотором смысле мера сложности пространства X, которая может быть использована для доказательства утверждений типа Борсука—Улама. Например, классическая теорема Борсука—Улама следует из того факта, что $\operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^n) = n > \operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^{n-1}) = n - 1$.

В общем случае для заданной последовательности $\mathcal{A} = \{A_nG\}_{n=0}^{+\infty}$, состоящей из G-пространств, соответствующий $\mathcal{A}$-индекс определяется формулой

$$\operatorname{Ind}_G^{\mathcal{A}}(X) := \operatorname{Ind}\bigl\{n \in \mathbb{N} \mid X \xrightarrow{G} A_nG\bigr\}, \tag{29}$$

где $X \xrightarrow{G} Y$ означает, что существует G-эквивариантное отображение X в Y.

Предложение 6.1 (неравенство Саркарьи). *Пусть G — конечная группа, $\mathcal{A} = \{A_nG\}_{n=0}^{+\infty}$ — последовательность G-пространств, такая что*

$$A_pG * A_qG \xrightarrow{G} A_{p+q+1}G$$

для всех p и q. Предположим, что L_0 — конечный симплициальный G-комплекс, и пусть $L \subset L_0$ — G-инвариантный подкомплекс. Тогда имеет место неравенство

$$\operatorname{Ind}_G^{\mathcal{A}}(L) \geqslant \operatorname{Ind}_G^{\mathcal{A}}(L_0) - \operatorname{Ind}_G^{\mathcal{A}}\bigl(\Delta(L_0 \setminus L)\bigr) - 1, \tag{30}$$

где $\Delta(L_0 \setminus L)$ — порядковый комплекс частично упорядоченного множества $(L_0 \setminus L, \subset)$.

Доказательство предложения 6.1] аналогично доказательству, приведённому в [11, раздел 5.7] (и в исходной работе [23]), поэтому мы оставляем восстановление подробностей заинтересованному читателю.

Читатель, знакомый с деталями доказательства предложения 6.1, обобщение на случай топологических частично упорядоченных множеств воспримет как естественный шаг. Мы снова оставляем подробности доказательства читателю; применениям этого обобщения неравенства Саркарьи будет посвящена другая работа.

Предложение 6.2. *Пусть G — конечная группа, и пусть $\mathcal{A} = \{A_nG\}_{n=0}^{+\infty}$ — последовательность G-пространств, такая что $A_pG * A_qG \xrightarrow{G} A_{p+q+1}G$ для всех p и q. Предположим, что P — конечное (не обязательно свободное) частично упорядоченное G-множество, а $P_0 \subset P$ — начальное G-инвариантное подмножество. Положим $P_1 = P \setminus P_0$. Также предположим, что $\mathcal{D}\colon P \to \mathrm{Top}$ является диаграммой G-пространств с G-действием на $\mathcal{D}$, согласованным с G-действием на P. Обозначим через $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{D}_1$ соответственно ограничения $\mathcal{D}$ на P_0 и P_1. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_G^{\mathcal{A}}(\|\mathcal{D}_0\|) \geqslant \mathrm{Ind}_G^{\mathcal{A}}(\|\mathcal{D}\|) - \mathrm{Ind}_G^{\mathcal{A}}(\|\mathcal{D}_1\|) - 1, \tag{31}$$

где через $\|\mathcal{E}\| = \mathrm{hocolim}(\mathcal{E})$ обозначается гомотопический копредел диаграммы $\mathcal{E}$.

Автор благодарит рецензента за замечания и комментарии, которые помогли улучшить изложение результатов статьи.

Литература

[1] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. — М.: Фазис, 1997. — (Библиотека математика, вып. 3).

[2] Кнут Д., Грэхем Р., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. — М.: Вильямс, 2009.

[3] Anderson L., Delucchi E. Foundations for a theory of complex matroids // Discrete Comput. Geom. — 2012. — Vol. 48. — P. 807—846. — `arXiv:1005.3560v2[math.CO]`.

[4] Bahri A., Coron J. M. On a non-linear elliptic equation involving the critical sobolev exponent: the effect of the topology of the domain // Comm. Pure Appl. Math. — 1988. — Vol. 41. — P. 253—294.

[5] Björner A., Walker J. W. A homotopy complementation formula for partially ordered sets // Europ. J. Combin. — 1983. — Vol. 4. — P. 11—19.

[6] Jojić D., Vrećica S., Živaljević R. Symmetric multiple chessboard complexes and a new theorem of Tverberg type // J. Algebraic Combin. — 2017. — Vol. 46, no. 1. — P. 15—31. — `arXiv:1502.05290v2[math.CO]`.

[7] Kalai G., Wigderson A. Neighborly embedded manifolds // Discrete Comput. Geom. — 2008. — Vol. 40, no. 3. — P. 319—324.

[8] Kallel S., Karoui R. Symmetric joins and weighted barycenters // Adv. Nonlinear Stud. — 2011. — Vol. 11. — P. 117—143. — arXiv:math/0602283v3[math.AT].

[9] Kozlov D. Combinatorial Algebraic Topology. — Berlin: Springer, 2008. — (Algorithms Comput. Math.; Vol. 21).

[10] Klain D. A., Rota G.-C. Introduction to Geometric Probability. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. — (Lezioni Lincee).

[11] Matoušek J. Using the Borsuk-Ulam Theorem. — Berlin: Springer, 2003. — (Lect. Topol. Methods Combin. Geom.).

[12] Rota G.-C. Ten Mathematics Problems I will never solve // Mitteil. Deutsch. Math.-Verein. — 1998. — Vol. 6, no. 2. — P. 45—52.

[13] Schneider R. On steiner points of convex bodies // Israel J. Math. — 1971. — Vol. 9. — P. 241—249.

[14] Schneider R. Boundary structure and curvature of convex bodies // Contributions to Geometry: Proc. of the Geometry-Symposium held in Singen June 28, 1979 to July 1, 1978 / J. Tölke, Wills J. M., eds. — Berlin: Springer, 1979. — P. 15—59.

[15] Rockafellar R. T. Convex Analysis. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1972.

[16] Vassiliev V. A. Geometric realization of the homology of classical Lie groups and complexes, S-dual to flag manifolds // St.-Petersburg Math. J. — 1991. — Vol. 3, no. 4. — P. 108—115.

[17] Vassiliev V. A. Complements of Discriminants of Smooth Maps: Topology and Applications. Revised Edition. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992. — (Transl. Math. Monographs; Vol. 98).

[18] Vassiliev V. A. Invariants of knots and complements of discriminats // Developments in Mathematics, the Moscow School / V. I. Arnold, M. Monastyrsky, eds. — Chapman & Hall, 1993. — P. 194—250.

[19] Vassiliev V. A. Topological order complexes and resolutions of discriminant sets // Publ. Inst. Math. — 1999. — Vol. 66 (80). — P. 165—185.

[20] Welker V., Ziegler G. M., Živaljević R. T. Homotopy colimits—comparison lemmas for combinatorial applications // J. Reine Angew. Math. — 1999. — Vol. 509. — P. 117—149.

[21] Ziegler G. M. Lectures on Polytopes. — Berlin: Springer, 1995. — (Grad. Texts Math.; Vol. 152).

[22] Ziegler G. M., Živaljević R. T. Homotopy types of subspace arrangements via diagrams of spaces // Math. Ann. — 1993. — Vol. 295. — P. 527—548.

[Ži89] Živaljević R. T. Extremal Minkowski additive selections of compact convex sets // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 105. — P. 697—700.

[23] Živaljević R. User's guide to equivariant methods in combinatorics, I and II // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.). — 1996. — Vol. 59 (73). — P. 114—130; 1998. — Vol. 64 (78). — P. 107—132.

[24] Živaljević R. T. Combinatorics of topological posets: Homotopy complementation formulas // Adv. Appl. Math. — 1998. — Vol. 21, no. 4. — P. 547—574.

[25] Živaljević R. T. Combinatorics of topological posets: Lecture on the conference "Geometric Combinatorics," Satellite Conf. of the Internat. Congress of Mathematics in Berlin 1998; Kotor, Yugoslavia, 28.8 — 3.9.1998. — http://poincare.matf.bg.ac.rs/konferencije/satellite/.

[26] Živaljević R. T. Complex and quaternionic relatives of oriented matroids. — Unpublished manuscript.