О метриках диагональной кривизны*

О. И. МОХОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mokhov@mi.ras.ru

УДК 514.764.2+514.8+517.9

Ключевые слова: метрика диагональной кривизны, полугамильтонова метрика, ортогональные координаты, диагонализация метрик, аффиноров, тензоров Риччи, полугамильтоновы системы гидродинамического типа.

Аннотация

В данной статье развита теория пространств диагональной кривизны. Получено эффективное необходимое условие для метрик диагональной кривизны — равенство нулю тензора Хантьеса аффинора Риччи. Построены примеры.

Abstract

O. I. Mokhov, On metrics of diagonal curvature, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 6, pp. 171—182.

In this paper, the theory of spaces of diagonal curvature is developed. An efficient necessary condition for metrics of diagonal curvature, namely, the vanishing of the Haantjes tensor for the Ricci affinor, is obtained. Examples are constructed.

Памяти Юрия Петровича Соловьёва

1. Введение

В статье рассматриваются пространства диагональной кривизны, возникающие в ряде современных задач математической физики и теории интегрируемых систем гидродинамического типа. Эти римановы (или псевдоримановы) пространства характеризуются наличием римановой (или псевдоримановой) диагональной метрики (ортогональных координат в пространстве) с дополнительными условиями на тензор кривизны Римана и локально описываются интегрируемой системой уравнений. В частности, все двумерные метрики задают пространства диагональной кривизны, а также пространствами диагональной кривизны являются пространства постоянной кривизны, гиперповерхности, пространства с плоской нормальной связностью. Общие пространства диагональной кривизны пока мало исследованы, хотя они играют важнейшую роль в теории систем гидродинамического типа. В частности, геометрия полугамильтоновых

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10260).

систем, открытых С. П. Царёвым [18] (этот обширный класс диагонализуемых систем гидродинамического типа обладает наиболее богатым среди всех систем гидродинамического типа бесконечномерным множеством законов сохранения и симметрий (коммутирующих потоков), системы этого класса являются интегрируемыми, они интегрируются (линеаризуются) обобщённым методом годографа [18], многие важнейшие системы гидродинамического типа принадлежат именно этому классу систем), в точности является геометрией пространств диагональной кривизны, с каждой такой системой связана метрика диагональной кривизны (полугамильтонова метрика).

Отметим, что в пространствах диагональной кривизны по определению существуют ортогональные координаты, т. е. метрики диагональной кривизны диагонализуются. Проблема диагонализации римановых и псевдоримановых метрик является классической и нерешённой задачей римановой и дифференциальной геометрии. Хорошо известно, что все двумерные метрики диагонализуются, для трёхмерных метрик это тоже верно, но это нетривиальное утверждение, доказанное Эли Картаном для аналитических трёхмерных метрик [21] и Д. Детурком и Д. Янгом для гладких трёхмерных метрик [23]. Для n-мерных метрик при $n > 3$, как было доказано Л. Бьянки [19], в общем случае ортогональных координат не существует, т. е. n-мерную метрику, вообще говоря, нельзя диагонализовать при $n > 3$. Проблема диагонализации метрик является важнейшей нерешённой задачей в римановой и дифференциальной геометрии. Пока не существует, например, никаких эффективных общих методов выяснения, диагонализуема ли метрика и можно ли ввести ортогональные координаты в соответствующем римановом или псевдоримановом пространстве (в отличие, например, от эффективных методов выяснения, диагонализуем ли аффинор [24, 25]). Проблемы теории пространств диагональной кривизны тесно связаны с задачей о диагонализации метрик. Все двумерные метрики диагонализуются, и все они являются метриками диагональной кривизны. Все трёхмерные метрики тоже диагонализуются, возникает естественный вопрос о существовании трёхмерных метрик, которые не являются метриками диагональной кривизны. В данной статье развивается теория пространств диагональной кривизны. В частности, построены примеры трёхмерных метрик, которые не являются метриками диагональной кривизны.

2. Ортогональные координаты в римановых и псевдоримановых пространствах и пространства диагональной кривизны

Мы будем рассматривать в данной статье только локальные задачи теории пространств диагональной кривизны. Локально такое пространство задаётся римановой или псевдоримановой метрикой (*метрикой диагональной кривизны*) в некоторой координатной окрестности.

Определение 2.1. Риманова или псевдориманова метрика $g_{ij}(u)$ называется *метрикой диагональной кривизны* (или *полугамильтоновой метрикой*), если для этой метрики существуют (локально) ортогональные координаты (в ортогональных координатах метрика диагональна: $g_{ij}(u) = g_i(u)\delta_{ij}$), такие что в этих ортогональных координатах

$$R^{ij}_{il}(u) = 0 \quad \text{для любых} \quad i, j, l, \ j \neq l, \tag{1}$$

т. е. для каждого индекса i «операторы кривизны» $R^{ij}_{il}(u)$ диагональны (суммирования по повторяющемуся индексу i в формуле (1) нет). Здесь $R^{ij}_{il}(u)$ — компоненты тензора кривизны Римана:

$$\begin{aligned}
&R^{ij}_{kl}(u) = g^{is}(u)R^{j}_{skl}(u),\\
&R^{i}_{jkl}(u) = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial u^l} + \Gamma^i_{sk}(u)\Gamma^s_{jl}(u) - \Gamma^i_{sl}(u)\Gamma^s_{jk}(u),\\
&\Gamma^i_{jk}(u) = \frac{1}{2} g^{is}(u)\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^s}\right),
\end{aligned}$$

$g^{ij}(u)$ — контравариантная метрика, обратная ковариантной метрике $g_{ij}(u)$:

$$g^{is}(u)g_{sj}(u) = \delta^i_j.$$

Ортогональные координаты метрики диагональной кривизны, в которых выполняются соотношения (1), мы будем называть *координатами диагональной кривизны* данной метрики диагональной кривизны.

Отметим, что данное определение метрик диагональной кривизны не является инвариантным. Метрики определяются выполнением нетривиальных специальных условий на тензор кривизны Римана в некоторых ортогональных координатах, само существование которых тоже является проблемой. На данный момент никакого инвариантного определения метрик диагональной кривизны не известно, это открытая важная проблема. И не существует никаких эффективных критериев и методов для определения, является ли данная метрика метрикой диагональной кривизны. Более того, на данный момент не существует общих методов для определения, существуют ли вообще ортогональные координаты для данной метрики, т. е. диагонализуема ли данная метрика. Для метрик диагональной кривизны проблема осложняется тем, что даже если для данной метрики ортогональные координаты существуют, даже если они найдены, даже если метрика задана в ортогональных координатах и таким образом диагональна, но в этих ортогональных координатах для данной метрики не выполняется «условие диагональности кривизны» (1), то это вовсе не означает, что данная метрика не является метрикой диагональной кривизны, в других ортогональных координатах для этой метрики условие (1) вполне может выполняться; в конце статьи мы приведём пример такой метрики, но общих эффективных методов для ответов на эти вопросы пока нет.

Хорошо известно, что если метрика $g_{ij}(u)$ диагональная, $g_{ij}(u) = g_i(u)\delta_{ij}$, то $\Gamma^i_{jk}(u) = 0$ для всех различных индексов i, j, k, $R^{ij}_{kl}(u) = 0$ для всех различных индексов i, j, k, l. Кроме того, в силу хорошо известных симметрий тензора кривизны Римана

$$R^{ii}_{kl}(u) = R^{ij}_{kk}(u) = 0, \quad R^{ij}_{il}(u) = -R^{ij}_{li}(u) = R^{ji}_{li}(u) = -R^{ji}_{il}(u),$$

поэтому для тензора кривизны Римана диагональной метрики достаточно контролировать только компоненты $R^{ij}_{il}(u)$, $j \neq i$, $l \neq i$. Таким образом, для метрики диагональной кривизны существуют ортогональные координаты, в которых из этих компонент только компоненты $R^{ij}_{ij}(u)$ («диагональные элементы») могут быть отличны от нуля, только неравенством нулю этих компонент тензора Римана она отличается от плоской метрики.

Все двумерные метрики диагонализуются, и несложно показать, что все они являются метриками диагональной кривизны. Все трёхмерные метрики тоже диагонализуются, но вопрос о том, все ли они являются метриками диагональной кривизны, оказывается нетривиальным. В данной статье будут построены примеры трёхмерных метрик, которые не являются метриками диагональной кривизны.

Отметим, что в общем случае проблема диагонализации метрик не решена. Нет никаких эффективных общих способов установить, диагонализуема ли данная метрика, т. е. существуют ли для неё ортогональные координаты. Эта проблема является нетривиальной начиная уже с размерности $n = 3$. Диагонализуемость всех аналитических трёхмерных метрик была доказана Эли Картаном [21], а диагонализуемость гладких трёхмерных метрик доказана только около тридцати лет назад Д. Детурком и Д. Янгом [23]. Как показано Л. Бьянки [19], при $n > 3$ в общем случае n-мерная метрика не является диагонализуемой. В общем случае пока не существует никаких эффективных критериев и методов установить, диагонализуема ли метрика.

В теории метрик диагональной кривизны нас интересует существование не любых, а очень специальных ортогональных координат для метрики, с дополнительными свойствами. Описание различных (всех) ортогональных координат для римановых и псевдоримановых метрик и их построение является отдельной сложной проблемой. Задача описания ортогональных координат в плоском пространстве — классическая задача дифференциальной геометрии, которой посвящено большое количество статей и монографий классиков дифференциальной геометрии (см., например, [20, 22]). Эта задача также является нетривиальной начиная с трёхмерного пространства. Ортогональные координаты в n-мерном плоском пространстве описываются знаменитыми нелинейными уравнениями Ламе. Хотя задача описания именно пространств диагональной кривизны до современных работ не возникала, фактически уравнения, описывающие все пространства диагональной кривизны, были получены ещё Дарбу.

Рассмотрим произвольную диагональную метрику $g_{ij}(u) = g_i(u)\delta_{ij}$ и введём стандартные классические обозначения: $g_i(u) = H_i^2(u)$, где $H_i(u)$ — коэффициенты Ламе диагональной метрики.

Диагональная метрика $g_{ij}(u) = g_i(u)\delta_{ij}$ плоская, если выполняется условие

$$R^{ij}_{il}(u) = 0, \quad i \neq j, \quad i \neq l. \tag{2}$$

Это условие естественным образом разбивается на два: условие

$$R^{ij}_{il}(u) = 0, \quad i \neq j, \quad i \neq l, \quad j \neq l, \tag{3}$$

эквивалентное тому, что метрика является метрикой диагональной кривизны, и приводящее к уравнениям

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial u^j \partial u^l} = \frac{1}{H_j(u)} \frac{\partial H_i}{\partial u^j} \frac{\partial H_j}{\partial u^l} + \frac{1}{H_l(u)} \frac{\partial H_l}{\partial u^j} \frac{\partial H_i}{\partial u^l}, \quad i \neq j, \quad i \neq l, \quad j \neq l, \tag{4}$$

и условие

$$R^{ij}_{ij}(u) = 0, \quad i \neq j, \tag{5}$$

эквивалентное уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{1}{H_i(u)} \frac{\partial H_j}{\partial u^i}\right) + \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{1}{H_j(u)} \frac{\partial H_i}{\partial u^j}\right) + \\ + \sum_{s\neq i,\ s\neq j} \frac{1}{\big(H_s(u)\big)^2} \frac{\partial H_i}{\partial u^s} \frac{\partial H_j}{\partial u^s}, \quad i \neq j. \tag{6}$$

Введём коэффициенты вращения диагональной метрики $\beta_{ij}(u)$:

$$\beta_{ij}(u) = \frac{1}{H_i(u)} \frac{\partial H_j}{\partial u^i}, \quad i \neq j. \tag{7}$$

В терминах коэффициентов вращения метрики уравнения (4) приобретают вид

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^l} = \beta_{il}\beta_{lj}, \quad i \neq j, \quad i \neq l, \quad j \neq l, \tag{8}$$

а уравнения (6) превращаются в уравнения

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \sum_{s\neq i,\ s\neq j} \beta_{si}\beta_{sj}, \quad i \neq j. \tag{9}$$

Уравнения (8) называются уравнениями Дарбу, именно эти уравнения и описывают метрики диагональной кривизны. Уравнения Дарбу (8) хорошо известны в математической физике и теории интегрируемых систем как уравнения трёх волн, эти уравнения интегрируются методом обратной задачи рассеяния (см. [4]).

Отметим, что по решениям уравнений Дарбу (8), по соответствующим коэффициентам вращения метрики $\beta_{ij}(u)$, $i \neq j$, коэффициенты Ламе $H_i(u)$ метрики восстанавливаются из уравнений (7):

$$\frac{\partial H_j}{\partial u^i} = \beta_{ij}(u)H_i(u). \tag{10}$$

Уравнения (10) — совместная линейная система, условиями совместности для которой являются в точности уравнения Дарбу (8).

Полная система уравнений (8) и (9), описывающих все плоские диагональные метрики, т. е. все ортогональные криволинейные системы координат в плоском пространстве, также является системой, интегрируемой методом обратной задачи рассеяния [26]. Более того, В. Е. Захаров доказал интегрируемость нелинейных уравнений, описывающих ортогональные координаты в некоторых других классах пространств диагональной кривизны, в пространствах постоянной кривизны и в пространствах с плоской нормальной связностью [27].

На основе метода обратной задачи рассеяния И. М. Кричевер предложил алгебро-геометрический метод построения ортогональных криволинейных систем координат в плоском пространстве [5]. Для сингулярных кривых этот алгебро-геометрический подход был развит А. Е. Мироновым и И. А. Таймановым [6] с построением примеров ортогональных координат в элементарных функциях. В [1] Д. А. Бердинский и И. П. Рыбников развили алгебро-геометрический метод построения ортогональных координат в пространствах постоянной кривизны. В дипломной работе моего студента Е. В. Глухова [2] обобщена алгебро-геометрическая конструкция Кричевера для построения ортогональных координат на различных пространствах диагональной кривизны.

Отметим, что особым классом пространств диагональной кривизны являются пространства с плоской нормальной связностью, метрики пространств с плоской нормальной связностью задают гамильтоновы структуры систем гидродинамического типа. Плоским пространствам отвечают локальные гамильтоновы структуры Дубровина—Новикова [3], пространствам постоянной кривизны отвечают нелокальные гамильтоновы структуры Мохова—Ферапонтова [16], а общим пространствам с плоской нормальной связностью отвечают нелокальные гамильтоновы структуры Ферапонтова [17]. Для метрик диагональной кривизны, которые не являются метриками пространств с плоской нормальной связностью, гамильтонов формализм, связанный с соответствующими им полугамильтоновыми системами гидродинамического типа, неизвестен.

Изучение общей полугамильтоновой геометрии и её связи с гамильтоновым формализмом является важнейшей задачей теории систем гидродинамического типа. Кроме того, ортогональные координаты в римановых пространствах играют важную роль в теории согласованных и почти согласованных метрик, развитой автором в [7—15]. В частности, согласованные метрики пространств с плоской нормальной связностью связаны с согласованными нелокальными скобками Пуассона гидродинамического типа и интегрируемыми бигамильтоновыми системами гидродинамического типа. Стоит задача применить алгебро-геометрический подход к описанию согласованных метрик, в частности согласованных плоских метрик, согласованных метрик постоянной кривизны и согласованных метрик пространств с плоской нормальной связностью.

3. О тензоре Риччи метрик диагональной кривизны

Рассмотрим метрику диагональной кривизны $g_{ij}(u) = g_i(u)\delta_{ij}$, такую что для каждого индекса i мы имеем $R^{ij}_{il}(u) = 0$ при $j \neq l$, и рассмотрим тензор Риччи этой метрики:

$$R_{ij}(u) = \sum_{s=1}^{n} R^s_{isj}(u).$$

Теорема 3.1. *Тензор Хантьеса аффинора Риччи метрики диагональной кривизны тождественно равен* 0.

Данная теорема даёт легко проверяемое необходимое условие для того, чтобы метрика являлась метрикой диагональной кривизны.

Напомним определение тензора Хантьеса $H^i_{jk}(u)$ для произвольного аффинора $A^i_j(u)$. Тензор Хантьеса задаёт векторнозначную кососимметричную 2-форму на векторных полях, и мы определим его на произвольных векторных полях $X^i(u)$ и $Y^i(u)$:

$$H(X,Y) = N(AX,AY) + A^2N(X,Y) - AN(X,AY) - AN(AX,Y). \tag{11}$$

В компонентах тензор Хантьеса $H^i_{jk}(u)$ произвольного аффинора $A^i_j(u)$ имеет вид

$$H^i_{jk}(u) = A^i_s(u)A^s_r(u)N^r_{jk}(u) - A^i_s(u)N^s_{rk}(u)A^r_j(u) - \\ - A^i_s(u)N^s_{jr}(u)A^r_k(u) + N^i_{sr}(u)A^s_j(u)A^r_k(u),$$

где $N^i_{jk}(u)$ — тензор Нейенхейса аффинора $A^i_j(u)$, который также задаёт векторнозначную кососимметричную 2-форму на векторных полях и который мы тоже определим на произвольных векторных полях $X^i(u)$ и $Y^i(u)$:

$$N(X,Y) = [AX,AY] + A^2[X,Y] - A[X,AY] - A[AX,Y], \tag{12}$$

где $[X,Y]$ — коммутатор произвольных векторных полей X и Y:

$$[X,Y]^k(u) = X^s(u)\frac{\partial Y^k}{\partial u^s} - Y^s(u)\frac{\partial X^k}{\partial u^s}. \tag{13}$$

В компонентах тензор Нейенхейса $N^i_{jk}(u)$ аффинора $A^i_j(u)$ имеет вид

$$N^k_{ij}(u) = A^s_i(u)\frac{\partial A^k_j}{\partial u^s} - A^s_j(u)\frac{\partial A^k_i}{\partial u^s} + A^k_s(u)\frac{\partial A^s_i}{\partial u^j} - A^k_s(u)\frac{\partial A^s_j}{\partial u^i}. \tag{14}$$

Отметим, что тензор Хантьеса образован по той же формуле, что и тензор Нейенхейса, но вместо одной векторнозначной кососимметрической 2-формы (коммутатора векторных полей) используется другая векторнозначная кососимметрическая 2-форма (тензор Нейенхейса). При этом тензор Хантьеса также является векторнозначной кососимметрической 2-формой.

Теорема 3.2 (Й. Хантьес [24]). *Любой аффинор, диагонализуемый в каждой точке окрестности, т. е. любой аффинор с полным набором собственных векторов, у которого каждому собственному значению кратности r отвечает r линейно независимых собственных векторов, диагонализуем тогда и только тогда, когда тензор Хантьеса этого аффинора тождественно равен нулю.*

В частности, тензор Хантьеса диагонализуемого аффинора всегда тождественно равен нулю.

Лемма 3.1. *Аффинор Риччи метрики диагональной кривизны в координатах диагональной кривизны метрики является диагональным.*

Действительно, для аффинора Риччи метрики диагональной кривизны в координатах диагональной кривизны метрики при $l \neq j$ имеем

$$R^l_j(u) = g^{ls}(u)R_{sj}(u) = g^{ls}(u)R^k_{skj}(u) = R^{lk}_{kj}(u) = 0. \qquad (15)$$

Лемма 3.2. *Метрика диагональной кривизны $g_{ij}(u)$ и её тензор Риччи $R_{ij}(u)$ одновременно диагонализуются в координатах диагональной кривизны метрики.*

В частности, полученные необходимые условия позволяют построить примеры трёхмерных метрик, которые не являются метриками диагональной кривизны.

Пример 3.1. Рассмотрим метрику

$$\big(g_{ij}(u^1, u^2, u^3)\big) = \begin{pmatrix} u^3 & 0 & 0 \\ 0 & u^1 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Прямые вычисления показывают, что тензор Хантьеса для аффинора Риччи данной метрики не равен нулю, следовательно, данная метрика не является метрикой диагональной кривизны.

Для трёхмерных метрик одновременная диагонализуемость метрики и её тензора Риччи является необходимым и достаточным условием того, что эта метрика является метрикой диагональной кривизны.

Теорема 3.3. *При $n = 3$ метрика является метрикой диагональной кривизны тогда и только тогда, когда эта метрика и её тензор Риччи одновременно диагонализуются.*

Действительно, допустим, что метрика $g_{ij}(u)$ и её тензор Риччи $R_{ij}(u)$ одновременно диагонализуются. Таким образом, существуют координаты, в которых $g_{ij}(u) = g_i(u)\delta_{ij}$ и $R_{ij}(u) = R_i(u)\delta_{ij}$. В этих координатах

$$\sum_{i=1}^{n} R^{ij}_{il}(u) = -\sum_{i=1}^{n} R^{ji}_{il}(u) = -g^{js}(u)R_{sl}(u) = -g^{jj}(u)R_{jl}(u) = -\frac{R_j(u)}{g_j(u)}\delta_{jl}. \qquad (17)$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n} R^{ij}_{il}(u) = 0$$

при $j \neq l$. При $n = 3$ из этих условий следует, что для любого значения индекса i при $j \neq l$ выполняется соотношение $R^{ij}_{il}(u) = 0$, т. е. метрика является метрикой диагональной кривизны.

Отметим, что в случае римановой метрики $g_{ij}(u)$ в любой точке пара квадратичных форм, задаваемых римановой метрикой и её тензором Риччи, диагонализуемы. Таким образом, аффинор Риччи любой римановой метрики диагонализуем в точке.

Теорема 3.4. *Аффинор Риччи $R^i_j(u)$ любой римановой метрики диагонализуем тогда и только тогда, когда его тензор Хантьеса $H^i_{jk}(u)$ тождественно равен нулю.*

Таким образом, для диагонализуемости аффинора Риччи римановой метрики мы имеем эффективный критерий.

Как было показано выше, для метрик диагональной кривизны метрика и её тензор Риччи диагонализуются одновременно. Более того, для трёхмерных метрик одновременная диагонализуемость метрики и её тензора Риччи является критерием, необходимым и достаточным условием, того, что метрика является метрикой диагональной кривизны. Возникает важная задача об одновременной диагонализуемости произвольной пары метрик и, в частности, задача об одновременной диагонализуемости метрики и её тензора Риччи. Одновременная диагонализуемость пары метрик играет также важную роль в теории согласованных и почти согласованных метрик, построенной и развитой автором в [7—15].

В случае пары метрик общего положения, если собственные значения этой пары метрик различны, имеется эффективный критерий одновременной диагонализуемости этой пары метрик.

Лемма 3.3. *Если собственные значения пары метрик $g_{1,ij}(u)$ и $g_{2,ij}(u)$ различны, то эти метрики диагонализуются одновременно тогда и только тогда, когда диагонализуется аффинор $v^i_j(u) = g^{is}_1(u) g_{2,sj}(u)$, т. е. тогда и только тогда, когда его тензор Хантьеса тождественно равен нулю.*

Применение этого критерия к метрике и её тензору Риччи позволяет эффективно, по крайней мере в трёхмерном случае, выяснять, является ли метрика метрикой диагональной кривизны.

Теорема 3.5. *Если для данной метрики $g_{ij}(u)$ собственные значения аффинора Риччи $R^i_j(u)$ различны (т. е. различны собственные значения пары метрик: метрики $g_{ij}(u)$ и её тензора Риччи $R_{ij}(u)$), то метрика $g_{ij}(u)$ и её тензор Риччи $R_{ij}(u)$ одновременно диагонализуются тогда и только тогда, когда диагонализуется аффинор Риччи $R^i_j(u)$, т. е. тогда и только тогда, когда его тензор Хантьеса тождественно равен нулю.*

Таким образом, если для данной метрики $g_{ij}(u)$ собственные значения аффинора Риччи $R^i_j(u)$ различны, т. е. дискриминант характеристического многочлена

$$\det\bigl(R_{ij}(u) - \lambda g_{ij}(u)\bigr) = 0 \tag{18}$$

не равен нулю, то метрика $g_{ij}(u)$ и её тензор Риччи $R_{ij}(u)$ одновременно диагонализуются тогда и только тогда, когда его тензор Хантьеса аффинора Риччи $R^i_j(u)$ тождественно равен нулю. Для трёхмерных метрик одновременная диагонализуемость метрики $g_{ij}(u)$ и её тензора Риччи $R_{ij}(u)$ является необходимым и достаточным условием того, что данная метрика является метрикой диагональной кривизны.

Пример 3.2. Рассмотрим метрику

$$\bigl(g_{ij}(u^1, u^2, u^3)\bigr) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u^1 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Отметим, что для данной диагональной метрики в рассматриваемых ортогональных координатах не выполняются «условия диагональной кривизны» (1), т. е. эти ортогональные координаты не являются координатами диагональной кривизны. Тем не менее эта метрика является метрикой диагональной кривизны. Для данной метрики собственные значения аффинора Риччи различны, дискриминант соответствующего характеристического многочлена не равен нулю, а вот тензор Хантьеса аффинора Риччи этой метрики тождественно равен нулю.

Литература

[1] Бердинский Д. А., Рыбников И. П. Об ортогональных криволинейных системах координат в пространствах постоянной кривизны // Сиб. матем. журн. — 2011. — Т. 52, № 3. — С. 502—511.

[2] Глухов Е. В. Алгебро-геометрические методы построения ортогональных координат в римановых пространствах: Дипл. работа. — Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, 2015.

[3] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова—Уизема // ДАН СССР. — 1983. — Т. 270, № 4. — С. 781—785.

[4] Захаров В. Е., Шабат А. Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // Функц. анализ и его прил. — 1974. — Т. 8, № 3. — С. 43—53.

[5] Кричевер И. М. Алгебро-геометрические n-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности // Функц. анализ и его прил. — 1997. — Т. 31, № 1. — С. 32—50.

[6] Миронов А. Е., Тайманов И. А. Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым // Тр. МИАН. — 2006. — Т. 255. — С. 180—196.

[7] Мохов О. И. Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы // УМН. — 1998. — Т. 53, № 3. — С. 85—192.

[8] Мохов О. И. Согласованные и почти согласованные метрики // УМН. — 2000. — Т. 55, № 4. — С. 217—218.

[9] Мохов О. И. Плоские пучки метрик и интегрируемые редукции уравнений Ламе // УМН. — 2001. — Т. 56, № 2. — С. 221—222.

[10] Мохов О. И. Согласованные и почти согласованные псевдоримановы метрики // Функц. анализ и его прил. — 2001. — Т. 35, № 2. — С. 24—36.

[11] Мохов О. И. Об интегрируемости уравнений для неособых пар согласованных плоских метрик // Теор. и матем. физ. — 2002. — Т. 130, № 2. — С. 233—250.

[12] Мохов О. И. Согласованные метрики постоянной римановой кривизны: локальная геометрия, нелинейные уравнения и интегрируемость // Функц. анализ и его прил. — 2002. — Т. 36, № 3. — С. 36—47.

[13] Мохов О. И. Пары Лакса для уравнений, описывающих согласованные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, и интегрируемые редукции уравнений Ламе // Теор. и матем. физ. — 2004. — Т. 138, № 2. — С. 283—296.

[14] Мохов О. И. Римановы инварианты полупростых нелокально-бигамильтоновых систем гидродинамического типа и согласованные метрики // УМН. — 2010. — Т. 65, № 6. — С. 189—190.

[15] Мохов О. И. О согласованных метриках и диагонализуемости нелокально-бигамильтоновых систем гидродинамического типа // Теор. и матем. физ. — 2011. — Т. 167, № 1. — С. 3—22.

[16] Мохов О. И., Ферапонтов Е. В. О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны // УМН. — 1990. — Т. 45, № 3. — С. 191—192.

[17] Ферапонтов Е. В. Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа // Функц. анализ и его прил. — 1991. — Т. 25, № 3. — С. 37—49.

[18] Царёв С. П. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщённый метод годографа // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1990. — Т. 54, № 5. — С. 1048—1068.

[19] Bianchi L. Lezioni di Geometria Differenziale. Vol. 2, pt. 2. — Bologna: Zanichelli, 1924.

[20] Bianchi L. Opere. Vol. 3: Sistemi Tripli Orthogonali. — Roma: Cremonese, 1955.

[21] Cartan É. Les systèmes differentials extérieurs et leur applications géométriques. — Paris: Hermann et Cie., 1945. — (Actual. Sci. Ind.; No. 994).

[22] Darboux G. Leçons sur les Systèmes Orthogonaux et les Coordonnées Curvilignes. — Paris: Gauthier-Villars, 1910.

[23] Deturck D. M., Yang D. Existence of elastic deformations with prescribed principal strains and triply orthogonal systems // Duke Math. J. — 1984. — Vol. 51, no. 2. — P. 243—260.

[24] Haantjes J. On forming sets of eigenvectors // Indag. Math. — 1955. — Vol. 17. — P. 158—162.

[25] Nijenhuis A. X_{n-1}-forming sets of eigenvectors // Indag. Math. — 1951. — Vol. 13. — P. 200—212.

[26] Zakharov V. E. Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type. I: Integration of the Lamé equations // Duke Math. J. — 1998. — Vol. 94. — P. 103—139.

[27] Zakharov V. E. Application of the inverse scattering transform to classical problems of differential geometry and general relativity // The Legacy of the Inverse Scattering Transform in Applied Mathematics / J. Bona, R. Choudhury, and D. Kaup, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 2002. — (Contemp. Math.; Vol. 301). — P. 15—34.