

Бифуркации топологий деревьев Штейнера на плоскости

Е. И. СТЕПАНОВА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ekfila@gmail.com

УДК 514.77+519.176+515.165.7

Ключевые слова: проблема Штейнера, дерево Штейнера, бифуркационная диаграмма.

Аннотация

В работе построены бифуркационные диаграммы топологий деревьев Штейнера для четырёх граничных точек и изучены некоторые свойства таких диаграмм для любого числа точек.

Abstract

E. I. Stepanova, Bifurcations of Steiner tree topologies in the plane, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 6, pp. 183–204.

Bifurcation diagrams of Steiner tree topologies for four boundary points are constructed in this paper. Also some properties of such diagrams for an arbitrary number of points are considered.

1. Введение

Данная работа посвящена изучению проблемы Штейнера.

Проблема Штейнера, по-видимому, берёт своё начало с XVII века с работ Ферма, Торричелли, Кавальери, Вивiani, занимавшихся поиском точки, сумма расстояний до которой от трёх других минимальна. В 1934 году В. Ярник и О. Кесслер [7] обобщили эту задачу, разрешив соединять произвольное число точек кратчайшей сетью. Однако в известной книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» [3] эта задача была названа по имени Якоба Штейнера, и с тех пор название прочно закрепилось. В общем случае рассматривается произвольное множество точек в некотором метрическом пространстве и требуется построить дерево кратчайшей длины с вершинами в этом пространстве, которое соединяло бы все эти точки. Решение этой задачи называется *минимальным деревом Штейнера*.

Один из вопросов, возникающий при рассмотрении поставленной задачи, — какую *топологию* будет иметь искомое дерево при заданном положении исходных точек в пространстве, т. е. какие вершины, помимо данных, нужно добавить

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 6, с. 183–204.

© 2016 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

и какие вершины дерева будут соединены между собой рёбрами. Изучение этой задачи для четырёх точек началось с переписки Гаусса и Шумахера, в которой они обсуждали, как соединить четыре немецких города кратчайшей сетью дорог. Эта проблема исследовалась для вершин выпуклых четырёхугольников в работах Х. О. Поллака [10], Д.-Ж. Ду, Ф. К. Хвана, Г. Д. Сона и Г. Ю. Тина [4], а также К. Оллереншоу [9] и других авторов. В [11] Дж. Ф. Вэн рассматривал также частные случаи невыпуклых четырёхугольников. Все эти авторы представили некоторые геометрические признаки и критерии того, что минимальное дерево Штейнера будет иметь конкретную топологию.

В настоящей работе вопрос о топологиях минимальных деревьев Штейнера полностью изучен для всех множеств, состоящих из четырёх точек на евклидовой плоскости. Для всех конфигураций мы можем сказать, как устроены для них топологии рассматриваемых типов минимальных деревьев и как они меняются при изменении исходного множества. Построены бифуркационные диаграммы деревьев Штейнера для четырёх исходных точек, даны некоторые ограничения на бифуркационные диаграммы для любого числа точек.

Автор выражает благодарность А. О. Иванову и А. А. Тужилину за постановку задачи, плодотворные обсуждения, терпение и постоянное внимание к работе.

2. Постановка задачи Штейнера

Мы будем использовать традиционную терминологию теории графов (см., например, [1]).

Все рассматриваемые графы предполагаются простыми, т. е. не содержащими петель и кратных рёбер, поэтому такие графы задаются парами (V, E) , где V — конечное множество, а E — некоторое семейство двухэлементных подмножеств V . Как это принято в теории графов, для графа $G = (V, E)$ множество вершин V часто будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер E — через $E(G)$, а ребро $\{v, w\} \in E$ — через vw .

2.1. Графы в метрическом пространстве

Мы будем изучать *графы, лежащие в метрическом пространстве*, т. е. графы, вершины которых принадлежат метрическому пространству. Расстояние между точками x и y метрического пространства будем обозначать через $|xy|$.

Определение 1. Для графа G в метрическом пространстве определим *длину ребра* $e = vw \in E(G)$, положив её равной $|vw|$; эту длину будем также обозначать через $|e|$. *Длиной $|G|$ графа G , лежащего в метрическом пространстве*, назовём сумму длин всех его рёбер.

Замечание 1. Все вершины графа в метрическом пространстве — различные точки этого пространства, т. е. длины всех рёбер такого графа положительны.

2.2. Соединяющие графы

В дальнейшем мы часто будем работать со следующей конструкцией.

Определение 2. Выберем некоторое множество M и будем изучать *связные* графы, множества вершин которых содержат это M . Про такие графы G будем говорить, что они *соединяют множество M* ; вершины из M будем называть *граничными для G* , а оставшиеся вершины, т. е. элементы из $V(G) \setminus M$, — *внутренними вершинами для G* ; также множество M будем называть *границей графа G* и обозначать через ∂G .

Определение 3. Ребро соединяющего графа G , хотя бы один конец которого является граничной вершиной, называется *граничным*. Ребро, у которого оба конца — внутренние вершины графа G , называется *внутренним*.

В рассматриваемых нами геометрических вариационных задачах границы графов всегда будут содержать все вершины степени 1 и 2. Поэтому в дальнейшем мы всегда будем считать, что каждый из рассматриваемых графов G имеет некоторую границу ∂G , возможно пустую, причём все вершины степени 1 и 2 являются граничными.

2.3. Постановка задачи Штейнера

Множество графов в метрическом пространстве X , соединяющих $M \subset X$, обозначим через $\mathcal{G}(M)$. В задаче Штейнера требуется построить граф из $\mathcal{G}(M)$ минимальной возможной длины. Очевидно, если такой граф существует, он является деревом, так как из любого соединяющего графа с циклом можно убрать хотя бы одно ребро из этого цикла так, что при этом длина графа уменьшится и он по-прежнему будет принадлежать $\mathcal{G}(M)$. Поэтому решение задачи Штейнера называется *минимальным деревом Штейнера*. Дадим более формальное определение.

Определение 4. Число $\text{smt}(M) = \inf_{G \in \mathcal{G}(M)} |G|$ называется *длиной минимального дерева Штейнера для M* , а каждый граф G из $\mathcal{G}(M)$, такой что $|G| = \text{smt}(M)$, называется *минимальным деревом Штейнера для M* . Для минимального дерева Штейнера будем использовать сокращение SMT (Steiner minimal tree), а множество всех минимальных деревьев Штейнера для M будем обозначать через $\text{SMT}(M)$.

Определение 5. Внутренние вершины SMT будем называть его *точками Штейнера*.

2.4. Конфигурационное пространство границ

Рассмотрим метрическое пространство X и множество M из m точек в нём. Для удобства будем считать, что точки в M пронумерованы. Тогда M образует

некоторую конфигурацию, задаваемую вектором $(x_1, \dots, x_m)$, где x_i — положение i -й точки в пространстве X . Таким образом, конфигурация M — вектор в конфигурационном пространстве X^m .

Минимальные деревья Штейнера — это графы в метрическом пространстве X с границей M в конфигурационном пространстве X^m , состоящей из m вершин. Так как в графах все вершины различны, то в векторе $(x_1, \dots, x_m)$ не может быть двух одинаковых элементов. Чтобы убрать это ограничение, воспользуемся понятием *сетей*.

3. Сети Штейнера

Здесь мы обобщим понятие минимального дерева Штейнера и научимся работать с пополнением конфигурационного пространства границ.

3.1. Отображение графов

Пусть G_1 и G_2 — произвольные графы.

Определение 6. *Отображением графов $f: G_1 \rightarrow G_2$ назовём отображение $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, которое сохраняет отношение смежности в следующем смысле: если $e = vw \in E(G_1)$ и $f(v) \neq f(w)$, то $f(e) := f(v)f(w) \in E(G_2)$. Если $f(v) = f(w)$, то положим $f(e) := f(v) = f(w) \in V(G_2)$. Таким образом, также определено отображение $f: E(G_1) \rightarrow E(G_2) \sqcup V(G_2)$.*

Определение 7. Если $f(e) \in V(G_2)$, то будем говорить, что отображение $f: G_1 \rightarrow G_2$ *вырождает ребро e* или что *ребро e вырожденное* по отношению к этому отображению; подмножество в $E(G_1)$, составленное из всех вырожденных по отношению к f рёбер, будем обозначать через $E_d^f(G_1)$. Если же $f(e) \in E(G_2)$, то ребро e назовём *невыврожденным*, а подмножество в $E(G_1)$, составленное из всех невырожденных по отношению к f рёбер, обозначим через $E_n^f(G_1)$.

Определение 8. Граф

$$f(G_1) := \left(f(V(G_1)), f(E_n^f(G_1)) \right)$$

назовём *образом графа G_1 при отображении графов f* .

Определение 9. Отображение графов, не имеющее вырожденных рёбер, назовём *невыврожденным*. Таким образом, невырожденные отображения графов f — это в точности те отображения, для которых $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ инъективно.

3.2. Параметризации

Определение 10. Отображение графов $f: G \rightarrow H$ назовём *параметризацией* и будем говорить, что *граф G параметризует граф H* , если

- 1) $f(V(G)) = V(H)$, т. е. отображение $f: V(G) \rightarrow V(H)$ сюръективно;
- 2) для каждого ребра $e' \in E(H)$ существует и единственно ребро $e \in E(G)$, для которого $f(e) = e'$, т. е. отображение $f: E(G) \rightarrow E(H) \sqcup V(H)$ устанавливает биективное соответствие между $E_n^f(G)$ и $E(H)$.

Заметим, что для параметризации $f: G \rightarrow H$ выполняется $f(G) = H$, т. е. граф H является образом параметризации f . Также отметим, что невырожденная параметризация является изоморфизмом графов.

Определение 11. Будем говорить, что параметризация $f: G \rightarrow H$ не склеивает границу графа G , если ограничение отображения $f: V(G) \rightarrow V(H)$ на ∂G инъективно, т. е. это ограничение является биекцией между ∂G и ∂H . В противном случае будем говорить, что f склеивает границу графа G .

3.3. Сети в метрическом пространстве

Рассмотрим множество M в метрическом пространстве X .

Определение 12. Сетью в метрическом пространстве X назовём каждую параметризацию $\Gamma: G \rightarrow H$, где граф G связан и имеет границу $N = \{1, \dots, n\}$, а граф H лежит в X и имеет границу $\Gamma(N)$ (ясно, что H также является связным); при этом граф G естественно называть *параметризующим*, а граф H — *образом сети*. *Длиной сети* $\Gamma: G \rightarrow H$ назовём длину графа H . *Вершинами и рёбрами сети* Γ назовём ограничения Γ на вершины и рёбра графа G соответственно. *Границей сети* назовём ограничение Γ на ∂G .

Замечание 2. Границу сети Γ удобно рассматривать как вектор $(x_1, \dots, x_n)$ конфигурационного пространства X^n , где $x_i = \Gamma(i)$. Только в отличие от границ графов теперь координаты могут совпадать, так как $\Gamma: G \rightarrow H$ может склеивать ∂G . Таким образом, мы дополнили конфигурационное пространство границ.

Замечание 3. Если сеть Γ вырождает ребро vw графа G , причём v — внутренняя вершина, а w — граничная, то в графе H соответствующая вершина граничная.

3.4. Минимальные сети Штейнера

Расширим теперь понятие минимального дерева Штейнера до минимальной сети Штейнера. В минимальной сети Штейнера можно склеивать граничные вершины.

Рассмотрим множество точек M в метрическом пространстве X и всевозможные сети $\Gamma: G \rightarrow H$, для которых $M = \partial H$. Обозначим это множество сетей через $\Gamma(M)$.

Определение 13. Минимальной сетью Штейнера называется любая сеть из $\Gamma(M)$, длина которой равна $\text{smt}(M)$.

Отметим, что граф H обязан быть минимальным деревом Штейнера, так длина сети равна длине её образа по определению. Однако для одного и того

же графа H возможно бесконечно много сетей. Различия между сетями мы рассмотрим подробно в следующем разделе.

4. Топологии сетей

Будем изучать графы со множеством вершин $K = \{1, \dots, k\}$, у которых граница состоит из элементов множества $N = \{1, \dots, n\}$, при этом $n \leq k$.

Графы, отличающиеся лишь перестановкой внутренних вершин, будем считать эквивалентными; это отношение эквивалентности обозначим через σ . Обозначим множество таких классов σ -эквивалентности графов через $\mathcal{G}(N)$. Далее все графы с границей N будем рассматривать как элементы $\mathcal{G}(N)$.

Пусть $G \in \mathcal{G}(N)$, а графы H_1 и H_2 лежат в метрическом пространстве X .

Определение 14. *Типом сети* $\Gamma_1: G \rightarrow H_1$ будем называть её параметризующий граф G .

Определение 15. Пусть сеть $\Gamma_1: G \rightarrow H_1$ имеет множество вырожденных рёбер $E_d^{\Gamma_1}(G)$. *Топологией сети* Γ_1 будем называть пару $(G, E_d^{\Gamma_1}(G))$; будем обозначать её через $\tau(\Gamma_1)$. При этом топологии, отличающиеся лишь перестановкой внутренних вершин графа G , будем считать эквивалентными.

Топология сети однозначно показывает количество элементов в границе и какие вершины склеиваются этой сетью.

Определение 16. Рассмотрим также сеть $\Gamma_2: G \rightarrow H_2$, множество вырожденных рёбер $E_d^{\Gamma_2}(G)$ которой содержится в множестве $E_d^{\Gamma_1}(G)$. В этом случае топология $\tau(\Gamma_2)$ называется *надтопологией* $\tau(\Gamma_1)$, а $\tau(\Gamma_1)$ — *подтопологией* $\tau(\Gamma_2)$. Также будем говорить, что $\tau(\Gamma_2)$ является *надтопологией сети* Γ_1 , а $\tau(\Gamma_1)$ — *подтопологией сети* Γ_2 .

Чтобы говорить о топологии минимального дерева Штейнера, введём следующее определение.

Определение 17. Топологией графа H , лежащего в метрическом пространстве, будем называть граф G , такой что сеть $\Gamma: G \rightarrow H$ не имеет вырожденных рёбер.

4.1. Надтопологии минимальных сетей Штейнера

В экстремальных задачах, о которых идёт речь в данной работе, имеет смысл рассматривать только графы, у которых нет внутренних вершин степени 1 и 2. Далее мы ограничимся рассмотрением только таких графов.

Определение 18. *Бинарным* будем называть дерево, у которого все внутренние вершины имеют степень 3, а граничные — степень 1.

Определение 19. *Расщеплением вершины v степени больше 1* называется замена v на две вершины v и v' и вклейка ребра vv' . При этом множество U вершин, которые были смежны с v , делится на два множества, $U = U_1 \sqcup U_2$,

так, что вершины из U_2 остаются смежными с v , а вершины из U_1 становятся смежными с v' .

Замечание 4. Для сетей Штейнера нам понадобится только такое расщепление вершины, для которого U_1 содержит ровно две вершины, а U_2 — все остальные. Далее всегда будем говорить именно о таком расщеплении.

Предложение 4.1. Для любой сети $\Gamma: G \rightarrow H$, такой что G — дерево без внутренних вершин степени 1 и 2, существует надтопология G' , являющаяся бинарным деревом.

Доказательство. Если тип G сети Γ не является бинарным деревом, то G содержит граничные вершины степени больше 1 или внутренние вершины степени больше 3.

Если G содержит граничную вершину v степени больше 1, то расщепим её, добавив внутреннюю вершину v' . Теперь степень v уменьшилась на 1, а степень v' равна 3. Будем повторять расщепление v , пока её степень не станет равна 1. Прделаем эти действия для каждой граничной вершины степени больше 1.

Если G содержит внутреннюю вершину v степени больше 3, то расщепим её, добавив внутреннюю вершину v' . Теперь степень v уменьшилась на 1, а степень v' равна 3. Будем повторять расщепление v , пока её степень не станет равна 3. Прделаем эти действия для каждой внутренней вершины степени больше 3.

В итоге мы получим искомую надтопологию. $\square$

Замечание 5. Бинарная надтопология не единственна, если в топологии есть граничные вершины степени больше 2.

Замечание 6. Из определения 16 следует, что топология любой сети с образом-деревом (в частности, минимальной сети Штейнера) однозначно определяется через её бинарную надтопологию и список вырожденных рёбер.

4.2. Минимальные параметрические сети

Определение 20. Рассмотрим граф G и множество $M \subset X$. Число

$$\text{mpn}(M, G) = \inf_{\Gamma: G \rightarrow H} |H|,$$

где H соединяет M , называется *длиной минимальной параметрической сети типа G* , а сеть $\Gamma: G \rightarrow H$ типа G , для которой $M = \partial H$, имеющая длину $\text{mpn}(M, G)$, — *минимальной параметрической сетью типа G* .

Замечание 7. Из замечания 6 следует, что

$$\text{smt}(M) = \inf_{G \in \text{Bin}(n)} \text{mpn}(M, G),$$

где $\text{Bin}(n)$ — множество всех бинарных типов с границей из n элементов, а n — число точек в границе M .

5. Минимальные сети Штейнера на евклидовой плоскости

5.1. Геометрическая реализация графов

Так как в данной работе мы имеем дело с евклидовым пространством, в которой каждые две точки x, y соединяются единственным отрезком длины $|xy|$, то этот отрезок мы можем поставить в соответствие ребру xy длины $|xy|$ графа H , лежащего в евклидовом пространстве; назовём его *геометрической реализацией ребра xy* . Множество вершин графа H , объединённое с множеством геометрических реализаций его рёбер, называется *геометрической реализацией графа H* [2]. Далее под графом, соединяющим точки евклидова пространства, или его частью мы будем понимать соответствующую геометрическую реализацию.

5.2. Деревья и сети Штейнера

Утверждение 5.1 [5,7]. Минимальное дерево Штейнера на плоскости должно удовлетворять следующим топологическим и геометрическим условиям:

- все углы между его рёбрами не меньше 120° ;
- все его граничные вершины имеют степени 1, 2 или 3;
- все его внутренние вершины имеют степени 2 и 3.

Из этого следует, что во всех вершинах степени 3 рёбра сходятся под углом ровно 120° . Также из неравенства треугольника получается, что в каждой внутренней вершине степени 2 рёбра сходятся под углом 180° . Такую внутреннюю вершину можно удалить из множества вершин, склеив инцидентные ей рёбра в одно. Или, наоборот, можно добавить сколь угодно много таких вершин, поделив ими существующие рёбра. При этом длина дерева не изменится и, более того, оно останется совпадающим, как подмножество охватывающего пространства, с исходным деревом. Поэтому мы будем считать деревья, отличающиеся только количеством вершин степени 2, эквивалентными. Всё только что сказанное позволяет ограничиться изучением деревьев, не содержащих внутренних вершин степени 2. Далее будем считать, что все внутренние вершины имеют степень 3.

Определение 21. Деревом Штейнера авторы [5] назвали любое дерево, удовлетворяющее условиям утверждения 5.1. Для него будем использовать обозначение ST.

Замечание 8 [8]. На идее утверждения 5.1 основан алгоритм Мелзака построения SMT на плоскости: надо среди всех деревьев Штейнера для M выбрать дерево наименьшей длины.

Определение 22. Топологией Штейнера называется дерево, для которого выполнены ограничения на степени вершин из утверждения 5.1, т. е. топология минимальной сети Штейнера без вырожденных рёбер.

Определение 23. *Сетью Штейнера* будем называть сеть, у которой параметризующий граф и образ имеют топологию Штейнера. Будем обозначать её через SN .

Сеть Штейнера может склеивать граничные вершины, её образ — дерево Штейнера.

Определение 24. Топологии Штейнера, в которых каждая граничная вершина имеет степень 1, называются *полными* топологиями Штейнера или *бинарными топологиями*.

Следующий результат позволяет искать внутренние вершины ST в ограниченной области.

Утверждение 5.2 [5]. *Дерево Штейнера лежит в выпуклой оболочке $\text{conv}(M)$ своей границы M . Каждая вершина степени 3 лежит внутри $\text{conv}(M)$.*

Следующее утверждение следует из условия минимальности длины.

Утверждение 5.3 [8]. *Если ST разбить на две части по граничной вершине степени 2 или 3, то полученные деревья также будут являться ST (для соответствующих границ). Если SMT разбить на две части по граничной вершине степени 2 или 3, то полученные деревья также будут являться SMT (для соответствующих границ).*

Утверждение 5.4. *В евклидовом пространстве для каждой полной топологии Штейнера τ на данной границе существует не более одного дерева типа τ .*

Доказательство. Утверждение следует из выпуклости функционала длины и свойств второй производной (подробности см. в [2]). $\square$

Алгоритм Мелзака основан на этом утверждении. Однако в нём требуется перебрать огромное количество вариантов множеств вырожденных рёбер, чтобы понять, что ни один вариант, кроме одного, не реализуется. В данной работе найдена зависимость топологии дерева Штейнера от конфигурации границы.

5.3. Дерево Штейнера для треугольника на плоскости

Следующие два утверждения описывают ST (они же SMT) для треугольников на евклидовой плоскости. С этого случая начиналась задача Штейнера, и на его основе было выведено утверждение 5.1.

Утверждение 5.5 [2, 5, 6]. *Для треугольников, у которых все углы меньше 120° , дерево Штейнера состоит из трёх рёбер, сходящихся в единственной внутренней точке. Для треугольников с углом не меньше 120° дерево Штейнера состоит из сторон этого треугольника, угол между которыми не меньше 120° .*

Утверждение 5.6 [2, 5]. *Пусть для треугольника ABC с углами, меньшими 120° , построено (минимальное) дерево Штейнера с внутренней точкой O , а на сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники ABC' , BCA' , CAB' . Тогда*

- 1) описанные около треугольников ABC' , BCA' , CAB' окружности пересекаются в точке O ;
- 2) прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в точке O , и длина минимального дерева Штейнера для треугольника ABC равна

$$AO + OA' = AA' = BO + OB' = BB' = CO + OC' = CC'.$$

5.4. Деревья Штейнера для четырёхугольника

Далее приведём несколько утверждений, касающихся четырёхугольников на плоскости.

Для этого нам понадобится понятие усов дерева.

Определение 25. Если $v \in V(t)$ — вершина степени $(k + 1) \geq 3$ в дереве t , смежная с k вершинами $w_1, \dots, w_k$ степени 1, то множество рёбер $\{vw_1, \dots, vw_k\}$ назовём *усами* дерева t . Вершины $w_1, \dots, w_k$ будем называть так же *усами* или *концами усов*.

Замечание 9. Если $k = 2$ и w_1, w_2 лежат в векторном пространстве, то будем говорить, что усы $\{vw_1, vw_2\}$ *опираются* на отрезок w_1w_2 .

В [8] З. А. Мелзак впервые представил алгоритм построения деревьев Штейнера на плоскости за конечное число шагов. Используя алгоритм Мелзака, получаем следующее утверждение для четырёх точек.

Утверждение 5.7. Для четырёхугольника $ABCD$ существует дерево Штейнера с двумя внутренними точками O_1 и O_2 и усами $\{AO_1, BO_1\}$ и $\{CO_2, DO_2\}$, опирающимися на AB и CD соответственно, тогда и только тогда, когда оно может быть построено следующим образом.

1. На AB и CD вне $ABCD$ строятся правильные треугольники ABO'_1 и CDO'_2 .
2. На отрезке $O'_1O'_2$ строятся точки O_1, O_2 вне треугольников ABO'_1 и CDO'_2 так, что отрезок AB виден из O_1 , а CD виден из O_2 под углом 120° .

При этом длина построенного дерева Штейнера равна длине отрезка $O'_1O'_2$.

Следствие 5.8. Отрезок $O'_1O'_2$ образует углы 60° с усами дерева Штейнера:

$$\angle O'_1O_1A = \angle O'_2O_2C = 60^\circ.$$

Определение 26. Будем называть многоугольник *строго выпуклым*, если он выпуклый и никакие три его вершины не лежат на одной прямой.

Следующий результат принадлежит Х. О. Поллаку.

Утверждение 5.9 [10]. Если четырёхточечное подмножество M евклидовой плоскости соединяется минимальным деревом Штейнера с двумя различными внутренними точками, то M — вершины строго выпуклого четырёхугольника.

6. Обозначение топологий сетей Штейнера с четырёхточечной границей

В этом разделе будет описана связь между различными топологиями Штейнера. На основе этого будут введены естественные обозначения топологий Штейнера.

Лемма 6.1. Пусть τ — надтопология топологии τ^* , причём при переходе от τ к τ^* выродилось единственное ребро e ; τ и τ^* — топологии сети Штейнера. Тогда ребро e граничное. Ребро e может быть любым граничным, только если оно не соединяет две граничные вершины степени 3.

Доказательство. Если e внутреннее или соединяет граничные вершины степени 3, то при вырождении ребра e его концы склеиваются в одну вершину степени 4. Но топология Штейнера не содержит вершин степени 4. Значит, e граничное.

Если e не соединяет две граничные вершины степени 3, то сумма степеней на его концах не более 5, при вырождении e его концы склеиваются в граничную вершину степени не больше 3, и значит, получена топология Штейнера. $\square$

Определение 27. Планарной структурой сети Штейнера SN будем называть пару (τ, ord) , где τ — топология SN , а ord — порядок обхода граничных вершин образа SN .

Для обозначения планарной структуры сети Штейнера SN с границей $ABCD$ будем действовать следующим образом. Рассмотрим её бинарный тип τ^b , обозначим его внутреннее ребро через e . Заметим, что в некоторых подтопологиях τ^b ребро e превращается в граничное, и при переходе от таких топологий к τ оно может выродиться. Итак, воспользуемся следующим алгоритмом.

1. Рассмотрим сначала бинарное дерево с усами, опирающимися на отрезки V_1V_2 и V_3V_4 , где $\{V_1, V_2, V_3, V_4\} = \{A, B, C, D\}$. Пусть при обходе дерева против часовой стрелки граничные вершины идут в порядке V_1, V_2, V_3, V_4 . Будем обозначать планарную структуру такой сети через $V_1V_2 - V_3V_4$, если V_1 идёт по алфавиту раньше V_3 , и $V_3V_4 - V_1V_2$ иначе. Так, бинарное дерево с усами $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ и порядком обхода A, B, C, D обозначим через $AB - CD$, с порядком обхода C, B, A, D — через $BA - DC$, а с порядком обхода C, A, B, D — через $BD - CA$.
2. Если в бинарной надтопологии выродились некоторые граничные ребра и не выродилось e , то в обозначении планарной структуры точкам, инцидентным вырожденным рёбрам, соответствуют не большие, а маленькие буквы. При этом если в усах одно ребро вырождено, а другое нет, то маленькие буквы встают рядом с «—», а большие по краям. Маленькие буквы от одних усов упорядочиваются по алфавиту, а большие, как и в первом пункте, следуют в порядке обхода против часовой стрелки. Например, $ab - cD$ обозначает ломаную из двух звеньев, у которой на одном конце —

совпадающие точки A и B , на другом конце — D и звенья сходятся в точке C . Ещё один пример — $Ba - dC$, ломаная, состоящая из отрезков BA , AD и DC .

3. Если в бинарной надтопологии выродилось ещё и внутреннее ребро, то в обозначении новой топологии отсутствует знак черты. При этом обязательно получается звезда, у которой вершина степени 3 граничная. Например, $ABdC$ — это звезда из трёх отрезков DA , DB и DC , у которой вершины A , B , C расположены в порядке обхода против часовой стрелки; эта же звезда, полученная вырождением рёбер в бинарном дереве $BC - AD$, будет обозначаться через $BCdA$.

Также будем использовать удобные обозначения топологий. Для этого возьмём обозначение той из соответствующих планарных структур, у которой слово-обозначение идёт раньше по алфавиту, и перед обозначением поставим знак $\&$. Например, бинарный тип с усами $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ будет обозначаться через $\&AB - CD$.

7. Алгоритм поиска топологии сети Штейнера бинарного типа $\&AB - CD$ для различных конфигураций

Определение 28. *Стратом размерности r* будем называть область, гомеоморфную r -мерному открытому диску и не пересекающуюся с другими стратами на бифуркационной диаграмме. Таким образом, бифуркационную диаграмму можно рассматривать как стратификацию пространства.

Определение 29. *Типом бифуркационной диаграммы* будем называть набор реализующихся для данной конфигурации граничных вершин стратов и их взаимное расположение.

Теорема 7.1. *Для нахождения топологии (планарной структуры) сети Штейнера бинарного типа $\&AB - CD$, которая реализуется на данной конфигурации границы $ABCD$, подходит следующий алгоритм.*

1. Оценить углы треугольника $\triangle ABC$ и найти тот страт на рис. 1 или его отражении относительно прямой AB (в зависимости от ориентации треугольника $\triangle ABC$), в котором расположена точка C . Найти соответствующий этому страту тип бифуркационной диаграммы на рис. 4.
2. Найти страт на соответствующем типе бифуркационной диаграммы на рис. 4, в котором лежит точка D . Воспользоваться теоремами 9.1—9.4.

В следующих разделах будет дано обоснование этому алгоритму и будут построены различные типы бифуркационных диаграмм.

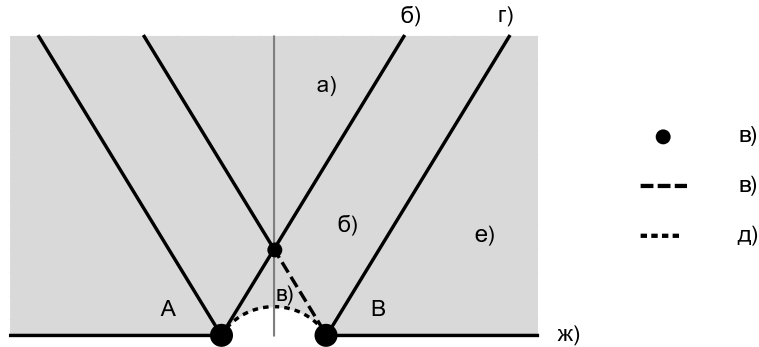


Рис. 1. При нахождении точки C в незакрашенной области нет деревьев Штейнера типа $AB - CD$. Закрашенная часть плоскости делится на страты так, что при нахождении точки C в одном страте реализуется один тип бифуркационной картины, параметризованный точкой D , для бинарного типа $AB - CD$ (в разных стратах могут быть одинаковые типы). Все лучи пересекаются под углом 60° , а дуга AB — множество точек, из которых отрезок AB виден под углом 120° . Для каждого страта справа от вертикальной прямой (она не является стратом) соответствующий тип бифуркационной диаграммы изображён на рис. 4. Для каждого страта s слева от вертикальной прямой соответствующий тип бифуркационной диаграммы симметричен типу, который соответствует страту, симметричному s .

8. Страты размерностей 0 и 1 на бифуркационных диаграммах

Здесь мы докажем несколько фактов о взаимном расположении прямых и окружностей, которые являются стратами на бифуркационных диаграммах. То, что это действительно страты, будет доказано далее.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC . Введём следующие обозначения.

A' — вершина правильного треугольника $A'BC$, такая что A и A' лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC .

A^0 — вершина правильного треугольника BA^0C , такая что точки A и A^0 лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC .

A^b и A^c — вершины правильных треугольников $\triangle AA'A^b$ и $\triangle AA'A^c$, при этом треугольник $\triangle ABC$ ориентирован так же, как и $\triangle AA^bA^c$.

Аналогично точкам A' , A^0 , A^b , A^c строим точки B' , C' , B^0 , C^0 , B^c , B^a , C^a , C^b .

Будем обозначать окружность, описанную около треугольника XYZ , через (XYZ) , а луч с началом в точке X , проходящий через Y , — через (XY) . Некоторую точку, расположенную на (XY) , будем обозначать через X_y (её точное положение либо не важно, либо отдельно оговаривается в каждом случае). То,

что точки Z и W лежат в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через точки X и Y , будем обозначать через $Z \sim W(XY)$, а то, что в разных полуплоскостях, — через $Z \approx W(XY)$.

В [4] авторы показали, что для любого треугольника $\triangle ABC$ выполняется следующее.

Утверждение 8.1. Треугольник $\triangle A^b B C^b$ правильный, а четырёхугольник $AA^b C^b C$ — параллелограмм.

Продолжая утверждение 8.1, докажем следующую теорему.

Теорема 8.2. Для любого треугольника $\triangle ABC$ верны следующие утверждения (рис. 2).

1. $(C^b B^0)$, $(C' A)$, $(CC' C^b)$, $(CB^0 A)$ пересекаются в одной точке $C_{b^0}^b$.
2. $(C^b B)$, (CA) , $(CC' C^b)$, $(C' BA)$ пересекаются в одной точке C_b^b .
3. $(C^b A')$, $(C' B)$, $(CC' C^b)$, (CBA') пересекаются в одной точке $C_{a'}^b$.
4. $C^b B^0 AB$ — параллелограмм.
5. $C^b A' AC'$ — параллелограмм.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $C_{b^0}^b = (C^b B^0) \cap (C' A)$. Треугольник $\triangle C^b B^0 C$ получается из $\triangle C' AC$ поворотом на 60° вокруг точки C . Значит, $\angle C' C_{b^0}^b C^b = 60^\circ$, угол $\angle AC_{b^0}^b B^0$ равен 60° или 120° в зависимости от того, пересекает ли луч $(C^b B^0)$ дугу $B^0 A$ или AC окружности $(B^0 AC)$. Поэтому $C_{b^0}^b$ лежит на окружностях $(CC' C^b)$ и $(CB^0 A)$.

Докажем утверждение 2. Пусть $C_b^b = (C^b B) \cap (CA)$. Из утверждения 8.1 следует, что $\angle C^b C_b^b C = \angle BC_b^b C = \angle C_b^b C^b A^b = 60^\circ$, значит, $C_b^b \in (CC' C^b)$ и $C_b^b \in (C' BA)$, т. е. этот пункт также верен.

Докажем утверждение 3. Пусть $C_{a'}^b = (C^b A') \cap (C' B)$. Треугольник $\triangle A' C^b C$ получается из $\triangle BC' C$ поворотом на 60° вокруг точки C , поэтому $\angle C' C_{a'}^b C^b = \angle BC_{a'}^b A' = 60^\circ$, значит, $C_{a'}^b$ лежит на окружностях $(CC' C^b)$ и (CBA') .

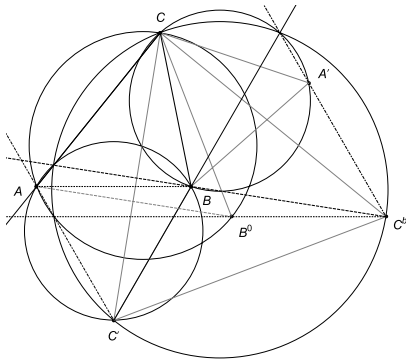


Рис. 2. Иллюстрация теоремы 8.2

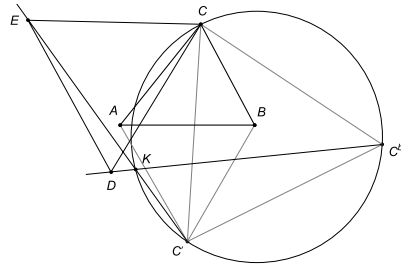


Рис. 3. Иллюстрация к лемме 8.3

Докажем утверждение 4. Отрезок BA получается из $C'A$ поворотом на 60° вокруг точки A , а, как было замечено в пункте 1, $C^b B^0$ — из $C'A$ поворотом на 60° вокруг C . Поэтому $(C^b B^0) \parallel (BA)$ и $C^b B^0 = BA$.

5. Как было замечено в пункте 3, $\angle C^b C_a^b C' = 60^\circ = \angle C_a^b C' A$, поэтому $(C^b A') \parallel (C' A)$. Отрезки $C^b C'$ и $A' A$ параллельны, так как оба составляют с CC' угол 60° . Значит, $C^b A' AC'$ — параллелограмм. $\square$

Аналогично точкам C_{b0}^b, C_b^b, C_a^b строятся точки C_{a0}^a, B_a^a, A_c^b и т.д.

Через E будем обозначать такую вершину правильного треугольника $\triangle CDE$, что $E \approx B(CD)$.

Докажем ещё один факт.

Лемма 8.3. Пусть K — любая точка на дуге CC' окружности $(CC'C^b)$, D — любая точка вне $(CC'C^b)$. Тогда $D \in C^b K$ тогда и только тогда, когда $E \in (C'K)$ (рис. 3).

Доказательство. Пусть $D \in C^b K$. Построим отрезок DF , такой что $\angle CDF = 60^\circ$, $F \approx B(CD)$ и $F \in (C'K)$.

Заметим, что $\angle CKF = 60^\circ$, так как $K \in (CC'C^b)$, а также $\angle FKD = \angle C'KC^b = 60^\circ$, так как треугольник $\triangle CC'C^b$ правильный. Это равносильно тому, что точки C, K, D и F лежат на одной окружности, так как $\angle CKF = \angle CDF = 60^\circ$. Также $\angle DFC = 180^\circ - \angle CKD = 60^\circ$, поэтому треугольник $\triangle CDF$ правильный. Значит, $F = E$, и E действительно лежит на $(C'K)$.

Так как правильный треугольник в фиксированной полуплоскости строится единственным образом, то из того, что $E \in (C'K)$, следует, что $D \in (C^b K)$. $\square$

9. Локально-минимальные топологии одного бинарного типа

для различных четырёхточечных конфигураций

Рассмотрим конфигурацию M точек A, B, C, D . Зафиксируем на плоскости три точки A, B, C . Четвёртую точку D будем располагать произвольно на плоскости. Без ограничения общности рассмотрим бинарный тип $\&AB - CD$ и его подтопологии. Найдём, какие топологии типа $\&AB - CD$ реализуются в зависимости от конфигурации границы.

Сначала пусть точки A, B, C различны. Без ограничения общности будем считать, что треугольник $\triangle ABC$ обходится против часовой стрелки.

Границу произвольного множества s будем обозначать через ∂s , его замыкание — через $\bar{s}$, открытое множество, ограниченное границей l , — через $\imath(l)$.

Через $\angle A, \angle B$ и $\angle C$ обозначим углы треугольника $\triangle ABC$.

Будем пользоваться обозначениями, введёнными в разделе 8. Приведём обозначения некоторых точек: C_c^b симметрична C^b относительно C , C_c^a симметрична C^a относительно C , A_c' симметрична A' относительно C , A_c^0 симметрична A^0 относительно C , B_c' симметрична B' относительно C , B_c^0 симметрична B^0 относительно C .

Все углы будем отсчитывать против часовой стрелки.

Будем говорить, что топология τ (планарная структура α) реализуется на множестве Ω для $M = (A, B, C, D)$, если при $D \in \Omega$ для M реализуется дерево Штейнера топологии τ (планарной структуры α).

Покажем, что плоскость стратифицируется так, что на каждом страте (кроме одного, на котором не реализуется ни одна топология типа $\&AB - CD$; обозначим его через U) реализуется только одна планарная структура типа $\&AB - CD$ и на разных двумерных стратах реализуются разные планарные структуры. Такую стратификацию обозначим через $S(\&AB - CD)$.

Замечание 10. Если $\angle C > 120^\circ$, то ни при каком положении точки D не существует дерева Штейнера типа $\&AB - CD$. Если $\angle C = 120^\circ$, то единственным возможным деревом Штейнера типа $\&AB - CD$ является $ABcD$, и оно реализуется тогда и только тогда, когда точка D лежит на продолжении биссектрисы угла $\angle C$.

Далее в этом разделе рассматриваем треугольники $\triangle ABC$ с $\angle C < 120^\circ$.

Сначала рассмотрим двумерные страты.

9.1. Двумерные страты на бифуркационной диаграмме

Теорема 9.1. Стратификация $S(\&AB - CD)$ содержит следующие двумерные страты с соответствующими планарными структурами.

	Планарная структура	Страт	Когда есть в $S(\&AB - CD)$
1	$Ab - dC$	$\imath((BCA^0)) \cap \imath((BCA') \setminus \overline{\imath(\angle BC'A)})$	$\angle B > 60^\circ$
2	$Ab - DC$	$\imath(\angle BA^0 C_{a0}^a) \cap \imath(\angle BA^0 C) \setminus \imath(\overline{(BA^0 C)})$	$\angle B > 60^\circ$
3	$Ab - cD$	$\imath(\angle A_c^0 C A'_c)$	$\angle B > 120^\circ$
4	$Ab - CD$	$\imath(\angle CC^b A') \setminus \imath(\overline{(CA'B)})$	$\angle B > 120^\circ$
5	$AB - dC$	$\imath((CC'C^b)) \cap \imath((CC'C^a)) \cap \imath(\angle BC'A) \setminus \imath(\overline{(BC'A)})$	$\angle A, \angle B < 180^\circ$
6	$AB - DC$	$\imath(\angle A^0 C^a C) \cap \imath(\angle AC^a C) \setminus \imath(\overline{(CC'C^a)})$	$\angle B < 120^\circ$
7	$AB - cD$	$\imath(\angle C_c^a C C_c^b)$	$\angle A, \angle B < 120^\circ$
8	$AB - CD$	$\imath(\angle CC^b B^0) \cap \imath(\angle CC^b B) \setminus \imath(\overline{(CC'C^b)})$	$\angle A < 120^\circ$
9	$Ba - dC$	$\imath((ACB^0)) \cap \imath((ACB') \setminus \overline{\imath(\angle BC'A)})$	$\angle A > 60^\circ$
10	$Ba - DC$	$\imath(\angle B'C^a C) \setminus \imath(\overline{(CB'A)})$	$\angle A > 120^\circ$
11	$Ba - cD$	$\imath(\angle B'_c C B_c^0)$	$\angle A > 120^\circ$
12	$Ba - CD$	$\imath(\angle C_{b0}^b B^0 A) \cap \imath(\angle CB^0 A) \setminus \imath(\overline{(CB^0 A)})$	$\angle A > 60^\circ$

Доказательство. Обоснуем строку 1. Найдём страт, на котором реализуется планарная структура $Ab - dC$. Дерево Штейнера этой планарной структуры представляет собой ломаную, в которой $\angle ABD \geq 120^\circ$ и $\angle BDC \geq 120^\circ$. Первое условие означает, что точка D лежит вне $\angle BC'A$, а второе — что D лежит внутри окружностей (BCA^0) и (BCA') .

Заметим, что в зависимости от углов треугольника $\triangle ABC$ страт планарной структуры $Ab - dC$ может выглядеть по-разному. Если $\angle B \leq 60^\circ$, то $A^0 \sim C(AB)$ и $i((BCA^0)) \subset i(\angle BC'A) = \emptyset$, поэтому этого страта не будет. Если $\angle B > 60^\circ$, то $i((BCA^0)) \subset i(\angle BC'A) \neq \emptyset$, и этот страт будет.

Обоснуем строку 2. Планарная структура $Ab - DC$ означает, что ST делится точкой B на отрезок AB и дерево Штейнера для $\triangle BDC$, кроме того, $D \sim A(BC)$. Это означает, что

- 1) все углы $\triangle BDC$ меньше 120° ;
- 2) $\angle EBA \geq 120^\circ$;
- 3) $D \sim A(BC)$.

Комбинация условий 1) и 3) равнозначна тому, что D лежит внутри угла $\angle BA^0C$ и вне (BA^0C) . Покажем, что если $D \in (A^0B)$ вне (BA^0C) , то выполнено условие 2).

Пусть F — точка, лежащая на (BA') и такая, что $\angle FDC = 60^\circ$. Так как $\angle FBC = 60^\circ$, то F, D, B, C лежат на одной окружности. $\angle DBF = 60^\circ$, так как треугольники $\triangle BCA^0$ и $\triangle BCA'$ правильные. Значит, $\angle CFD = = 180^\circ - \angle DBF - \angle FBC = 60^\circ$, поэтому треугольник $\triangle CDF$ правильный. Так как правильный треугольник строится в фиксированной полуплоскости единственным образом, то $D \in (A^0B) \setminus i((BA^0C))$ равнозначно тому, что $E \in (BA') \setminus i((BA'C))$.

Если двигать точку D от (A^0B) против часовой стрелки вокруг точки A^0 , то условие 2) будет выполняться, пока D не достигнет некоторой границы. Найдём её.

По лемме 8.3 D лежит на луче (C^aA^0) начиная от точки $C_{a^0}^a$ тогда и только тогда, когда $E \in (C'B)$, а именно в этом случае $\angle EBA = 120^\circ$.

Если $\angle B \leq 60^\circ$, то $C \sim A(C^aA^0)$ или C^a, A^0, A лежат на одной прямой так, что $i(\angle BA^0C)$ не пересекается с (C^aA^0) , и планарная структура $Ab - DC$ не реализуется.

Если $60^\circ < \angle B < 120^\circ$, то (C^aA^0) делит $\angle BA^0C$ на два угла. Условие 2) реализуется тогда и только тогда, когда $D \in i(\angle BA^0C_{a^0}^a) \cup (A^0C_{a^0}^a)$ вне (BA^0C) .

Если $\angle B \geq 120^\circ$, то луч (C^aA^0) расположен так, что если D лежит внутри угла $\angle BA^0C$, то $\angle C'BE \leq 180^\circ$.

Строка 2 обоснована.

Обоснуем строку 3. Когда $\angle B \geq 120^\circ$, возможна планарная структура $Ab - cD$. Она реализуется в том и только том случае, когда $\angle BCD \geq 120^\circ$, что и означает, что $D \in i(\angle A_c^0CA'_c)$.

Обоснуем строку 4. Планарная структура $Ab - CD$ означает, что ST делится точкой B на отрезок AB и дерево Штейнера для $\triangle BDC$, кроме того, $D \sim A(BC)$. Это означает, что

- 1) все углы $\triangle BDC$ меньше 120° ;
- 2) $\angle EBA \geq 120^\circ$;
- 3) $D \sim A(BC)$.

Комбинация условий 1) и 3) равнозначна тому, что D лежит внутри угла $\angle CA'B$ и вне $(CA'B)$. Из условия 3) следует, что $E \sim A(BC)$. Значит, планарная структура $Ab - CD$ реализуется, только если $\angle B > 120^\circ$.

Найдём те положения точки D , при которых $\angle EBA = 120^\circ$, т. е. $E \in (C'B)$. По лемме 8.3 вне $(CC'C^b)$ это точки луча (C^bA') , откуда и следует строка 4.

Обоснуем строку 5. Планарная структура $AB - dC$ реализуется тогда и только тогда, когда ST состоит из отрезка CD и дерева Штейнера для $\triangle ABD$. Это равнозначно тому, что $120^\circ \leq \angle CDC' \leq 240^\circ$, а также все углы в треугольнике $\triangle ABD$ меньше 120° .

Первое из этих условий означает, что D лежит внутри или на границе $(CC'C^a)$ и $(CC'C^b)$. Второе — что D лежит внутри $\angle BC'A$ и вне $(BC'A)$, что и доказывает строку 5.

Обоснуем строку 6. Планарная структура $AB - DC$ означает, что ST содержит две внутренние точки.

Пусть внутренние точки $ST - O_1$ и O_2 , O_1 смежна с A и B , а O_2 — с C и D . По следствию 5.8 $\angle CO_2C' = 120^\circ$, и так как порядок обхода вершин в ST A, B, D, C , то O_2 лежит на $(CC'C^a)$. Также $\angle DO_2C = 120^\circ$, поэтому точки C^a, O_2 и D лежат на одной прямой (ведь $\angle CO_2C^a = 60^\circ$). При этом точка D может быть в любом месте на луче (C^aO_2) вне $(CC'C^a)$. Осталось найти возможные положения точки O_2 .

Точка O_2 должна лежать на $(CC'C^a)$ внутри угла A .

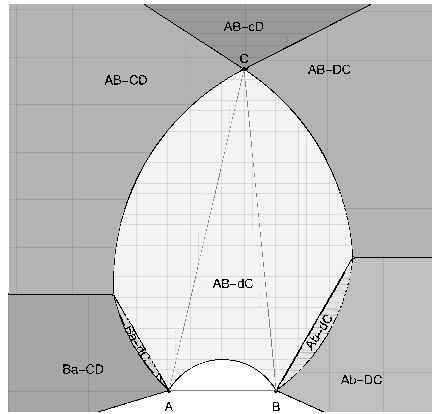
Точка O_2 должна лежать внутри угла $\angle BC'A$, так как $A \approx B(C'O_2)$. Это условие может выполняться, только если $\angle B < 120^\circ$. Точка пересечения $(CC'C^a)$ и $(C'B) - C_{a_0}^a$, т. е. O_2 лежит на дуге $C_{a_0}^aC$, а D расположена внутри $\angle C_{a_0}^aC^aC$ и вне $(CC'C^a)$.

Единственное, что осталось проверить, — что $\angle AO_2B < 120^\circ$, иначе усы ST пересекутся. Значит, O_2 должна лежать вне (ABC') . Но $(CC'C^a) \cap (ABC') = C_a^a$, эта точка лежит также на (C^aA) и BC . Получаем, что O_2 лежит на дуге C_a^aC . Значит, D лежит внутри $\angle C_a^aC^aC$ и вне $(CC'C^a)$.

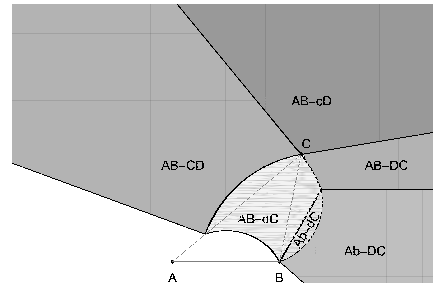
Пересечение полученных областей и даёт страт из строки 6.

Обоснуем строку 7. Планарная структура $AB - cD$ означает, что ST делится точкой C на отрезок CD и дерево Штейнера для $\triangle ABC$. То, что $\angle C < 120^\circ$, мы приняли в самом начале раздела 9. Углы $\angle A$ и $\angle B$ также должны быть меньше 120° . Также $120^\circ < \angle DCC' < 240^\circ$, что то же самое, что $D \in \iota(\angle C_c^aCC_c^b)$.

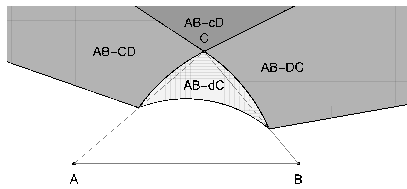
Строка 8 обосновывается аналогично строке 6.



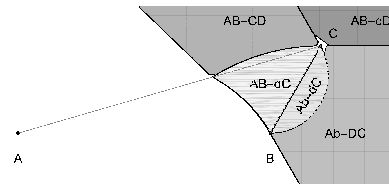
а) $60^\circ < \angle A < 120^\circ, 60^\circ < \angle B < 120^\circ$



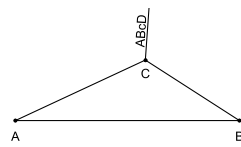
б) $0^\circ < \angle A \leq 60^\circ, 60^\circ < \angle B < 120^\circ$



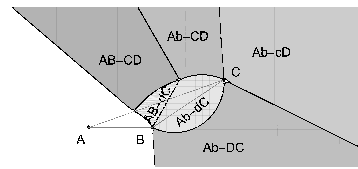
в) $0^\circ < \angle A \leq 60^\circ, 0^\circ < \angle B \leq 60^\circ, \angle C < 120^\circ$



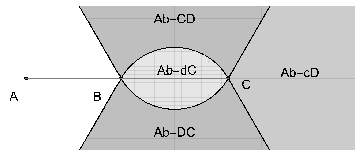
г) $\angle B = 120^\circ$



д) $\angle C = 120^\circ$



е) $120^\circ < \angle B < 180^\circ$



ж) $\angle B = 180^\circ$

Рис. 4. Различные типы бифуркационных диаграмм

Строка 9 обосновывается аналогично строке 1.

Строка 10 обосновывается аналогично строке 4.

Строка 11 обосновывается аналогично строке 3.

Строка 12 обосновывается аналогично строке 2.

□

Итак, мы разделили плоскость на страты различных планарных структур и страт U . При переходе из одного страта на другой дерево Штейнера типа $\&AB - CD$ меняет планарную структуру или перестаёт существовать. Таким образом, мы получили бифуркационные диаграммы планарных структур сетей Штейнера типа $\&AB - CD$ для всевозможных конфигураций точек A, B, C .

Из последнего столбца таблицы теоремы 9.1 следует, что при изменении углов $\angle A$ и $\angle B$ некоторые страты могут исчезать или появляться, т. е. будет меняться тип бифуркационной диаграммы.

Зафиксируем теперь только точки A и B , а точку C будем двигать в той полуплоскости, в которой вершины треугольника $\triangle ABC$ обходятся против часовой стрелки (это как раз обеспечит изменение углов $\angle A$ и $\angle B$). Тогда полуплоскость стратифицируется, но теперь в зависимости от того, какой тип бифуркационной диаграммы получится при попадании C в каждый страт. Эта стратификация представлена на рис. 1.

Очевидно, что если продолжить рис. 1 на всю плоскость, имея в виду топологию, то верхняя полуплоскость отразится относительно прямой AB и получится полностью симметричная относительно AB картина. Если же рассматривать планарные структуры, то деление на области будет такое же, но, так как ориентация треугольника $\triangle ABC$ будет другая, то и все новые страты будут соответствовать новым типам бифуркационных диаграмм.

На рис. 4 представлены различные типы бифуркационных диаграмм, когда C попадает в разные страты на рис. 1. Одним цветом выделены страты одинаковых топологий. В белом страте нет деревьев Штейнера бинарного типа $\&AB - CD$.

Посмотрим, что происходит на границах двумерных стратов.

9.1.1. Границы двумерных стратов на бифуркационной диаграмме

Теорема 9.2. Если страт является частью границы страта U вне или на границе треугольника $\triangle ABC$ и не является вершиной треугольника $\triangle ABC$, то на нём не реализуется никакая топология типа $\&AB - CD$.

Доказательство. Такой страт — граница страта либо топологии $\&AB - CD$, либо топологии $\&Ab - CD$, либо топологии $\&Ba - CD$. На нём $\angle EBA = 120^\circ$, что означает, что там не реализуется этот бинарный тип. $\square$

Так же, как и для четырёх граничных точек, можно построить бифуркационные диаграммы для n -точечных границ при любом n , если зафиксировать $n - 1$ точку и двигать одну точку. Они представляют стратификацию плоскости на области различных топологий некоторого бинарного типа.

Теперь посмотрим, что происходит на стратах размерностей 1 и 0, не лежащих на границе U , при любом n .

Теорема 9.3. Если общая граница γ двух областей разных топологий τ_1 и τ_2 одного бинарного типа является одномерным стратом, то на ней реализуется та из двух топологий τ_1 и τ_2 , где больше вырожденных рёбер, при этом либо τ_1 — надтопология τ_2 , либо наоборот.

Доказательство. При переходе из страта τ_1 в страт τ_2 через γ хотя бы одно ребро меняет своё свойство вырожденности. При этом изменение свойства происходит в тот момент, когда соответствующий угол равен 120° . Множество таких моментов и есть граница γ . При равенстве угла 120° ребро вырожденное, что и означает утверждение теоремы. $\square$

Обозначим множество невырожденных рёбер топологии τ через $E_N(\tau)$, а множество вырожденных рёбер через $E_D(\tau)$.

Теорема 9.4. Если некоторая точка X является нульмерным стратом, т. е. точкой пересечения нескольких одномерных стратов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ с топологиями $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ соответственно ($m > 2$), то на X реализуется такая топология τ , у которой $E_N(\tau) = \bigcap_{i=1}^n E_N(\tau_i)$, $E_D(\tau) = \bigcup_{i=1}^n E_D(\tau_i)$.

Доказательство. На γ_i некоторый угол α_i равен 120° . Значит, в точке X $\alpha_i = 120^\circ$ для всех i от 1 до m , и все рёбра, которые были вырожденными хотя бы на одном страте γ_i , будут вырожденными и в X . Это доказывает теорему. $\square$

9.2. Совпадающие точки в границе

Если какие-то граничные точки совпали, то мы получим сеть Штейнера, у которой образ совпадает с деревом Штейнера для меньшего числа точек, а соответствующие рёбра вырождены.

Литература

- [1] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.
- [2] Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. — М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [3] Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. — М.: МЦНМО, 2017.
- [4] Du D. Z., Hwang F. K., Song G. D., Ting G. Y. Steiner minimal trees on sets of four points // Discrete Comput. Geom. — 1987. — Vol. 2. — P. 401–414.
- [5] Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. — 1968. — Vol. 16, no. 1. — P. 1–29.
- [6] Hwang F. K., Richards D. S., Winter P. The Steiner Tree Problem. — North Holland, 1992. — (Ann. Discrete Math.; Vol. 53).
- [7] Jarník V., Kössler O. O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů // Čas. Pěst. Mat. Fys. — 1934. — Vol. 63. — P. 223–235.
- [8] Melzak Z. A. On the problem of Steiner // Can. Math. Bull. — 1961. — Vol. 4. — P. 143–148.
- [9] Ollerenshaw K. Minimal networks linking four points in a plane // Inst. Math. Appl. — 1978. — Vol. 15. — P. 208–211.

- [10] Pollak H. O. Some remarks on the Steiner problem // J. Combin. Theor. Ser. A. — 1978. — Vol. 24. — P. 278—295.
- [11] Weng J. F. Variational approach and Steiner minimal trees on four points // Discrete Math. — 1994. — Vol. 132, no. 1-3. — P. 349—362