Кольца Понтрягина рациональных гомологий пространств петель калибровочных групп и пространств связностей на четырёхмерных многообразиях

С. ТЕРЗИЧ
Университет Черногории, Черногория
e-mail: sterzic@ac.me

УДК 515.164.32

Ключевые слова: четырёхмерные многообразия, кольцо Понтрягина, калибровочная группа, пространство связностей.

Аннотация

Методами теории рационального гомотопического типа мы доказываем, что ранги гомотопических групп произвольного односвязного четырёхмерного многообразия зависят только от второго числа Бетти многообразия. Также мы рассматриваем пространства петель калибровочных групп и пространств связностей на односвязных четырёхмерных многообразиях и получаем явное описание колец Понтрягина их рациональных гомологий.

Abstract

S. Terzić, The rational homology ring of the based loop space of the gauge groups and the spaces of connections on a four-manifold, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 6, pp. 205—215.

We provide a rational-homotopic proof that the ranks of the homotopy groups of a simply connected four-manifold depend only on its second Betti number. We also consider the based loop spaces of the gauge groups and the spaces of connections of a simply connected four-manifold and, using the models from rational homotopy theory, we obtain explicit formulas for their rational Pontryagin homology rings.

1. Введение

На рациональную теорию гомотопий можно смотреть, в очень грубом приближении, как на теорию гомотопий по модулю кручения. В 1960-х годах Д. Сулливан доказал, что односвязные топологические пространства и их непрерывные отображения допускают рационализацию, т. е. по односвязному топологическому пространству X и по непрерывному отображению $f\colon X \to Y$ естественным образом строятся пространство $X_{\mathbb{Q}}$ и отображение $f_{\mathbb{Q}}\colon X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ так, что имеют место естественные изоморфизмы $H_k(X_{\mathbb{Q}}) = H_k(X, \mathbb{Q})$ и

$\pi_k(X_{\mathbb{Q}}) = \pi_k(X) \otimes \mathbb{Q}$. Рациональный гомотопический тип пространства X определяется как гомотопический тип $X_{\mathbb{Q}}$, а рациональный гомотопический класс отображения $f\colon X \to Y$ определяется как гомотопический класс $f_{\mathbb{Q}}\colon X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$. Теория рационального гомотопического типа изучает свойства пространств и их отображений, которые зависят только от рационального гомотопического типа пространств и рационального гомотопического класса отображений.

Одно из важнейших преимуществ рационального гомотопического типа — это вычислимость инвариантов рационального гомотопического типа для широкого класса объектов. Оно связано с явным описанием алгебраических моделей, полученных Д. Квилленом [11] и Д. Сулливаном [13]. В частности, для топологических пространств их рациональный гомотопический тип определяется классом изоморфизма соответствующей алгебраической модели.

В этой работе мы продолжаем наши исследования по рациональному гомотопическому типу односвязных четырёхмерных многообразий, калибровочных групп и пространств связностей. Мы доказываем, пользуясь исключительно методами теории рационального гомотопического типа, что рациональные гомотопические группы односвязного четырёхмерного многообразия определяются его вторым числом Бетти. Также мы рассматриваем пространства петель калибровочных групп и пространств связностей на односвязных четырёхмерных многообразиях. Используя результаты работы [15] о рациональных когомологиях калибровочных групп и пространств связностей, мы получаем явное описание колец Понтрягина рациональных гомологий соответствующих пространств петель.

Подробное изложение теории рационального гомотопического типа можно найти, например, в [6].

2. О гомотопических группах односвязных четырёхмерных многообразий

2.1. Обзор известных результатов

Пусть M — замкнутое односвязное четырёхмерное многообразие. Напомним, что *формой пересечения* многообразия M называется симметрическая билинейная форма

$$Q_M\colon H^2(M,\mathbb{Z}) \times H^2(M,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z},$$

заданная формулой

$$Q_M(x,y) = \langle x \cup y, [M] \rangle\,,$$

где $[M] \in H_4(M,\mathbb{Z})$ — фундаментальный класс многообразия M.

Из результатов Понтрягина и Уолла (см. [7]) следует, что гомотопический тип односвязного четырёхмерного многообразия M определятся его формой пересечения Q_M.

Над полем $\mathbb{R}$ форма пересечения Q_M может быть приведена к диагональному виду с ± 1 на главной диагонали. Придерживаясь стандартных обозначений, положим, что $b_2^+(M)$ — количество $+1$, а $b_2^-(M)$ — количество -1 в диагональном виде формы Q_M. Величины $b_2(M) = b_2^+(M) + b_2^-(M)$ и $\sigma(M) = b_2^+(M) - b_2^-(M)$ называются *рангом* и *сигнатурой* многообразия M.

Рациональный гомотопический тип произвольного односвязного четырёхмерного многообразия согласно [14] определяется рангом и сигнатурой этого многообразия.

Алгебра вещественных когомологий многообразия M при $b_2(M) \geqslant 2$ легко описывается с помощью формы пересечения. А именно,

$$H^*(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{b_2^+}, x_{b_2^+ + 1}, \ldots, x_{b_2}]/I, \tag{1}$$

где $\deg x_i = 2$, а идеал соотношений I порождён равенствами

$$x_1^2 = \cdots = x_{b_2^+}^2 = -x_{b_2^+ + 1} = \cdots = -x_{b_2^2}, \quad x_i x_j = 0, \quad i \neq j.$$

Любое односвязное четырёхмерное многообразие формально в смысле теории рационального гомотопического типа. С помощью метода минимальных моделей Сулливана, применённого к алгебре когомологий многообразия M, в [14] были получены формулы для рангов третьей и четвёртой гомотопической групп M:

$$\operatorname{rk} \pi_2(M) = b_2(M), \quad \operatorname{rk} \pi_3(M) = \frac{b_2(b_2+1)}{2} - 1, \quad \operatorname{rk} \pi_4(M) = \frac{b_2(b_2^2 - 4)}{3}.$$

Вычисление, проведённое в [14], даёт возможность предположить, что ранги гомотопических групп M зависят только от второго числа Бетти односвязного четырёхмерного многообразия M, но явное доказательство этого утверждения в [14] не получено.

Формула для рангов гомотопических групп произвольного односвязного четырёхмерного многообразия была выведена позже в [5]. В этой работе было доказано, что любое такое многообразие является базой S^1-расслоения с тотальным пространством вида $\#_{b_2(M)-1} S^2 \times S^3$, откуда вытекает, что

$$\pi_k(M) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{b_2(M)} \mathbb{Z} & \text{для } k = 2, \\ \pi_k(\#_{b_2(M)-1} S^2 \times S^3) & \text{для } k > 2. \end{cases}$$

В частности, эта формула означает, что ранги гомотопических групп M зависят только от второго числа Бетти $b_2(M)$. Позже в этом направлении были получены более сильные результаты. Обозначим через ΩM пространство петель многообразия M с отмеченной точкой. В [3] было показано, что для односвязных четырёхмерных многообразий M и N имеет место следующее утверждение:

$$\Omega M \cong \Omega N \Longleftrightarrow H^2(M) \cong H^2(N).$$

Методами теории гомотопий доказывается, что с точностью до гомотопической эквивалентности пространство ΩM разлагается в произведение

$$\Omega M \cong S^1 \times \Omega(S^2 \times S^3) \times \Omega\Big(J \vee \big(J \wedge \Omega(S^2 \times S^3)\big)\Big),$$

где $J = \vee_{i=1}^{k-2}(S^2 \vee S^3)$ для $k > 2$ и $J = \star$ для $k = 2$. Так как $H^2(M) = \pi_2(M) = \bigoplus_{b_2(M)} \mathbb{Z}$, то пространства петель ΩM и ΩN тогда и только тогда гомотопически эквивалентны, когда $b_2(M) = b_2(N)$. С другой стороны, применение метода минимальных моделей Сулливана к алгебре (1) показывает, что ранги гомотопических групп односвязного четырёхмерного многообразия M выражаются через ранг и, возможно, сигнатуру формы пересечения Q_M. Из этих рассуждений следует, что ранги этих гомотопических групп M зависят только от $b_2(M)$.

Также мы хотели бы упомянуть результаты работы [1], в которой получены явные формулы для рангов гомотопических групп надстройки конечного симплициального комплекса:

$$\operatorname{rk} \pi_j(\Sigma X) = \frac{(-1)^j}{j} \sum_{d|j} (-1)^d \mu\left(\frac{i}{d}\right) S_d\bigl(2 - P(z)\bigr).$$

Здесь $P(z)$ — многочлен Пуанкаре комплекса X, μ — функция Мёбиуса, $S_d\bigl(2 - P(z)\bigr)$ — многочлен Ньютона от корней возвратного к $2 - P(z)$ многочлена.

Для односвязного четырёхмерного многообразия M в [2] была получена явная формула для рангов гомотопических групп M:

$$\operatorname{rk} \pi_{n+1}(M) = \sum_{d|n} (-1)^{n+n/d} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{a+2b=n/d} (-1)^b \binom{a+b}{b} \frac{b_2^a}{a+b},$$

где $b_2 = b_2(M)$.

2.2. Необходимые сведения из теории рационального гомотопического типа

Ниже мы приведём простое доказательство, использующее только методы рациональной теории гомотопий, того, что рациональные гомотопические группы односвязного четырёхмерного многообразия M зависят только от второго числа Бетти $b_2(M)$. Этим мы дополним нашу предыдущую работу [14].

Напомним основные сведения из рациональной теории гомотопий; подробности и доказательства можно найти в [6]. Через TV обозначим тензорную алгебру градуированного векторного пространства V. Относительно стандартной коммутаторной скобки TV является градуированной алгеброй Ли. Подалгебра Ли, порождённая V, называется свободной алгеброй Ли пространства V и обозначается $\mathbb{L}_V$. Говорят, что элемент из $\mathbb{L}_V$ имеет длину k, если он представляется в виде линейной комбинации элементов вида $[v_1, \ldots, [v_{k-1}, v_k], \ldots]$. Имеет место разложение в прямую сумму $\mathbb{L}_V = \bigoplus \mathbb{L}_V^{(i)}$, где $\mathbb{L}_V^{(i)}$ — подпространство, состоящее из элементов длины i. Далее, $TV \cong U\mathbb{L}_V$, где $U\mathbb{L}_V$ — универсальная обёртывающая алгебры $\mathbb{L}_V$. Пусть $(\mathbb{L}_V, d)$ — дифференциальная градуированная свободная алгебра Ли. Линейная часть дифференциала d определяется как отображение $d_V\colon V\to V$, удовлетворяющее условию $dv-d_Vv\in\bigoplus\limits_{k\geqslant 2}\mathbb{L}_V^{(k)}$. Алгебра $(\mathbb{L}_V,d)$ называется *минимальной*, если линейная часть d_V дифференциала d является нулевой.

Функтор Квиллена C_* ставит в соответствие связной цепной алгебре Ли $\{(L;d_L)\}$ односвязную кокоммутативную цепную коалгебру $\{C_*(L;d_L)\}$. Переходя к двойственному объекту, получаем коммутативную дифференциальную градуированную алгебру $\{(C^*(L;d_L)\}$. В случае когда $(L;d_L)$ — цепная алгебра, $C^*(L;d_L)$ является коцепной алгеброй.

Пусть X — односвязное пространство с рациональными гомологиями конечного типа и $A_{PL}(X)$ — его алгебра коммутативных коцепей. Моделью Ли пространства X называется связная цепная алгебра Ли $(L;d_L)$ конечного типа, для которой задан квазиизоморфизм дифференциально градуированных алгебр

$$m\colon C^*(L;d_L)\xrightarrow{\cong}A_{PL}(X).$$

Для любого такого пространства X существует свободная минимальная модель Ли, причём она единственна с точностью до изоморфизма. Если $(\mathbb{L}_V,d)$ — свободная минимальная модель Ли для X, то имеется изоморфизм алгебр Ли

$$H(\mathbb{L}_V,d)\xrightarrow{\cong}\pi_*(\Omega X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q},\tag{2}$$

где структура алгебры Ли на $\pi_*(\Omega X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ задаётся произведением Уайтхеда. Этот изоморфизм является двойственным к изоморфизму $H(\wedge V_X)\xrightarrow{\cong}H^*(X,\mathbb{Q})$, где через $\wedge V_X$ обозначена минимальная модель X. С помощью надстройки изоморфизм (2) задаёт изоморфизм

$$sH(\mathbb{L}_V,d)\xrightarrow{\cong}\pi_*(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}.\tag{3}$$

Предположим, что пространство X представлено в виде

$$X=Y\cup_f(\cup_\alpha D^{n_\alpha+1}),$$

где

— Y — односвязное пространство с рациональными гомологиями конечного типа,
— $f=\{f_\alpha\colon(S^{n_\alpha},*)\to(Y,y_0)\}$,
— все клетки $D^{n_\alpha+1}$ имеют размерность не ниже 2, причём их конечное число в каждой размерности.

Пусть задан изоморфизм $\tau\colon sH(\mathbb{L}_V,d)\xrightarrow{\cong}\pi_*(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, где $(\mathbb{L}_V,d)$ — минимальная модель Ли пространства X. С помощью τ классы $[f_\alpha]\in\pi_{n_\alpha}(X)$ определяют классы $s[z_\alpha]=\tau^{-1}([f_\alpha])$, представленные циклами, которые мы будем обозначать $z_\alpha\in\mathbb{L}_V$. Пусть W — градуированное векторное пространство с базисом $\{w_\alpha\}$, где $\deg w_\alpha=n_\alpha$. Определим расширение $\mathbb{L}_V$ в виде $\mathbb{L}_{V\oplus W}$, задав дифференциал соотношением $dw_\alpha=z_\alpha$. В [6] доказано, что цепная алгебра $(\mathbb{L}_{V\oplus W},d)$ является моделью Ли для X.

2.3. Рациональные гомотопические группы односвязных четырёхмерных многообразий

В этом разделе мы докажем следующее утверждение.

Предложение 1. *Рациональные гомотопические группы односвязного четырёхмерного многообразия полностью определяются его вторым числом Бетти.*

Доказательство. Согласно классическим результатам (см. [8, 16]) односвязное четырёхмерное многообразие можно представить в виде

$$M \cong \left(\vee_{b_2(M)} S^2\right) \cup_f D^4. \tag{4}$$

Модель Ли для пространства $X = \vee_\alpha S^{n_\alpha+1} = \mathrm{pt} \cup_f (\cup_\alpha D^{n_\alpha+1})$ имеет вид $(\mathbb{L}_V, 0)$, где $V = \{V_i\}_{i\geqslant 1}$ — векторное пространство конечного типа с базисом v_α, $\deg v_\alpha = n_\alpha$ (см. [6]). В частности, для $\vee_{b_2(M)} S^2$ модель Ли имеет вид $(\mathbb{L}_V, 0)$, где в качества базиса V рассматриваются элементы $v_1, \ldots, v_{b_2(M)}$ степени $\deg v_\alpha = 1$ для всех $1 \leqslant \alpha \leqslant b_2(M)$. Так же, как в предыдущем разделе, для $[f] \in \pi_3(\vee_{b_2(M)} S^2, x_0)$ обозначим через z цикл в $\mathbb{L}_V$, для которого $s[z] = \tau^{-1}([f]) \in sH(\mathbb{L}_V)$. Отметим, что $\deg z = 2$. Пусть $W = \mathcal{L}(w)$ — векторное пространство с базисом w, причём $\deg w = 3$.

Тогда модель Ли многообразия M задаётся в виде

$$(\mathbb{L}_{V\oplus W} = \mathbb{L}_{\mathcal{L}(v_1,\ldots,v_{b_2},w)}, d), \quad \text{где} \quad dv_i = 0, \ dw = z \in \mathbb{L}_V.$$

Заметим теперь, что ранги групп когомологий $H(\mathbb{L}_{\oplus W}, d)$ зависят только от $b_2(M)$. Применение изоморфизма (2) завершает доказательство. □

3. О калибровочных группах и пространствах связностей

Рассмотрим главное G-расслоение $\pi\colon P \to M$, у которого структурная группа G является компактной полупростой односвязной группой Ли, а база M — компактное односвязное четырёхмерное многообразие. Калибровочная группа $\mathcal{G}$ этого главного расслоения — это группа G-эквивариантных диффеоморфизмов P, индуцирующих тождественное отображение базы. Обозначим пространство всех связностей на P через $\mathcal{A}$, а пространство всех неприводимых связностей через $\mathcal{A}^*$. Будем считать, что эти пространства снабжены подходящими соболевскими топологиями, а именно L^2_{p-1} для $\mathcal{A}$ и L^2_p для $\mathcal{G}$, где p достаточно велико.

Действие $\mathcal{G}$ на пространствах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ в общем случае не является свободным. Вместо группы $\mathcal{G}$ удобно рассматривать группу $\mathcal{G}_0$ калибровочных преобразований P, которая действует неподвижно на некотором выбранном слое. Группа $\mathcal{G}_0$ действует свободно на пространствах связностей и неприводимых связностей. Пусть $Z(G)$ — центр группы G. Тогда фактор-группа $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/Z(G)$

действует свободно на $\mathcal{A}^*$. Тем самым имеются три расслоения:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{A}/\mathcal{G}_0, \quad \tilde{\mathcal{B}}^* = \mathcal{A}^*/\mathcal{G}_0, \quad \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^*/\tilde{\mathcal{G}}. \tag{5}$$

Известно (см. [4]), что пространство $\mathcal{A}$ стягиваемо, $\mathcal{A}^*$ слабо гомотопически эквивалентно $\mathcal{A}$, а $\tilde{\mathcal{B}}^*$ слабо гомотопически эквивалентно $\tilde{\mathcal{B}}$.

Как показано в [12], слабый гомотопический тип $\mathcal{G}_0$ не зависит от P, а именно

$$\mathcal{G}_0 \approx \mathrm{Map}_*(M, BG). \tag{6}$$

Иными словами, $\mathcal{G}_0$ слабо гомотопически эквивалентно пространству отображений $\mathrm{Map}_*(M, BG)$, сохраняющих отмеченную точку.

Обозначим через $\mathcal{G}^e$ компоненту единицы калибровочной группы $\mathcal{G}$. Алгебры рациональных когомологий пространств $\mathcal{G}^e$, $\tilde{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{B}^*$ были вычислены в [15]. Они допускают следующее описание.

— $H^*(\mathcal{G}^e)$ является внешней алгеброй от $(b_2(M) + 2)\operatorname{rk} G - 1$ образующих нечётных степеней, причём число образующих степени j равно $b_2(M)\operatorname{rk}\pi_{j+2}(G) + \operatorname{rk}\pi_j(G) + \operatorname{rk}\pi_{j+4}(G)$.

— $H^*(\tilde{\mathcal{B}})$ является алгеброй многочленов от $(b_2(M) + 1)\operatorname{rk} G - 1$ образующих чётных степеней, причём число образующих степени j равно $b_2(M)\operatorname{rk}\pi_{j+1}(G) + \operatorname{rk}\pi_{j+3}(G)$.

— $H^*(\mathcal{B}^*)$ является алгеброй многочленов от $(b_2(M) + 2)\operatorname{rk} G - 1$ образующих чётных степеней, причём число образующих степени j равно $b_2(M)\operatorname{rk}\pi_{j+1}(G) + \operatorname{rk}\pi_{j-3}(G) + \operatorname{rk}\pi_{j+3}(G)$.

Замечание 1. Поскольку алгебры рациональных когомологий этих пространств свободны, то рассматриваемые пространства формальны, как это было отмечено в [15]. Следовательно, минимальные модели (в смысле рационального гомотопического типа) пространств $\mathcal{G}^e$, $\tilde{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{B}^*$ совпадают с минимальными моделями их алгебр рациональных когомологий. Более того, из-за свободности минимальные модели этих алгебр совпадают с самими алгебрами.

3.1. Кольцо Понтрягина рациональных когомологий пространств петель

Для топологического пространства X его пространство петель с отмеченной точкой ΩX является H-пространством, в котором умножение задаётся композицией (последовательным прохождением) петель. Эта структура задаёт на $H_*(\Omega X)$ так называемое умножение Понтрягина, которое определяет на $H_*(\Omega X)$ структуру кольца. В этом разделе мы опишем кольцо Понтрягина когомологий пространств $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{B}^*$.

Напомним теорему Милнора—Мура и некоторые конструкции из теории рационального гомотопического типа, которые нам нужны для описания колец Понтрягина гомологий рассматриваемых пространств. Теорема Милнора—Мура (см. [9]) утверждает, что алгебра рациональных гомологий пространства ΩX для односвязного пространства X имеет вид

$$H_*(\Omega X) \cong UL_X \cong T(L_X)/\langle xy - (-1)^{\deg x \deg y} yx - [x,y]\rangle, \tag{7}$$

где L_X — алгебра Ли рациональных гомотопических групп X, а UL_X — её универсальная обёртывающая алгебра. Более точно, алгебра L_X — это алгебра Ли, определённая как векторное пространство $L_X = (\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q})$, в котором соответствующая скобка $[\,,\,]$ задана умножением Самельсона.

Известно (см. [6]), что алгебра Ли L_X изоморфна гомотопической алгебре Ли L минимальной модели пространства X. Напомним определение алгебры Ли L. Пусть $(\wedge V, d)$ — минимальная модель пространства X. Тогда $sL = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{Q})$, где надстройка sL определена стандартным образом с помощью сдвига размерностей $(sL)_i = (L)_{i-1}$. Скобка Ли на L определяется формулой

$$\langle v; s[x,y]\rangle = (-1)^{\deg y+1}\langle d_1 v; sx, sy\rangle \quad \text{для} \quad x, y \in L, \quad v \in V. \tag{8}$$

Здесь d_1 — квадратичная часть дифференциала d минимальной модели $(\wedge V, d)$; с формальной точки зрения d_1 определяется условием $d - d_1 \in \wedge^{k \geqslant 3} V$. Иными словами, $d_1 v = v_1 \wedge v_2$ для некоторых $v_1, v_2 \in V$, и тогда величина $\langle d_1 v; sx, sy\rangle$ определяется формулой

$$\langle v_1 \wedge v_2; sx, sy\rangle = \langle v_1; sx\rangle\langle v_2; sy\rangle - \langle v_2; sx\rangle\langle v_1; sy\rangle.$$

Чтобы применить теорему Милнора—Мура, мы будем предполагать, что пространства $\tilde{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{B}^*$ односвязны. Рассматривая расслоения (5), мы можем легко убедиться в том, что это условие эквивалентно связности групп $\mathcal{G}_0$ и $\tilde{\mathcal{G}}$, что, в свою очередь, эквивалентно связности калибровочной группы $\mathcal{G}$.

Теорема 1. *Предположим, что калибровочная группа $\mathcal{G}$ связна. Тогда кольца Понтрягина рациональных гомологий пространств петель $\Omega\tilde{\mathcal{B}}$ и $\Omega\mathcal{B}^*$ описываются следующим образом.*

- *$H_*(\Omega\tilde{\mathcal{B}})$ является внешней алгеброй от $(b_2(M)+1)\operatorname{rk} G - 1$ образующих нечётных степеней, причём количество образующих размерности j равно $b_2(M)\operatorname{rk}\pi_{j+2}(G) + \operatorname{rk}\pi_{j+4}(G)$.*
- *$H_*(\Omega\mathcal{B}^*)$ является внешней алгеброй от $(b_2(M)+2)\operatorname{rk} G - 1$ образующих нечётных степеней, причём число образующих степени j равно $b_2(M)\operatorname{rk}\pi_{j+2}(G) + \operatorname{rk}\pi_j(G) + \operatorname{rk}\pi_{j+4}(G)$.*

Доказательство. Согласно замечанию 1 дифференциалы минимальных моделей пространств $\tilde{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{B}^*$ тривиальны, поэтому тривиальны и соответствующие им квадратичные части d_1. Из определения скобки Ли (8) следует, что соответствующая алгебра Ли коммутативна. Ввиду (7) отсюда следует, что универсальная обёртывающая UL тоже коммутативна. Следовательно, кольца Понтрягина рациональных гомологий этих пространств совпадают с алгебрами, которые получаются из алгебр их рациональных когомологий сдвигом размерностей всех образующих на -1. $\square$

Теперь обсудим, насколько сильным является предположение о связности калибровочной группы $\mathcal{G}$. В общем случае группа $\mathcal{G}$ связной не является. Из результатов Зингера (6) и гомотопических расслоений (4) легко получить точную последовательность (см. [15]):

$$\pi_3(G) \leftarrow \bigoplus_{b_2(M)} \pi_2(G) \leftarrow [M; BG] \leftarrow \pi_4(G) \leftarrow \ldots. \tag{9}$$

Из неё следует, что группа $\mathcal{G}_0$ связна при условии $\pi_2(G) = \pi_4(G) = 0$. В свою очередь, эти условия выполняются для $G = SU(n)$ при $n \geqslant 3$ и $G = \mathrm{Spin}(n)$ при $n \geqslant 6$ (это следует из теоремы Ботта о периодичности).

Пример 1. Рассмотрим главные $SU(3)$-расслоения над некоторым односвязным четырёхмерных многообразием M. Калибровочная группа такого расслоения связна. Хорошо известно, что $\operatorname{rk}\pi_3\big(SU(3)\big) = \operatorname{rk}\pi_5\big(SU(3)\big) = 1$ и что $\operatorname{rk}\pi_j\big(SU(3)\big) = 0$ при $j \neq 3, 5$. Тогда из теоремы 1 следует, что

$$\begin{aligned} &H_*(\Omega\tilde{\mathcal{B}}) \cong \wedge(x_1, \ldots, x_{b_2(M)+1}, y, \ldots, y_{b_2(M)}), \quad \deg x_i = 1, \quad \deg y_j = 3; \\ &H_*(\Omega\mathcal{B}^*) \cong \wedge(x_1, \ldots, x_{b_2(M)+1}, y_1, \ldots, y_{b_2(M)+1}, z), \\ &\quad \deg x_i = 1, \quad \deg y_j = 3, \quad \deg z = 5. \end{aligned}$$

Пример 2. Теперь рассмотрим главные $SU(2)$-расслоения над некоторым односвязным четырёхмерным многообразием M. Известно, что $\pi_4\big(SU(2)\big) = \mathbb{Z}_2$. В этом случае фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{B}^*)$ зависит от рассматриваемого главного $SU(2)$-расслоения $P \to M$. Эта фундаментальная группа была вычислена в [10], и мы напомним соответствующие результаты. Для $G = SU(2)$ имеем $\pi_0(\mathcal{G}) = [M, S^3]$, откуда по теореме Стинрода

$$\pi_0(\mathcal{G}) = \begin{cases} 0, & \text{если форма пересечения } M \text{ нечётная}, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если форма пересечения } M \text{ чётная}. \end{cases}$$

С помощью (5) отсюда получаем, что

$$\pi_1(\tilde{\mathcal{B}}) = \begin{cases} 0, & \text{если форма пересечения } M \text{ нечётная}, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если форма пересечения } M \text{ чётная}. \end{cases}$$

Предположим, что форма пересечения многообразия M нечётная. Тогда по теореме 1

$$H_*(\Omega\tilde{\mathcal{B}}) \cong \wedge(x_1, \ldots, x_{b_2(M)}), \quad \deg x_i = 1.$$

Расслоение $Z(G) \to \mathcal{G} \to \tilde{\mathcal{G}}$ даёт точную последовательность

$$\ldots \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{j_*} \pi_0(\mathcal{G}) \to \pi_0(\tilde{\mathcal{G}}) \to 0, \tag{10}$$

из которой получаем, что $\tilde{\mathcal{G}}$ связна, а следовательно, пространство $\mathcal{B}^*$ односвязно. По теореме 1

$$H_*(\Omega\mathcal{B}^*) \cong \wedge(x_1, \ldots, x_{b_2(M)}, y), \quad \deg x_i = 1, \quad \deg y = 3.$$

Предположим, что форма пересечения многообразия M чётная. В [10] показано, что отображение j_* из точной последовательности (10) определяется вторым числом Чженя главного $SU(2)$-расслоения P над M. Более точно, отображение j_* нулевое, если $c_2(P)$ чётное, и j_* является эпиморфизмом, если $c_2(P)$ нечётно. Следовательно, $\pi_0(\tilde{\mathcal{G}}) = \mathbb{Z}_2$, если $c_2(P)$ чётное, и $\pi_0(\tilde{\mathcal{G}}) = 0$, если $c_2(P)$ нечётное. Таким образом,

$$\pi_1(\mathcal{B}^*) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & c_2(P) \text{ чётно}, \\ 0, & c_2(P) \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Следовательно, в случае когда форма пересечения многообразия M чётная, а второе число Чженя главного $SU(2)$-расслоения $P \to M$ нечётно, из теоремы 1 получаем

$$H_*(\Omega\mathcal{B}^*) \cong \wedge(x_1, \ldots, x_{b_2(M)}, y), \quad \deg x_i = 1, \quad \deg y = 3.$$

Литература

[1] Бабенко И. К. Об аналитических свойствах рядов Пуанкаре пространств петель // Матем. заметки. — 1980. — Т. 27, № 5. — С. 751—765.

[2] Basu Sa., Basu So. Homotopy groups and periodic geodesics of closed 4-manifolds. — arXiv:1303.3328.

[3] Beben P., Theriault S. The loop space homotopy type of simply-connected four-manifolds and their generalization // Adv. Math. — 2014. — Vol. 262. — P. 213—238.

[4] Donaldson S. K., Kronheimer P. B. The Geometry of Four-Manifolds. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1990.

[5] Duan H., Liang Ch. Circle bundles over 4-manifolds // Arch. Math. (Basel). — 2005. — Vol. 85, No. 3. — P. 278—282.

[6] Félix Y., Halperin S., Thomas J.-C. Rational Homotopy Theory. — Berlin: Springer, 2001. — (Grad. Texts Math.; Vol. 205).

[7] Mandelbaum R. Four-dimensional topology: an introduction // Bull. Am. Math. Soc. — 1980. — Vol. 2. — P. 1—159.

[8] Milnor J. On simply connected 4-manifolds // Symp. Int. de Topologia Algebraica. — 1958. — P. 122—128.

[9] Milnor J., Moore J. On the structure of Hopf algebras // Ann. Math. — 1965. — Vol. 81. — P. 211—264.

[10] Ohta H. On the fundamental groups of moduli spaces of irreducible SU(2)-connections over closed 4-manifolds // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1990. — Vol. 66, no. 3. — P. 89—92.

[11] Quillen D. Rational homotopy theory // Ann. Math. — 1969. — Vol. 90. — P. 205—295.

[12] Singer I. M. Some remarks on the Gribov ambiguity // Commun. Math. Phys. — 1978. — Vol. 60. — P. 7—12.

[13] Sullivan D. Infinitesimal computations in topology // Publ. Math. de l'IHÉS. — 1977. — Vol. 47. — P. 269—331.

[14] Terzić S. On rational homotopy of four-manifolds // Contemporary Geometry and Related Topics. — River Edge: World Scientific, 2004. — P. 375—388.

[15] Terzić S. The rational topology of gauge groups and of spaces of connections // Compositio Math. — 2005. — Vol. 141, no. 1. — P. 262—270.

[16] Whitehead J. H. C. On simply connected 4-dimensional polyhedra // Comm. Math. Helvet. — 1949. — Vol. 22. — P. 49—92.