Ограниченная стягиваемость строгих солнц в трёхмерных пространствах*

А. Р. АЛИМОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

УДК 517.982.256+517.982.252

Ключевые слова: солнце, строгое солнце, ацикличное множество, клеточноподобное множество.

Аннотация

Устанавливается, что строгое солнце в конечномерном (несимметрично) нормированном пространстве X, $\dim X \leqslant 3$, является P-стягиваемым, P-солнечным, $\mathring{B}$-бесконечно связным, $\mathring{B}$-стягиваемым, $\mathring{B}$-ретрактом и обладает непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой для любого $\varepsilon > 0$. Показано, что в трёхмерном пространстве P-ацикличное множество обладает непрерывной ε-выборкой для любого $\varepsilon > 0$. Для размерности 3 на случай строгих солнц обобщается характеризация Царькова пространств, в которых ограниченные чебышёвские множества выпуклы.

Abstract

A. R. Alimov, Bounded contractibility of strict suns in three-dimensional spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 1, pp. 3—11.

A strict sun in a finite-dimensional (asymmetric) normed space X, $\dim X \leqslant 3$, is shown to be P-contractible, P-solar, $\mathring{B}$-infinitely connected, $\mathring{B}$-contractible, $\mathring{B}$-retract, and having a continuous additive (multiplicative) ε-selection for any $\varepsilon > 0$. A P-acyclic subset of a three-dimensional space is shown to have a continuous ε-selection for any $\varepsilon > 0$. For the dimension 3 the well-known Tsar'kov's characterization of spaces, in which any bounded Chebyshev set is convex, is extended to the case of strict suns.

Величиной наилучшего приближения или расстоянием от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$ называется величина

$$\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Понятия и свойства, определяемые в терминах наилучшего приближения, в частности свойства существования, единственности, устойчивости элементов

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-000333) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ 6222.2018.1).

наилучшего приближения, называются *аппроксимативными*. Таким является прежде всего понятие элемента наилучшего приближения или ближайшей точки. Это (для заданного $x \in X$) точка $y \in M$, для которой $\|x-y\| = \rho(x,M)$. Множество всех *ближайших точек* (элементов наилучшего приближения) в M для заданного x обозначается $P_M x$. Иными словами,

$$P_M x := \{y \in M \mid \rho(x,M) = \|x-y\|\}.$$

В работе рассматриваются «солнечные» свойства подмножеств линейных нормированных пространств, представляющие собой аппроксимативно-геометрическую характеристику.

Всюду ниже X — действительное линейное нормированное пространство, X_n — банахово пространство X конечной размерности n. Далее:

$B(x,r)$ — замкнутый шар с центром x и радиусом r;
$\mathring{B}(x,r)$ — открытый шар с центром x и радиусом r;
$S(x,r)$ — сфера с центром x и радиусом r.

В частном случае мы полагаем, что $B := B(0,1)$ — единичный шар. Ниже мы следуем определениям, данным в [3,4]. Основные определения даются ниже.

Для подмножества $\varnothing \neq M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (называемая *точкой светимости*), такая что

$$y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big) \quad \text{для всех} \quad \lambda \geqslant 0 \tag{1}$$

(это геометрически означает, что из точки y исходит «солнечный» луч, проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M).

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и условие (1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$.

Замкнутое множество $M \subset X$ называется *солнцем* (*строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно строгой солнечности) для M. Строгое солнце является солнцем. Выпуклое множество существования всегда является строгим солнцем. В гладком пространстве любое солнце выпукло.

«Солнца» обладают важными характеристическими признаками. Им присущи те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса. Эти свойства стоят в одном ряду с известными свойствами отделимости выпуклых множеств посредством полупространств (гиперплоскостей) и тесно связаны с классическим критерием Колмогорова (в той или иной форме) ближайшего элемента (см. [4, § 3.2]). Солнечность имеет связи с геометрической оптикой и с уравнениями Гамильтона—Якоби даже в конечномерном случае (см. [4, § 1]). Также имеется тесная связь множеств с солнечными свойствами с множествами, удовлетворяющими опорному условию слабой выпуклости (такие множества изучались М. В. Балашовым, Г. Е. Ивановым и М. С. Лопушански; см., например, [5, 13]).

Важным для дальнейшего будет следующий результат. Если M — строгое солнце в линейном нормированном пространстве X, то

$$\operatorname{conv} P_M x \subset S\big(x, \rho(x, M)\big) \quad \text{для любого} \quad x \in X \tag{2}$$

(см., например, [3, § 3]), т.е. выпуклая оболочка множества ближайших точек $P_M x$ для любой $x \notin M$ содержится в собственной грани соответствующей сферы. Для солнц, не являющихся строгими солнцами, утверждение (2) может нарушаться даже в двумерном случае.

Следуя Л. П. Власову [7], мы будем говорить, что, если Q обозначает некоторое свойство (например, связность), замкнутое множество M обладает свойством

P-Q, если при всех $x \in X$ множество $P_M x$ непусто и обладает свойством Q;

B-Q, если $M \cap B(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;

$\mathring{B}$-Q, если $M \cap \mathring{B}(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$.

Хорошо известно, что оператор наилучшего приближения P обладает недостаточной устойчивостью даже при приближении чебышёвскими подпространствами, не говоря о нелинейных множествах. Давно известны примеры чебышёвских подпространств с разрывной метрической проекцией. В конечномерном пространстве непрерывной выборки из метрической проекции (т. е. 0-выборки) на строгое солнце (даже на подпространство) может не существовать даже в трёхмерном случае (А. Л. Браун; см. [14]). В $C[0, 1]$ с равномерной нормой метрическая проекция на множество дробно-рациональных функций $\mathcal{R}_{m,n}$ и множество экспоненциальных сумм E_n^+ имеет точки разрыва. Для исправления такой ситуации был предложен способ повышения устойчивости приближения за счёт постановки в соответствие подходящим образом приближаемому элементу одного из его почти наилучших приближений. Так появилось понятие ε-выборки (ε-селекции). Вопрос существования непрерывной ε-выборки и устойчивости оператора почти наилучшего приближения для абстрактных и классических объектов теории приближений изучался многими авторами (см. [4, § 7]).

Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi\colon X \to M$ называют *мультипликативной* (*аддитивной*) *ε-выборкой*, если для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$\|x - \varphi(x)\| \leqslant (1 + \varepsilon)\rho(x, M) \quad (\text{соответственно} \ \ \|x - \varphi(x)\| \leqslant \rho(x, M) + \varepsilon).$$

Из классической теоремы Майкла о селекции следует, что для всех $\varepsilon > 0$ существует непрерывная мультипликативная (аддитивная) ε-выборка на любое выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства.

Согласно одному известному результату, восходящему к Х. Беренсу и Л. Хетцельту, любое солнце на нормированной плоскости является B-ретрактом и, следовательно, B-стягиваемо и обладает непрерывной выборкой из метрической проекции (см., например, [3, § 7.1]).

Замечание 1. До сих пор неизвестно, является ли солнце в произвольном трёхмерном банаховом пространстве B-связным (см. [3, § 7]). О строгих солнцах (множествах Колмогорова) известно больше. В. А. Кощеев (см. [3, § 7.2]) показал, что ограниченно компактное строгое солнце (или, более общо, LG-множество) B-связно. Этот результат был частично усилен А. Л. Брауном (см., например, [3, теорема 7.10]), который показал, что ограниченно компактное строгое солнце в банаховом пространстве B-линейно связно.

Напомним, что подмножество $A \subset X$ называется *ретрактом* множества Y, если существует непрерывное отображение $r\colon Y \to A$, называемое ретракцией, такое что $r|_A = 1|_A$, т. е. тождественное отображение 1_A допускает непрерывное продолжение на всё пространство Y. Хорошо известно, что в конечномерном пространстве граница шара не является ретрактом шара. Метрическое пространство A *n-связно*, если для любого $k \leqslant n$ любое непрерывное отображение из k-сферы S^k в X гомотопно постоянному. Пространство называется *бесконечно связным*, если оно связно для всех n.

Определение. Назовём множество M *P-солнечным*, если для любого $x \in M$ множество $P_M x$ является солнцем в аффинном подпространстве H (не обязательно собственном), порождённом аффинной оболочкой множества $P_M x$. Пусть F — минимальная грань (не обязательно собственная) сферы $S\bigl(x, \rho(x, M)\bigr)$, содержащая множество $P_M x$. (Несимметричная) норма $|\cdot|_F$ на H задаётся функционалом Минковского выпуклого множества F относительно произвольной фиксированной точки из относительной внутренности F (см., например, [4, § 7]). (Для строгого солнца M грань F всегда является собственной; см. (2).) В этом определении неявно предполагается, что пространство X имеет конечную размерность.

Следующий результат является основным. В нём даётся ответ на ряд давно стоящих вопросов о геометрических и топологических свойствах строгих солнц в произвольных трёхмерных нормированных или несимметрично нормированных пространствах. Хотелось бы получить аналогичное утверждение для любой конечной размерности $n \geqslant 4$.

Теорема 1. *Пусть M — строгое солнце в конечномерном банаховом пространстве X, $\dim X \leqslant 3$. Тогда M P-стягиваемо, P-солнечно, $\mathring{B}$-бесконечно связно, $\mathring{B}$-стягиваемо, $\mathring{B}$-ретракт и на M для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная аддитивная (мультипликативная) ε-выборка.*

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 также верно в несимметрично нормированных пространствах X, $\dim X \leqslant 3$.

Замечание 3. Для пространства X размерности не меньше 4 до сих пор неизвестно в общем случае, является ли любое строгое солнце в X P-ацикличным (или, эквивалентно, B-ацикличным).

Замечание 4. Что касается частичного обращения утверждения теоремы 1, было бы интересно описать пространства, в которых P-солнечность влечёт солнечность. Классические примеры Данхема и Кли чебышёвских множеств, не являющихся солнцами, показывают необходимость дополнительных предположений в этой задаче. С другой стороны, солнечность вытекает из P-солнечности на плоскости и в (BM)-пространствах для ограниченно компактных множеств:

это следует из монотонной линейной связности солнц в таких пространствах, клеточноподобности монотонно линейно связных множеств и классической теоремы Власова о солнечности ограниченно компактных P-ацикличных множеств (см., например, [4]). Из теоремы 1 следует, что если M P-строго солнечно (в смысле данного выше определения) и $\dim P_M x \leqslant 3$ для любого $x \notin M$, то такое M является солнцем.

Доказательство теоремы 1. Пусть $x \notin M$, F — минимальная собственная грань сферы $S\big(x, \rho(x, M)\big)$, содержащая $P_M x$ (см. (2)). По теореме Брауна (см. замечание 1) отсюда следует, что M B-линейно связно и, значит, P-линейно связно.

Установим, что M P-стягиваемо. Для этого покажем, что

$$P_M x \text{ односвязно.} \tag{3}$$

Напомним, что линейно связное пространство M называется односвязным, если любые два пути $\tau, \sigma\colon [0,1] \to M$, для которых $\tau(0) = \sigma(0)$ и $\tau(1) = \sigma(1)$, гомотопны относительно концов отрезка $[0,1]$.

Пусть k — размерность грани F. В случае $k \leqslant 1$ грань F является отрезком или точкой, что вместе с тем, что M P-линейно связно, показывает, что $M \cap F$ стягиваемо.

Пусть $k = 2$. Рассуждая от противного, предположим, что множество

$$F \cap M =: P_M x$$

неодносвязно: на нём существуют нестягиваемые кривые. Пусть $\gamma \subset (F \cap M)$ — такая кривая, и пусть точка u лежит во внутренности γ (тогда заведомо $u \notin M$). Картина, по существу, двумерная: при любом выборе ближайшей $y \in P_M u$ из-за наличия на сфере $S\big(u, \rho(u, M)\big)$ гомотетичного сдвига грани F опорный конус $\mathring{K}(y, u)$ всегда пересекается с кривой γ (что противоречит строгой солнечности M по критерию Колмогорова ближайшего элемента в терминах отделимости конусами; см. [3, § 2.1]). Это показывает, что такой кривой γ не может существовать, что доказывает (3).

Хорошо известно следующее утверждение (см., например, [6]): для плоского линейно связного континуума N условие односвязности N эквивалентно тому, что группа его одномерных сингулярных гомологий тривиальна (т. е. $\mathrm{H}_1(N, \mathbb{Z}) = 0$). По замечанию 1 множество M B-линейно связно, а по (3) оно односвязно. Однако лишь одно условие односвязности и линейной связности плоского компакта не гарантирует его клеточноподобности (или ацикличности, что одно и то же в плоском случае), для этого нужно дополнительное свойство локальной связности. Имеется хорошо известный пример варшавской окружности, которая как стинродовски, так и линейно связна, но не клеточноподобна (и не локально связна). Рассмотрим более тонкие геометрические свойства строгих солнц, которые позволят нам показать P-стягиваемость множества M.

Через H обозначим аффинную оболочку грани F. По предположению имеем $\dim H = 2$. Покажем, что $H \cap M$ — солнце в пространстве с несимметричной нормой $|\cdot|_F$, порождённой функционалом Минковского выпуклого множества F относительно произвольной фиксированной точки из относительной внутренности гиперграни F (см., например, [4, § 7]). С учётом того что $\dim F = 2$, элементарными рассуждениями из двумерной геометрии показывается, что $H \cap M$ является P-уголковым в пространстве $(H, |\cdot|_F)$ (что по определению означает, что для любого $u \in H$ множество ближайших элементов $P_M^{|\cdot|_F} u$ относительно $|\cdot|_F$ для точки u является точкой, отрезком или двумя отрезками, имеющими одну общую точку; см. [3, с. 42]). Как следствие, $P_M^{|\cdot|_F} u$ стягиваемо.

Воспользуемся известной теоремой Л. П. Власова [7, теорема 4.4], которая утверждает, что ограниченно компактное P-ацикличное подмножество банахова пространства является солнцем. Пространство $(H, |\cdot|_F)$ в общем случае не является симметрично нормированным, тем не менее теорема Власова остаётся верной и несимметричном случае, поскольку, по сути, её доказательство опирается лишь на классическую теорему о неподвижной точке для ацикличных полунепрерывных сверху отображений, действующих на выпуклом компактном подмножестве локально выпуклого топологического пространства (см., например, [16]), а в конечномерном случае несимметрично нормированное пространство необходимо локально выпукло. Таким образом, $M \cap H$ — солнце в пространстве $(H, |\cdot|_F)$. Поскольку ситуация в случае $k = 0, 1$ тривиальна, то M — P-солнце.

В [1] предъявляется широкий класс пространств, в котором солнца сохраняют солнечность после пересечения с произвольным брусом (и, в частности, с замкнутым шаром). Это свойство выполнено в любом двумерном (в том числе и несимметричном) пространстве, т. е. $M \cap F$ — солнце в пространстве $(H, |\cdot|_F)$. Поскольку любое солнце в двумерном пространстве является B-ретрактом, то $M \cap F$ стягиваемо.

Итак, множество M является P-стягиваемым.

Теперь нам потребуется известная лемма Чернавского—Компаниеца о поднятии, согласно которой график полунепрерывного сверху отображения с клеточноподобными значениями (в нашем случае $x \mapsto P_M x$) приближается однозначным непрерывным отображением (см., например, [12, теорема 23.8], по поводу некомпактного случая см. [15]). Данный результат утверждает, что если $\varphi\colon X \to 2^Y$ — полунепрерывное сверху отображение компактного ANR X в пространство Y с клеточноподобными значениями (J-отображение в терминологии [12]), то для любого $\varepsilon > 0$ имеется непрерывная ε-аппроксимация $f\colon X \to Y$ многозначного отображения φ. Здесь напомним [12, определение 22.3.1], что отображение $f\colon Z \to Y$ называется ε-аппроксимацией многозначного отображения $\varphi\colon X \multimap Y$, если

$$f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon\Big(\varphi\big(\mathcal{O}_\varepsilon(x)\big)\Big)$$

для любого $x \in Z$, где $Z \subset X$. С учётом недавнего результата Царькова [10] о локальной выборке это влечёт существование непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборки для любого $\varepsilon > 0$ на множество M. Теперь из теоремы И. Г. Царькова [11, теорема 3] следует, что M $\mathring{B}$-бесконечно связно, $\mathring{B}$-стягиваемо и является $\mathring{B}$-ретрактом. Теорема 1 доказана. □

Хорошо известно, что плоский компакт ацикличен, если и только если он клеточноподобен. С учётом этого замечания мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть X — банахово пространство, $\dim X \leqslant 3$, и пусть M P-ациклично. Тогда M обладает непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой для любого $\varepsilon > 0$.*

Замечание 5. Множество M в условиях теоремы 2 $\mathring{B}$-бесконечно связно, $\mathring{B}$-стягиваемо и является $\mathring{B}$-ретрактом. Известный пример Брауна подпространства (строгого солнца), не обладающего непрерывной выборкой из метрической проекции, показывает, что такое M не обязано быть B-ретрактом уже в размерности 3.

Рассмотрим применение теоремы 1 в классической задаче о выпуклости аппроксимирующих множеств. Данная задача для ограниченных чебышёвских множеств была поставлена Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в 1958 г. Полный ответ на неё в конечномерном случае был получен И. Г. Царьковым, который также дал ряд ответов в этой задаче в бесконечномерном случае (подробнее см. [2]). Удивительно, но решение задачи о выпуклости чебышёвских множеств принципиально разное (в размерности не меньше 3) в зависимости от того, ограниченные или неограниченные множества рассматриваются. Все необходимые определения можно найти в [2]. В теореме 3 для размерности 3 на случай строгих солнц обобщается характеризация Царькова пространств, в которых ограниченные чебышёвские множества выпуклы. Здесь все импликации (кроме б)) в симметричном случае принадлежат Царькову, перенос на несимметричный случай и импликация б) получены автором.

Теорема 3. *Пусть X — конечномерное несимметрично нормированное пространство размерности не больше 3. Следующие условия эквивалентны:*

а) *всякое ограниченное чебышёвское множество в X выпукло;*
б) *всякое ограниченное строгое солнце в X выпукло;*
в) *всякое ограниченное множество существования в X с полунепрерывной снизу метрической проекцией выпукло;*
г) *всякое ограниченное P-ацикличное множество в X выпукло;*
д) *всякое ограниченное B-ацикличное множество в X выпукло;*
е) $\overline{\exp} S^* = S^*$;
ж) $\overline{\operatorname{ext}} S^* = S^*$;
з) *сфера S не содержит конических подмножеств;*
и) *сфера S не содержит простых хребтов размерности меньше $\dim X - 1$.*

Теорема 3 вытекает из теоремы 1 с учётом примечания на с. 493 работы [2] и известного факта, что в конечномерном пространстве P-стягиваемое множество является P- и B-ацикличным.

Рассмотрим применение теоремы 3 в задаче о B-солнечности множеств. Такие задачи возникают, в частности, при исследовании солнечных свойств множеств с непрерывной метрической проекцией.

Пример. Чебышёвское солнце в конечномерном пространстве может не быть B-солнечным (при этом оно всегда B-стягиваемо). Иными словами, найдётся такое чебышёвское солнце, пересечение которого с некоторым замкнутым шаром непусто и не является солнцем.

Построим соответствующий пример для размерности 3. (В размерности 2 любое солнце B-солнечно [1].)

1. Сначала построим пример чебышёвского солнца, не являющегося B-строго солнечным. И. Г. Царьков [2, 9] построил примеры конечномерных пространств (любой размерности не меньше 3), в которых всякое ограниченное чебышёвское множество выпукло, но существует неограниченное невыпуклое чебышёвское множество. Пусть X_3 — такое пространство, M' — неограниченное невыпуклое чебышёвское множество в X_3. Покажем, что для такого M' существует шар, пересечение которого с M' не является строгим солнцем. Рассуждая от противного, предположим, что пересечение множества M' с любым шаром является строгим солнцем или пусто. По теореме 3 любое ограниченное строгое солнце в X_3 выпукло. Теперь осталось воспользоваться следующим результатом, относящемуся к фольклору теории выпуклых множеств: всякое связное замкнутое локально выпуклое подмножество конечномерного пространства выпукло. Итак, если бы пересечение невыпуклого множества M' с любым шаром было бы строгим солнцем (или пустым множеством), то M' было бы выпукло. Полученное противоречие завершает доказательство. Аналогичные рассуждения была применены А. А. Флёровым [8] при построении чебышёвского множества, не являющегося локально чебышёвским. Пример строгого солнца в ℓ^∞_3, не являющегося B-строгим солнцем, был известен ранее (см. [3, замечание 7.3.]).

2. И. Г. Царьков [9] для любого $n \geqslant 3$ построил выпуклое центрально-симметричное выпуклое тело V в $\mathbb{R}^n$, на котором имеются в точности две точки негладкости $\pm a$, причём каждая из этих точек является точкой достижимости тела V. Пусть X — пространство размерности 3 с единичным шаром V. Пусть M' — невыпуклое неограниченное чебышёвское множество в X (существующее по известной теореме Бердышева—Брондстеда); такое M' определяется по негладкой достижимой точке a и состоит из объединения двух различных гиперподпространств, опорных к шару V в точке a. Из построения V в [9, лемма 10] видно, что любая точка шара V является точкой строгой выпуклости. Известно [4, теорема 4.3], что в (LUR)-пространстве (и значит, в строго выпуклом пространстве) β-солнце или γ-солнце существования является чебышёвским солнцем. Соответственно, если бы пересечение M' с любым шаром было бы солнцем, то в силу строгой выпуклости пространства оно автоматически было бы чебышёвским множеством. Однако по п. 1 такое невозможно.

Автор выражает благодарность И. Г. Царькову, Е. В. Щепину и У. Х. Каримову за консультации.

Литература

[1] Алимов А. Р. Локальная солнечность солнц в линейных нормированных пространствах // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 3—14.

[2] Алимов А. Р. Выпуклость ограниченных чебышёвских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 4 (2). — С. 489—497.

[3] Алимов А. Р., Царьков И. Г. Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышёвских множеств // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 4. — С. 21—91.

[4] Алимов А. Р., Царьков И. Г. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН. — 2016. — Т. 71, № 1 (427). — С. 3—84.

[5] Балашов М. В., Иванов Г. Е. Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. — 2009. — Т. 73, № 3. — С. 23—66.

[6] Богатый С. А. Топологическая теорема Хелли // Фундамент. и прикл. матем. — 2002. — Т. 8, вып. 2. — С. 365—405.

[7] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. — 1973. — Т. 28, № 6 (174). — С. 3—66.

[8] Флёров А. А. Избранные геометрические свойства множеств с конечнозначной метрической проекцией: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М., 2016.

[9] Царьков И. Г. Ограниченные чебышёвские множества в конечномерных банаховых пространствах // Матем. заметки — 1984. — Т. 36, №. 1. — С. 73—87.

[10] Царьков И. Г. Локальная и глобальная непрерывная ε-выборка // Изв. РАН. Сер. матем. — 2016. — Т. 80, № 2. — С. 165—184.

[11] Царьков И. Г. Непрерывная ε-выборка // Матем. сб — 2016. — Т. 207, № 2. — С. 123—142.

[12] Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. — Dordrecht: Springer, 2006.

[13] Ivanov G. E. Continuity and selections of the intersection operator applied to nonconvex sets // J. Convex Analysis. — 2015. — Vol. 22, no. 4. — P. 939—962.

[14] Kamal A. On proximinality and sets of operators. I. Best approximation by finite rank operators // J. Approx. Theor. — 1986. — Vol. 47. — P. 132—145.

[15] Kryszewski W. Graph-approximation of set-valued maps on noncompact domains // Topol. Appl. — 1998. — Vol. 83. — P. 1—21.

[16] Park S. Some coincidence theorems on acyclic multifunctions and applications to KKM theory // Fixed Point Theory and Applications / K. K. Tan, ed. — London: World Sci. Press, 1992. — P. 248—277.