Гармоническое разложение циклических гомологий

М. КАРУБИ
Университет Париж 7,
Математический институт Жюссье, Франция
e-mail: max.karoubi@gmail.com

УДК 512.664.2

Ключевые слова: циклические гомологии, гомологии Хохшильда, гармоническое разложение.

Аннотация

Й. Кунц и Д. Квиллен показали, что в характеристике 0 ядро квадрата «некоммутативного лапласиана» на хохшильдовом и циклическом комплексе содержит значимую гомологическую информацию. В этой заметке мы показываем, что аналогичное свойство выполняется для ядра лапласиана в полной аналогии с классическим результатом из дифференциальной геометрии. Опираясь на те же идеи, мы определяем некоторые новые варианты гомологий Хохшильда и циклических гомологий и показываем, что они совпадают с классическими в случае нулевой характеристики.

Abstract

M. Karoubi, The harmonic decomposition in cyclic homology, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 6, pp. 165—170.

It has been shown by Cuntz and Quillen that in characteristic 0 the kernel of the square of the “noncommutative Laplacian” on the Hochschild and cyclic complexes contains the relevant homology information. In this note, we show that the same property holds for the plain kernel of this Laplacian, as in differential geometry. Using the same ideas, we define a variant of Hochschild homology and cyclic homology and show that we recover the classical definitions in characteristic 0.

1. Гомологии Хохшильда

Рассмотрим произвольную k-алгебру A с единицей, где k — некоторое кольцо с единицей. Классические гомологии Хохшильда $\mathrm{HH}_n(A)$ изоморфны гомологиям комплекса

$$\ldots \xrightarrow{b} \Omega^n(A) \xrightarrow{b} \ldots \xrightarrow{b} \Omega^1(A) \xrightarrow{b} \Omega^0(A) \longrightarrow 0,$$

где $\Omega^*(A) = \bigoplus\limits_n \Omega^n(A)$ — алгебра некоммутативных дифференциальных форм на алгебре A (см. [2, 3]). Оператор $b\colon \Omega^n(A) \to \Omega^{n-1}(A)$ определяется формулой

$$b(\omega.dx) = (-1)^{n-1}(\omega.x - x.\omega).$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 6, с. 165—170.

В [3] был введён оператор

$$\boldsymbol{\kappa}\colon \Omega^*(A) \to \Omega^*(A);$$

он задаётся формулой $\boldsymbol{\kappa}(\omega.dx) = (-1)^{n-1}dx.\omega$ на элементах степени $n > 0$ и $\boldsymbol{\kappa} = 1$ на элементах нулевой степени 0. В работах, на которые мы ссылаемся выше, показано, что оператор $\boldsymbol{\kappa}$ связан с двумя дифференциалами d и b соотношением

$$db + bd = 1 - \boldsymbol{\kappa}.$$

Из него, в частности, следует, что $\boldsymbol{\kappa}$ коммутирует с d и с b. Оператор $1 - \boldsymbol{\kappa}$ называется некоммутативным лапласианом (см. [2]), при этом b играет роль сопряжённого к d.

Теперь мы определим некоторую версию гомологий Хохшильда как гомологии фактор-комплекса

$$\ldots \xrightarrow{b} \Omega^n(A)/(1-\boldsymbol{\kappa}) \xrightarrow{b} \ldots \xrightarrow{b} \Omega^1(A)/(1-\boldsymbol{\kappa}) \xrightarrow{b} \Omega^0(A)/(1-\boldsymbol{\kappa}) \longrightarrow 0.$$

Будем обозначать эти гомологии через ${}_{\boldsymbol{\kappa}}\mathrm{HH}_*(A)$. Легко заметить, что имеется канонический гомоморфизм

$$\varphi_n\colon \mathrm{HH}_n(A) \longrightarrow {}_{\boldsymbol{\kappa}}\mathrm{HH}_n(A).$$

Теорема 1.1. *Гомоморфизм φ_n является изоморфизмом при $n = 0$ и $n = 1$. Кроме того, если n обратимо в поле k, то φ_n является изоморфизмом.*

Доказательство. Утверждение очевидно при $n = 0$ and $n = 1$. Рассмотрим случай $n > 1$. Как и в [3, с. 30], рассмотрим фактор $\bar{\Omega}^n(A)$ модуля $\Omega^n(A)$ по k-подмодулю $\operatorname{Im} b + \operatorname{Im}(1-\boldsymbol{\kappa})$. Инъективность φ_n эквивалентна инъективности композиции

$$\mathrm{HH}_n(A) \hookrightarrow \Omega^n(A)/\operatorname{Im} b \longrightarrow \Omega^n(A)/[\operatorname{Im} b + \operatorname{Im}(1-\boldsymbol{\kappa})] = \bar{\Omega}^n(A).$$

Рассуждения в [3] основаны на наблюдении, что $\boldsymbol{\kappa}$ действует как образующая циклической группы порядка n на фактор-пространстве $\Omega^n(A)/\operatorname{Im} b$. Поскольку $\boldsymbol{\kappa}$ гомотопно 1 в b-комплексе, группа $\mathrm{HH}_n(A)$ вкладывается в инвариантную часть $\Omega^n(A)/\operatorname{Im} b$ относительно действия $\boldsymbol{\kappa}$. Ввиду обратимости n в поле k инвариантное подпространство оказывается изоморфным посредством отображения факториации ко инвариантной части $\bar{\Omega}^n(A)$.

Покажем сюръективность φ_n. На образе $\operatorname{Im} b\colon \Omega^n(A)/\operatorname{Im} b \to \Omega^{n-1}(A)$ отображение $\boldsymbol{\kappa}$ действует как образующая циклической группы n-го порядка, так как b коммутирует с $\boldsymbol{\kappa}$ (см. [3, с. 30]). Пусть ω — это такой элемент $\Omega^n(A)/\operatorname{Im} b$, что $b(\omega) = (1-\boldsymbol{\kappa})(\theta)$. Выберем многочлены $f(\boldsymbol{\kappa})$ и $g(\boldsymbol{\kappa})$ с рациональными коэффициентами, у которых знаменатели равны n, так, чтобы выполнялось равенство

$$f(\boldsymbol{\kappa})(1-\boldsymbol{\kappa}) + g(\boldsymbol{\kappa})(1 + \boldsymbol{\kappa} + \cdots + \boldsymbol{\kappa}^{n-1}) = 1$$

на каждой из двух групп $\Omega^n(A)/\operatorname{Im} b$ и $b(\Omega^n(A)) \subset \Omega^{n-1}(A)$. В качестве таких многочленов можно взять, например,

$$f(\boldsymbol{\kappa}) = -\frac{1}{n}(1 + 2\boldsymbol{\kappa} + 3\boldsymbol{\kappa}^2 + \cdots + n\boldsymbol{\kappa}^{n-1}), \quad g(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{n};$$

для них соотношение

$$-\frac{1}{n}(1-\boldsymbol{\kappa})(1+2\boldsymbol{\kappa}+3\boldsymbol{\kappa}^2+\cdots+n\boldsymbol{\kappa}^{n-1})+\frac{1}{n}(1+\boldsymbol{\kappa}+\cdots+\boldsymbol{\kappa}^{n-1})=1$$

проверяется непосредственно. Следовательно,

$$\omega=f(\boldsymbol{\kappa})(1-\boldsymbol{\kappa})(\omega)+g(\boldsymbol{\kappa})(1+\boldsymbol{\kappa}+\cdots+\boldsymbol{\kappa}^{n-1})(\omega),$$

и тогда

$$b(\omega)=b(1-\boldsymbol{\kappa})f(\boldsymbol{\kappa})(\omega)+g(\boldsymbol{\kappa})(1+\boldsymbol{\kappa}+\cdots+\boldsymbol{\kappa}^{n-1})(1-\boldsymbol{\kappa})(\theta)=b(1-\boldsymbol{\kappa})f(\boldsymbol{\kappa})(\omega).$$

Заметим, что для $\omega'=\omega-(1-\boldsymbol{\kappa})f(\boldsymbol{\kappa})(\omega)$ имеем $b(\omega')=0$. Отсюда следует, что φ_n сюръективно. □

Замечание. Й. Кунц и Д. Квиллен доказали существование гармонического разложения некоммутативных дифференциальных форм, более точно, что отображение факторизации $\Omega^*(A)\to\Omega^*(A)/(1-\boldsymbol{\kappa})^2$ индуцирует квазиизоморфизм (по отношению к дифференциалу b) при условии $\mathbb{Q}\subset k$ (см. [2]). Это утверждение эквивалентно тому, что подкомплекс $\mathrm{Ker}(1-\boldsymbol{\kappa})^2$ «гармонических форм» квазиизоморфен комплексу $\Omega^*(A)$. Предыдущая теорема показывает, что подкомплекс $\mathrm{Ker}(1-\boldsymbol{\kappa})$ обладает тем же самым свойством. Этот результат близок к аналогичному утверждению в дифференциальной геометрии, поскольку, как отмечено в [2], оператор $1-\boldsymbol{\kappa}$ служит естественным аналогом оператора Лапласа в рассматриваемом нами алгебраическом контексте. С другой стороны, не существует очевидной проекции $\Omega^*(A)$ на $\mathrm{Ker}(1-\boldsymbol{\kappa})$, в отличие от случая $\mathrm{Ker}(1-\boldsymbol{\kappa})^2$.

Замечание. В общем случае гомологии Хохшильда и построенная нами их версия могут не совпадать, если мы не предполагаем, что $\mathbb{Q}\subset k$. К примеру, пусть A — $\mathbb{Z}$-алгебра $\mathbb{Z}[x]/x^2$. Тогда $\mathrm{HH}_2(A)\cong\mathbb{Z}$, и образующая в гомологиях представляется дифференциальной формой $x\,dx\,dx$. С другой стороны, ${}_{\boldsymbol{\kappa}}\mathrm{HH}_2(A)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2$, причём образующие в гомологиях представлены дифференциальными формами $x\,dx\,dx$ и $dx\,dx$.

2. Циклические гомологии

Поскольку выполняется равенство $db+bd=1-\boldsymbol{\kappa}$, мы можем определить смешанный комплекс так, как это сделано в [4], с дифференциалами b и d, заданными на фактор-модуле $\Omega^*(A)/(1-\boldsymbol{\kappa})$:

$$\begin{array}{ccc}\Omega^*(A)/(1-\boldsymbol{\kappa}) & \xrightarrow{d} & \Omega^*(A)/(1-\boldsymbol{\kappa})\\ {\scriptstyle b}\big\downarrow & & {\scriptstyle b}\big\downarrow\\ \Omega^*(A)/(1-\boldsymbol{\kappa}) & \xrightarrow{d} & \Omega^*(A)/(1-\boldsymbol{\kappa})\end{array}.$$

Определим новую версию ${}_{\boldsymbol{\kappa}}\mathrm{HC}_*(A)$ циклических гомологий алгебры A как гомологии этого смешанного комплекса. Сначала сравним это определение с классическим. Напомним, что оператор Конна

$$B\colon \Omega^{n-1}(A) \to \Omega^n(A)$$

выражается через операторы d, b и $\boldsymbol{\kappa} = 1 - db - bd$ по формуле

$$B = (1 + \boldsymbol{\kappa} + \ldots + \boldsymbol{\kappa}^{n-1}).d.$$

На фактор-модуле $\Omega^*(A)/(1-\boldsymbol{\kappa})$ оператор B в размерности $n-1$ сводится к $N = nd$.

Напомним также, что циклический комплекс $\mathrm{CC}_*(A)$ определяется как

$$\mathrm{CC}_n(A) = \Omega^n(A) \oplus \Omega^{n-2}(A) \oplus \ldots .$$

Дифференциал $D\colon \mathrm{CC}_n(A) \to \mathrm{CC}_{n-1}(A)$ в этом комплексе задаётся матрицей

$$D = \begin{pmatrix} b & B & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & b & B & 0 & \\ 0 & 0 & b & B & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & b & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

После факторизации по $\mathrm{Im}(1-\boldsymbol{\kappa})$ оператор B сводится к оператору N, описанному выше, и тогда дифференциал D сводится на фактор-комплексе к дифференциалу $\bar{D}$ с матрицей

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} b & (n-1)d & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & b & (n-3)d & 0 & \\ 0 & 0 & b & (n-5)d & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & b & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим автоморфизм модуля $\mathrm{CC}_n(A)$, заданный формулой

$$(x_n, x_{n-2}, \ldots) \mapsto (\alpha_n x_n, \alpha_{n-2} x_{n-2}, \alpha_{n-4} x_{n-4}, \ldots),$$

где $\alpha_n = (n-1)\cdot(n-3)\ldots$. По модулю этого автоморфизма дифференциал $\bar{D}$ может быть записан матрицей

$$D' = \begin{pmatrix} b & d & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & b & d & 0 & \\ 0 & 0 & b & d & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & b & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Следовательно, предполагая, что $(n+1)!$ обратимо в k, мы получим изоморфные гомологии относительно дифференциалов $\bar{D}$ и D'. В соответствии с предыдущей теоремой каноническое отображение $\varphi_m\colon \mathrm{HH}_m(A) \longrightarrow {}_{\boldsymbol{\kappa}}\mathrm{HH}_m(A)$ является изоморфизмом при $m \leqslant n+1$. С помощью 5-леммы отсюда легко выводится следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Предположим, что* $(n+1)!$ *обратимо в* k. *Тогда описанные выше отображения индуцируют изоморфизм*

$$\mathrm{HC}_n(A) \cong {}_{\boldsymbol{\kappa}}\mathrm{HC}_n(A).$$

Теперь рассмотрим приведённый комплекс де Рама

$$\tilde{\Omega}^*(A) = \Omega^*(A)/k$$

и соответствующий фактор-комплекс $\tilde{\Omega}^*(A)/(1-\boldsymbol{\kappa})$. Оказывается, что свойство Конна, формализованное в [2], выполняется и для этого фактор-комплекса. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Предположим, что* $(n+1)!$ *обратимо в* k. *Тогда когомологии (относительно дифференциала* d*) степени* n *фактор-комплекса* $\tilde{\Omega}^*(A)/(1-\boldsymbol{\kappa})$ *тривиальны. В частности, если* $\mathbb{Q} \subset k$, *то смешанный комплекс* $(\tilde{\Omega}^*(A)/(1-\boldsymbol{\kappa}), b, d)$ *обладает свойством Конна.*

Доказательство. Как уже доказано (см. [3]), некоммутативный комплекс де Рама $\tilde{\Omega}^*(A)$ ацикличен. Следовательно, достаточно показать, что если $d(\omega) \in \mathrm{Im}(1-\boldsymbol{\kappa})$, то существует элемент ω', для которого $d(\omega') = 0$ и $\omega' - \omega \in \mathrm{Im}(1-\boldsymbol{\kappa}) + \mathrm{Im}\, d$. Это делается точно таким же способом, как в доказательстве теоремы 1.1, поскольку оператор $\boldsymbol{\kappa}$ задаёт действие циклической группы порядка $n+1$ на $\tilde{\Omega}^n(A)/\,\mathrm{Im}(d)$. □

Следующая теорема содержится в [2, 5]. Наше доказательство отлично от приведённых в этих работах, и вместо дифференциала Конна B используется дифференциал d. Заметим, что оператор $\boldsymbol{k}$ также задаёт (с точностью до знака $(-1)^{n+1}$) действие группы порядка $n+1$ на фактор-комплексе $\tilde{\Omega}^n(A)/\,\mathrm{Im}(d) \cong (A/k.1)^{\otimes(n+1)}$.

Теорема 2.3. *Предположим, что* $(n+1)!$ *обратимо в* k. *Тогда приведённые циклические гомологии степени* n *совпадают с гомологиями приведённого циклического комплекса Конна*

$$\ldots \xrightarrow{b} \bar{A}^{\otimes 3}/(1-\boldsymbol{k}) \xrightarrow{b} \bar{A}^{\otimes 2}/(1-\boldsymbol{k}) \xrightarrow{b} \bar{A} \longrightarrow 0,$$

где $\bar{A} = A/k.1$ *и* b *— стандартный дифференциал Хохшильда.*

Известно, что гомологии Хохшильда, равно как и циклические гомологии, Морита-инвариантны. Этим же свойством обладают введённые в этой заметке их версии. Это следует из того, что внутренний автоморфизм алгебры A отображает цикл комплекса Хохшильда в гомологичный ему, поскольку мы имеем дело с коммутаторами вида $[\omega, a]$, где ω — дифференциальная форма и a — элемент алгебры A. Из Морита-инвариантности нашей новой версии гомологий Хохшильда следует Морита-инвариантность нашей версии циклических гомологий.

Литература

[1] Connes A. Noncommutative differential geometry // Publ. Math. IHES. — 1985. — Vol. 62. — P. 257—360.

[2] Cuntz J., Quillen D. Operators on noncommutative differential forms and cyclic homology // Geometry, Topology and Physics. — Cambridge: International Press, 1995. — P. 77—111.

[3] Karoubi M. Homologie cyclique et K-théorie. — Soc. Math. de France, 1987. — (Astérisque; Vol. 149).

[4] Kassel C. Cyclic homology, comodules and mixed complexes // J. Algebra. — 1987. — Vol. 107. — P. 195—216.

[5] Loday J.-L., Quillen D. Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices // Comment. Math. Helvetici. — 1984. — Vol. 59. — P. 565—591.