Условие Липшица метрической проекции в гильбертовом пространстве

М. В. БАЛАШОВ
Московский физико-технический институт
e-mail: balashov73@mail.ru

УДК 517.982.22+517.982.252+517.982.256

Ключевые слова: гильбертово пространство, функция расстояния, метрическая проекция, сильно выпуклое множество с радиусом R, опорный принцип, опорное условие, проксимальная гладкое (прокс-регулярное) множество, метод проекции градиента.

Аннотация

В настоящем обзоре мы рассматриваем оператор метрического проектирования из вещественного гильбертова пространства на замкнутое подмножество. Мы обсуждаем вопрос: когда этот оператор непрерывен по Липшицу? Во-первых, мы рассматриваем класс сильно выпуклых множеств с радиусом R, т. е. каждое множество из этого класса есть непустое пересечение замкнутых шаров радиуса R. Мы доказываем, что сужение оператора метрического проектирования на дополнение к окрестности радиуса r сильно выпуклого множества с радиусом R непрерывно по Липшицу с константой Липшица $C = R/(r+R) \in (0,1)$. Наоборот, если для замкнутого выпуклого множества из вещественного гильбертова пространства оператор метрического проектирования непрерывен по Липшицу с константой Липшица $C \in (0,1)$ на дополнении к окрестности радиуса r этого множества, то множество сильно выпукло с радиусом $R = Cr/(1-C)$.

Известно, что если замкнутое подмножество вещественного гильбертова пространства имеет непрерывную по Липшицу метрическую проекцию в некоторой окрестности, то это множество проксимально гладкое. Мы показываем, что если замкнутое подмножество вещественного гильбертова пространства имеет непрерывную по Липшицу метрическую проекцию на окрестности радиуса r с константой Липшица $C > 1$, то это множество проксимально гладкое с константой проксимальной гладкости $R = Cr/(C-1)$, также если константа C наименьшая возможная, то константа R наибольшая возможная.

Мы применяем полученные результаты к вопросу о сходимости метода проекции градиента.

Abstract

M. V. Balashov, The Lipschitz property of the metric projection in the Hilbert space, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 1, pp. 13—29.

In the survey, we consider the metric projection operator from the real Hilbert space onto a closed subset. We discuss the question: when this operator is Lipschitz continuous? Firstly, we consider the class of strongly convex sets of radius R, i.e., each set from this class is nonempty intersection of closed balls of radius R. We prove that the restriction of the metric projection operator on the complement of the neighborhood of radius r of a strongly convex set of radius R is Lipschitz continuous with the Lipschitz constant

Фундаментальная и прикладная математика, 2018, том 22, № 1, с. 13—29.

$C = R/(r+R) \in (0,1)$. Vice versa, if for a closed convex set from the real Hilbert space the metric projection operator is Lipschitz continuous with the Lipschitz constant $C \in (0,1)$ on the complement of the neighborhood of radius r of the set then the set is strongly convex of radius $R = Cr/(1-C)$.

It is known that if a closed subset of a real Hilbert space has the Lipschitz continuous metric projection in some neighborhood then this set is proximally smooth. We show that if a closed subset of the real Hilbert space has the Lipschitz continuous metric projection on the neighborhood of radius r with the Lipschitz constant $C > 1$, then this set is proximally smooth with constant of proximal smoothness $R = Cr/(C-1)$, and, if constant C is the smallest possible, then constant R is the largest possible.

We apply obtained results to the question concerning the rate of convergence for the gradient projection algorithm.

1. Введение и основные обозначения

Оператор метрического проектирования на подмножество A в нормированном пространстве

$$P_A x = \Big\{ a \in A \mid \|x-a\| = \inf_{y\in A} \|x-y\| \Big\},$$

является очень важным как в теории, так и в приложениях.

Со времён Г. Минковского (а может быть, и раньше) хорошо известно, что метрическая проекция (как функция точки) на замкнутое выпуклое подмножество в конечномерном евклидовом пространстве одноточечна и непрерывна по Липшицу с константой Липшица 1. Р. Фелпс [23] был одним из первых авторов, кто обратил внимание на этот факт в гильбертовом пространстве. Это свойство оказалось очень важным в различных областях математики.

Дж. Линденштраусс доказал [21, § 3, следствие 2], что если в равномерно выпуклом банаховом пространстве E ([6], гильбертово пространство равномерно выпуклое) оператор метрического проектирования на любое замкнутое подпространство L является равномерно непрерывным, то существует ограниченный линейный проектор из E на L (для любого замкнутого подпространства $L \subset E$). Следовательно, всякое замкнутое линейное подпространство $L \subset E$ в этом случае дополняемо. Дж. Линденштраусс доказал (проблема дополняемости подпространств [22]), что в этом случае пространство E изоморфно гильбертову пространству. Таким образом, условие Липшица оператора метрического проектирования характеризует гильбертово пространство.

Другой важный вопрос возник в приложениях, в задачах оптимизации. Свойство оператора метрического проектирования на замкнутое выпуклое подмножество в гильбертовом пространстве быть нерастягивающим было полезно в методах проекции градиента. Но для результатов сходимости в задаче

$$\min_{x\in A} f(x)$$

авторы использовали главным образом специальные свойства функции (в первую очередь сильную выпуклость), и на основе этих свойств они доказывали сходимость процедуры

$$x_1 \in A, \quad x_{k+1} = P_A\bigl(x_k - \alpha_k f'(x_k)\bigr), \quad \alpha_k > 0,$$

для некоторых специальных чисел α_k. Очевидно, что в случае сжимаемости для P_A результаты были бы сильнее.

Мы хотим упомянуть несколько работ Т. Абацоглу [10, 11]. В этих работах введены некоторые новые понятия радиуса кривизны для множеств и доказан ряд теорем об условии Липшица оператора метрического проектирования на некоторый класс множеств с заданным радиусом кривизны, в частности с гладкой границей. Одним из недостатков подхода Т. Абацоглу было то, что геометрические свойства множеств с данным радиусом кривизны были не ясны. Существовали также проблемы с вычислением этого радиуса.

В настоящем небольшом обзоре на основе работ [12, 14] мы хотим усилить результаты Т. Абацоглу для одного класса выпуклых подмножеств в гильбертовом пространстве, а также рассмотреть ситуацию с оператором метрического проектирования для одного класса невыпуклых подмножеств гильбертова пространства. В обоих случаях мы будем рассматривать условие Липшица для оператора метрического проектирования и обсуждать взаимосвязь между константой Липшица и различными геометрическими свойствами рассматриваемых множеств.

Напомним некоторые факты и определения, а также введём некоторые обозначения.

В данной статье E обозначает вещественное банахово пространство, а E^* его сопряжённое. Пусть $\mathcal{H}$ — вещественное гильбертово пространство и $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство. Мы обозначим через (p, x) значение функционала $p \in E^*$ в точке $x \in E$. Пусть

$$B_r(a) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leqslant r\}.$$

Мы обозначим через ∂A, $\operatorname{int} A$ и $\operatorname{cl} A$ *границу*, *внутренность* и *замыкание* множества A соответственно. *Диаметр* подмножества $A \subset E$ определяется как

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|.$$

Для $x, y \in E$ определим

$$[x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\}, \quad (x, y) = [x, y] \setminus \{x, y\}.$$

Опорная функция подмножества $A \subset E$ задаётся формулой

$$s(p, A) = \sup_{a \in A} (p, a) \quad \text{для всех} \quad p \in E^*.$$

Мы обозначим *нормальный конус* к замкнутому выпуклому подмножеству $A \subset E$ в точке $a \in A$ через $N(A, a)$:

$$N(A, a) = \{p \in E^* \mid (p, a) \geqslant s(p, A)\}.$$

Для любого замкнутого выпуклого подмножества $A \subset E$ и любого вектора $p \in E^*$ мы определим множество

$$A(p) = \{x \in A \mid (p, x) = s(p, A)\}.$$

Функция расстояния от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$ задаётся формулой

$$\varrho_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|,$$

метрическая проекция точки $x \in E$ на множество A определяется следующим образом:

$$P_A x = \{a \in A \mid \|x - a\| = \varrho_A(x)\}.$$

Для подмножества $A \subset E$ пусть $U_A(r)$ — открытая r-окрестность A, т. е.

$$U_A(r) = \{x \in E \mid \varrho_A(x) < r\}.$$

Как мы упоминали ранее, для любой пары точек $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ и для выпуклого замкнутого подмножества $A \subset \mathcal{H}$ мы имеем

$$\|a_0 - a_1\| \leqslant 1 \cdot \|x_0 - x_1\|, \quad a_i = P_A x_i, \quad i = 0, 1. \tag{1.1}$$

Константа Липшица 1 в формуле (1.1) наилучшая в общем случае и достигается на замкнутых аффинных подпространствах.

С другой стороны, рассмотрим шар $A = B_R(a) \subset \mathcal{H}$ и точки $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ со свойством $\varrho_A(x_0) = \varrho_0 > 0$, $\varrho_A(x_1) = \varrho_1 > 0$. По теореме косинусов для треугольника $x_0 x_1 a$ (со сторонами $\|a - x_0\| = R + \varrho_0$, $\|x_1 - a\| = R + \varrho_1$) мы легко получаем, что

$$\|a_0 - a_1\| = \frac{R}{\sqrt{(R + \varrho_0)(R + \varrho_1)}} \cdot \sqrt{\|x_0 - x_1\|^2 - (\varrho_0 - \varrho_1)^2}. \tag{1.2}$$

Здесь $a_i = P_A x_i$, $i = 0, 1$. Таким образом, если существует число $r > 0$ со свойством $\varrho_{B_R(a)}(x_i) \geqslant r$, $i = 0, 1$, то

$$\|a_0 - a_1\| \leqslant \frac{R}{R + r} \cdot \|x_0 - x_1\|. \tag{1.3}$$

Далее мы хотим охарактеризовать такие замкнутые выпуклые подмножества A в $\mathcal{H}$, что для всех $r > 0$ и любых точек $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ со свойством $\varrho_A(x_i) > r$, $i = 0, 1$, существует такое $C \in (0, 1)$, что

$$\|a_0 - a_1\| \leqslant C \|x_0 - x_1\|, \tag{1.4}$$

где $a_i = P_A x_i$, $i = 0, 1$.

Определение 1.1 [4,8,20]. Непустое подмножество $A \subset E$ называется *сильно выпуклым с радиусом* $R > 0$, если оно может быть представлено как пересечение замкнутых шаров радиуса $R > 0$, т. е. существует подмножество $X \subset E$, такое что $A = \bigcap_{x \in X} B_R(x)$.

Информацию о сильно выпуклых с радиусом $R > 0$ множествах можно найти в $[3, 4, 8, 9, 15, 20, 26]$.

Предложение 1.1 (опорный принцип [4, 20]). *Замкнутое выпуклое подмножество $A \subset \mathcal{H}$ сильно выпукло с радиусом R тогда и только тогда, когда для любого единичного вектора $p \in \mathcal{H}$ и точки $\{a(p)\} = A(p)$ выполняется включение*

$$A \subset B_R(a(p) - Rp).$$

Следующее предложение даёт очень важную характеризацию сильной выпуклости в гильбертовом пространстве.

Предложение 1.2 [9, теорема 4.3.2; 20]. *Замкнутое выпуклое подмножество $A \subset \mathcal{H}$ сильно выпукло с радиусом R тогда и только тогда, когда для любых единичных векторов $p, q \in \mathcal{H}$ и для точек $\{a(p)\} = A(p)$, $\{a(q)\} = A(q)$ выполнено неравенство*

$$\|a(p) - a(q)\| \leqslant R\|p - q\|.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что множество A сильно выпуклое с радиусом R. По предложению 1.1 для любых точек $p, q \in \partial B_1(0)$ и $\{a(p)\} = A(p)$, $\{a(q)\} = A(q)$ мы имеем следующие включения:

$$a(p) \in B_R(a(q) - Rq), \quad a(q) \in B_R(a(p) - Rp).$$

Другими словами,

$$\|a(p) - a(q)\|^2 \leqslant 2R\big(q, a(q) - a(p)\big), \quad \|a(p) - a(q)\|^2 \leqslant 2R\big(p, a(p) - a(q)\big)$$

и, значит,

$$2\|a(p) - a(q)\|^2 \leqslant 2R\big(p - q, a(p) - a(q)\big).$$

Таким образом, $\|a(p) - a(q)\| \leqslant R\|p - q\|$.

Достаточность. Допустим противоположное: множество A не сильно выпуклое с радиусом R. По предложению 1.1 существует вектор $p \in \partial B_1(0)$, такой что $A \not\subset B_R(a(p) - Rp)$. Положим $z = a(p) - Rp$. Для любого $q \in \partial B_1(0)$ имеем $s(q, A) = \big(q, a(q)\big) < +\infty$. Таким образом, множество A является ограниченным.

Положим

$$R_0 = \inf\{r > 0 \mid A \subset B_r(z)\},$$

$R_0 < +\infty$. Определение R_0 означает, что $A \subset z + R_0 B_1(0)$ и $R_0 > R$.

Выберем такую последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$, что числа $R_k = \|x_k - z\|$ удовлетворяют условиям $R < R_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = R_0$.

Пусть

$$q_k = \frac{x_k - z}{R_k}, \quad H_k^+ = \{x \in \mathcal{H} \mid (q_k, x) \geqslant (q_k, x_k)\}.$$

Положим

$$r_k = \sqrt{R_0^2 - R_k^2}.$$

По определению

$$\lim_{k\to\infty} r_k = 0.$$

Пусть $x \in B_{R_0}(z) \cap H_k^+$. Тогда

$$\|x - x_k\|^2 = \|x - z - R_k q_k\|^2 = \|x - z\|^2 + R_k^2 + 2R_k(z - x, q_k).$$

Из включения $x \in H_k^+$ мы получаем, что

$$(z - x, q_k) \leqslant (z - x_k, q_k) = -R_k$$

и

$$\|x - x_k\|^2 \leqslant \|x - z\|^2 - R_k^2 \leqslant R_0^2 - R_k^2 = r_k^2.$$

Таким образом,

$$a(q_k) \in B_{R_0}(z) \cap H_k^+ \subset x_k + r_k B_1(0).$$

Для любого натурального k мы получаем следующее равенство:

$$a(q_k) = z + R_k q_k + r_k e_k, \quad e_k \in B_1(0).$$

Положим

$$\alpha_k = r_k^2 + 2r_k(e_k, R_k q_k - Rp); \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \|a(p) - a(q_k)\|^2 &= \|R_k q_k + r_k e_k - Rp\|^2 = \\ &= \alpha_k + (R_k - R)^2 + R^2\|q_k - p\|^2 + 2R(R_k - R)(q_k, q_k - p) \geqslant \\ &\geqslant \alpha_k + (R_k - R)^2 + R^2\|q_k - p\|^2. \end{aligned}$$

По последней формуле условие Липшица с константой Липшица R не выполняется для достаточно больших номеров k. □

Пусть банахово пространство E является равномерно выпуклым и равномерно гладким [6]. Гильбертово пространство как равномерно выпукло, так и равномерно гладко.

Определение 1.2 [18, 24]. Замкнутое подмножество $A \subset E$ называется *проксимально гладким* (или *прокс-регулярным*) *с константой* $R > 0$, если функция расстояния $\varrho_A(x)$ непрерывно дифференцируема на множестве $U_A(R) \setminus A$.

Определение 1.3 [18]. Мы будем говорить, что подмножество $A \subset E$ удовлетворяет *опорному условию с константой* $R > 0$, если для любой точки $x \in U_A(R) \setminus A$, такой что $P_A x \neq \varnothing$ и $a \in P_A x$, мы имеем равенство

$$A \cap \operatorname{int} B_R\left(a + R\frac{x - a}{\|x - a\|}\right) = \varnothing. \tag{1.5}$$

Предложение 1.3 объясняет важность проксимальной гладкости в наших делах.

Предложение 1.3 [16, теорема 6.2; 17, утверждение 2.6; 18, теорема 4.1]. *Пусть $A \subset E$ (заметим, что E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство) — замкнутое подмножество, $R > 0$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *множество A удовлетворяет опорному условию с константой R;*
2) *множество A проксимально гладкое с константой R;*
3) *метрическая проекция $P_A x$ одноточечная и непрерывная для всех $x \in U_A(R) \setminus A$.*

Предложение 1.3 было доказано в случае пространства $\mathcal{H}$ в [17,18], в случае пространства E — в [16]. Ещё одно доказательство для случая пространства E можно найти в [3].

Доказана следующая оценка для проксимально гладкого подмножества $A \subset \mathcal{H}$ с константой $R > 0$.

Предложение 1.4 [18, теорема 4.8 (1)]. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — проксимально гладкое множество с константой $R > 0$, $r \in (0, R)$, $x_0, x_1 \in U_A(r) \setminus A$, $\{a_i\} = P_A x_i$, $i = 0, 1$. Тогда*

$$\|a_0 - a_1\| \leqslant \frac{R}{R-r}\|x_0 - x_1\|. \tag{1.6}$$

$P_A x$ можно вычислить по формуле [18, утверждение 3.6 (2)]

$$P_A x = x - \varrho_A(x)\varrho_A'(x) \quad \text{для всех} \quad x \in U_A(r) \setminus A. \tag{1.7}$$

Легко убедиться, что формула (1.6) верна для всех $x_0, x_1 \in U_A(r)$. Константа Липшица $R/(R-r)$ в формуле (1.6) наилучшая возможная в общем случае; она достигается, например, в $\mathbb{R}^2$ для множества $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ с $R = 1$ и любым $r \in (0, 1)$.

М. Балашов и Г. Иванов уточнили результат (1.6) следующим образом.

Предложение 1.5 [2, теорема 2]. *Пусть множества $A_0, A_1 \subset \mathcal{H}$ слабо выпуклы (и, значит, проксимально гладкие, см.* [3]*) с константой $R > 0$ (и такой же константой R проксимальной гладкости). Пусть $r \in (0, R)$ и $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ — такие точки, что $\varrho_{A_i}(x_i) < r$, $i = 0, 1$. Тогда*

$$\|a_0 - a_1\| \leqslant \frac{R}{R-r}\|x_0 - x_1\| + \sqrt{\frac{2rRh(A_0, A_1)}{R-r}}.$$

По результату Дж. Даниеля [19] метрическая проекция $P_A x$ в гильбертовом пространстве непрерывна по Гёльдеру как функция множества A на классе выпуклых замкнутых подмножеств в метрике Хаусдорфа с показателем $1/2$. Таким образом, результат предложения 1.5 точный.

Далее мы планируем обсудить вопрос о взаимосвязи констант R, r и константы Липшица C метрической проекции на проксимально гладкое множество (с константой R). Предположим, что для некоторого замкнутого подмножества $A \subset \mathcal{H}$ и $r > 0$ мы имеем такую константу $C > 1$, что

$$\|a_0 - a_1\| \leqslant C\|x_0 - x_1\| \quad \text{для всех} \quad x_0, x_1 \in U_A(r) \setminus A, \quad \{a_i\} = P_A x_i, \quad i = 0, 1. \tag{1.8}$$

По предложению 1.3 множество A проксимально гладкое с константой r. Но можем ли мы утверждать, что константа проксимальной гладкости для множества A больше, чем r?

2. Метрическая проекция и строгая выпуклость с радиусом R

Теорема 2.1. *Пусть* $A \subset \mathcal{H}$ — *сильно выпуклое подмножество с радиусом* $R > 0$. *Пусть* $x_0, x_1 \in \mathcal{H} \setminus A$, $\varrho_i = \varrho_A(x_i)$, $a_i = P_A x_i$, $i = 0, 1$. *Тогда*

$$\|a_0 - a_1\| \leqslant \frac{R}{\sqrt{(R+\varrho_0)(R+\varrho_1)}} \sqrt{\|x_0 - x_1\|^2 - (\varrho_0 - \varrho_1)^2}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Используя предложение 1.2, мы имеем

$$\|a_0 - a_1\| \leqslant R \left\| \frac{x_0 - a_0}{\varrho_0} - \frac{x_1 - a_1}{\varrho_1} \right\|$$

и

$$\|a_0 - a_1\|^2 \leqslant R^2 \left(2 - \frac{2}{\varrho_0 \varrho_1} (x_0 - a_0, x_1 - a_1) \right) =$$
$$= R^2 \left(2 + \frac{\|a_0 - a_1\|^2 + \|x_0 - x_1\|^2 - \|x_1 - a_0\|^2 - \|x_0 - a_1\|^2}{\varrho_0 \varrho_1} \right). \tag{2.2}$$

Пусть $\alpha = \|a_0 - a_1\|$, $\varepsilon = \|x_0 - x_1\|$. По предложению 1.1 мы получаем, что

$$a_1 \in A \subset B_R \left(a_0 - R \frac{x_0 - a_0}{\varrho_0} \right).$$

Положим

$$z = a_0 - R \frac{x_0 - a_0}{\varrho_0}.$$

Заметим, что $\angle x_0 a_0 a_1 = \pi - \angle z a_0 a_1$, $\|z - a_1\| \leqslant R$. Используя теорему косинусов, мы имеем

$$\cos \angle x_0 a_0 a_1 = -\cos \angle z a_0 a_1 = -\frac{R^2 + \alpha^2 - \|z - a_1\|^2}{2R\alpha} \leqslant -\frac{\alpha}{2R}$$

и

$$\|x_0 - a_1\|^2 = \|x_0 - a_0\|^2 + \|a_0 - a_1\|^2 - 2\|x_0 - a_0\| \cdot \|a_0 - a_1\| \cos \angle x_0 a_0 a_1 \geqslant \varrho_0^2 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2 \varrho_0}{R}.$$

Аналогично мы получаем, что

$$\|x_1 - a_0\|^2 \geqslant \varrho_1^2 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2 \varrho_1}{R}.$$

По формуле (2.2) мы получаем

$$\alpha^2 \leqslant R^2 \left(2 + \frac{\alpha^2 + \varepsilon^2 - \varrho_1^2 - \alpha^2 - \alpha^2 \varrho_1 / R - \varrho_0^2 - \alpha^2 - \alpha^2 \varrho_0 / R}{\varrho_0 \varrho_1} \right),$$

и после преобразований имеем

$$\alpha \leqslant \frac{R}{\sqrt{(R+\varrho_0)(R+\varrho_1)}} \sqrt{\varepsilon^2 - (\varrho_0 - \varrho_1)^2}. \qquad \square$$

Замечание 2.1. Заметим, что если $x_0 \in A$, т. е. $\varrho_0 = 0$, то формула (2.1) остаётся справедливой. В этом случае $a_0 = P_A x_0 = x_0$, и, применяя предложение 1.1, мы имеем

$$x_0 \in A \subset B_R\left(a_1 - R\frac{x_1 - a_1}{\varrho_1}\right).$$

Следовательно,

$$\cos\angle x_0 a_1 x_1 \leqslant -\frac{\|x_0 - a_1\|}{2R},$$

как и в доказательстве теоремы 2.1. По теореме косинусов для треугольника $x_0a_1x_1$ мы получаем, что

$$\|x_0 - x_1\|^2 = \|x_0 - a_1\|^2 + \varrho_1^2 - 2\|x_0 - a_1\|\varrho_1\cos\angle x_0a_1x_1 \geqslant$$
$$\geqslant \|x_0 - a_1\|^2 + \varrho_1^2 + \frac{\varrho_1\|x_0 - a_1\|^2}{R}.$$

Последняя формула эквивалентна формуле (2.1) с $\varrho_0 = 0$ и $x_0 = a_0$.

Мы видим, что оценка (2.1) для произвольного сильно выпуклого множества с радиусом R совпадает с оценкой (1.2) для шара радиуса R.

Лемма 2.1. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — замкнутое выпуклое подмножество, $r > 0$, $C \in (0,1)$. Предположим, что формула (1.4) справедлива для любых $x_0, x_1 \in \mathcal{H} \setminus U_A(r)$ и $a_i = P_A x_i$, $i = 0,1$. Тогда множество A является ограниченным.*

Доказательство. Согласно [6, гл. 5, § 9, следствие 12] существует плотное подмножество $S \subset \partial A$, такое что любая точка $a \in S$ удовлетворяет условию $a = P_A x_a$ для некоторого $x_a \in \mathcal{H} \setminus A$. Более того,

$$l(a, x_a) = \{a + \lambda(x_a - a) \mid \lambda \geqslant 0\} \subset a + N(A, a).$$

Таким образом, $P_A l(a, x_a) = \{a\}$. Зафиксируем любые точки $a, b \in S$. Найдутся точки $z_a \in l(a, x_a)$ и $z_b \in l(b, x_b)$, удовлетворяющие условию $\|z_a - a\| = \|z_b - b\| = r$. Тогда

$$\|a - b\| \leqslant C\|z_a - z_b\| \leqslant C(\|z_a - a\| + \|a - b\| + \|z_b - b\|) = C(2r + \|a - b\|).$$

Таким образом,

$$\|a - b\| \leqslant \frac{2Cr}{1 - C}.$$

Свойство $\operatorname{cl} S = \partial A$ гарантирует, что $\operatorname{diam} A \leqslant \operatorname{diam} A \leqslant 2Cr/(1 - C)$. □

По лемме 2.1 далее мы можем рассматривать только ограниченные множества.

Теорема 2.2. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — замкнутое выпуклое ограниченное подмножество, $r > 0$, $C \in (0,1)$. Предположим, что формула (1.4) выполняется для любых точек $x_0, x_1 \in \mathcal{H} \setminus U_A(r)$ и $a_i = P_A x_i$, $i = 0,1$. Тогда множество A сильно выпукло с радиусом $R = Cr/(1 - C)$.*

Доказательство. Пусть $x_0, x_1 \in \partial\big(\mathcal{H} \setminus U_A(r)\big)$, i.e., $\varrho_A(x_i) = r$, $i = 0, 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|a_0 - a_1\| &\leqslant C\|a_0 - a_1\| + Cr \cdot \left\| \frac{x_0 - a_0}{r} - \frac{x_1 - a_1}{r} \right\|, \\ \|a_0 - a_1\| &\leqslant R \cdot \left\| \frac{x_0 - a_0}{r} - \frac{x_1 - a_1}{r} \right\| \end{aligned} \tag{2.3}$$

и

$$\frac{x_i - a_i}{r} \in N(A, a_i), \quad i = 0, 1.$$

Покажем, что

$$\left\{ \frac{x - P_A x}{r} \;\Big|\; x \in \partial\big(\mathcal{H} \setminus U_A(r)\big) \right\} = \partial B_1(0). \tag{2.4}$$

Включение

$$\frac{x - P_A x}{r} \in \partial B_1(0)$$

очевидно для любой точки $x \in \partial\big(\mathcal{H} \setminus U_A(r)\big)$.

Пусть $p \in \partial B_1(0)$. Тогда существует точка $a(p) \in A$, такая что $\big(p, a(p)\big) = s(p, A)$ [6]. Следовательно, $x(p) = a(p) + rp \in \partial\big(\mathcal{H} \setminus U_A(r)\big)$ и $P_A\big(x(p)\big) = a(p)$. Поэтому

$$p = \frac{x(p) - a(p)}{r}.$$

По формулам (2.3), (2.4) и предложению 1.2 мы получаем, что множество A сильно выпуклое с радиусом R. □

Следствие 2.1. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — замкнутое выпуклое подмножество. Тогда следующие свойства эквивалентны*:

1) *множество A сильно выпуклое с радиусом $R > 0$;*
2) *для любого $r > 0$ и любых точек $x_0, x_1 \in \mathcal{H} \setminus U_A(r)$, $a_i = P_A x_i$, $i = 0, 1$, выполнено неравенство*

$$\|a_0 - a_1\| \leqslant \frac{R}{R + r}\|x_0 - x_1\|. \tag{2.5}$$

Утверждение следует из теорем 2.1 и 2.2.

3. Проксимальная гладкость множества с непрерывной по Липшицу проекцией

В данном разделе E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое пространство.

Лемма 3.1. *Пусть $A \subset E$ — проксимально гладкое множество с константой $r > 0$, такое что формула* (1.8) *выполняется для некоторой константы $C > 1$. Тогда*

1) $\|a_0 - a_1\| \leqslant C\|x_0 - x_1\|$ *для любых* $x_0, x_1 \in \big(\operatorname{cl} U_A(r)\big) \setminus A$, $\{a_i\} = P_A x_i$, $i = 0, 1$;
2) *если* $x \in U_A(r) \setminus A$ *и* $\{a\} = P_A x$, *то* $\{a\} = P_A x_0$ *для точки* $x_0 = a + r(x-a)/\varrho_A(x)$.

Лемма 3.2. *Пусть* $R_0 > 0$ *и* $A \subset E$ — *проксимально гладкое множество с любой константой* $R \in (0, R_0)$. *Тогда множество* A *является проксимально гладким с константой* R_0.

Утверждения лемм 3.1 и 3.2 легко следуют из опорного принципа для проксимально гладких множеств.

Предложение 3.1 [25]. *Пусть* E — *равномерно выпуклое банахово пространство. Для любого замкнутого подмножества* $A \subset E$ *множество* $T = \{x \in E \mid |P_A x| = 1\}$ *плотно в* E, *т. е.* $\operatorname{cl} T = E$.

Теорема 3.1. *Пусть* $A \subset E$ — *замкнутое подмножество со свойством* (1.8). *Тогда множество* A *проксимально гладкое с константой* $R_0 = rC/(C-1)$.

Доказательство. Положим $R_0 = rC/(C-1)$. По предложению 1.3 множество A проксимально гладкое с константой r. Предположим, что утверждение неверно. Тогда (по лемме 3.2) найдётся число $R < R_0$ и точка $x_0 \in U_A(R) \setminus A$, такие что для $a_0 \in P_A x_0$

$$A \cap \operatorname{int} B_R\left(a_0 + R\frac{x_0 - a_0}{\varrho_A(x_0)}\right) \neq \varnothing.$$

Без ограничения общности мы можем предполагать, что $\varrho_A(x_0) = r$. Действительно, если $\varrho_A(x_0) < r$, то мы можем применить второй пункт леммы 3.1. Если $\varrho_A(x_0) > r$, то из равномерной выпуклости пространства E мы получаем, что $P_A x = \{a_0\}$ для любой точки $x \in (a_0, x_0)$. Следовательно, мы положим $\varrho_A(x_0) = r$.

Пусть

$$z_0 = a_0 + \frac{x_0 - a_0}{r} R.$$

Рассмотрим два случая: 1) $z_0 \in A$ и 2) $z_0 \notin A$.

Случай 1). Пусть z_1 — ближайшая точка множества $[x_0, z_0] \cap A$ к точке x_0. Пусть $R_1 = \|a_0 - z_1\| \leqslant R < R_0$, $R_1 > r$. Зафиксируем

$$\gamma \in \left(0, \min\left\{\frac{R_0 - R_1}{R_0 - r}\frac{r}{4}, \frac{r}{4}, R_1 - r\right\}\right).$$

Пусть точка $y \in [a_0, z_1]$ такая, что $\|y - z_1\| = \gamma$, $\varrho_A(y) > 0$. По предложению 3.1 найдётся точка $x_1 \in B_\gamma(y)$, которая может быть выбрана со свойствами $x_1 \notin A$ (поскольку $\varrho_A(y) > 0$) и $P_A x_1 = \{b\}$. Более того, имеем

$$\|x_1 - b\| \leqslant \|x_1 - z_1\| \leqslant \|x_1 - y\| + \|y - z_1\| \leqslant 2\gamma < r,$$
$$\|y - b\| \leqslant \|x_1 - b\| + \|y - x_1\| \leqslant 3\gamma.$$

Из предыдущих оценок мы получаем, что $\varrho_A(x_1) = \|x_1 - b\| < r$,

$$\|a_0 - b\| \geqslant \|a_0 - y\| - \|y - b\| = R_1 - \gamma - \|y - b\| \geqslant R_1 - 4\gamma,$$

$\|x_0 - y\| = R_1 - r - \gamma$ и

$$\|x_0 - x_1\| \leqslant \|x_0 - y\| + \|y - x_1\| \leqslant R_1 - r.$$

Окончательно

$$\frac{\|a_0 - b\|}{\|x_0 - x_1\|} \geqslant \frac{R_1 - 4\gamma}{R_1 - r} > \frac{R_0}{R_0 - r} = C.$$

Случай 2). Пусть $a_1 \in A \cap \operatorname{int} B_R(z_0)$. Определим $R_1 = \|z_0 - a_1\| < R$. Существует такое $\alpha > 0$, что $B_\alpha(z_0) \cap A = \varnothing$. Положим

$$C_R = \frac{R}{R - r} > C \quad \left(C = \frac{R_0}{R_0 - r}\right)$$

и зафиксируем некоторое

$$\gamma \in \left(0, \min\left\{\frac{1}{10}(R - R_1),\ \alpha,\ \beta\right\}\right),$$

где

$$\beta = \frac{(C_R - C)(R - R_1)}{CC_R + 2(C_R - C)}.$$

По предложению 3.1 существует точка $z_1 \in B_\gamma(z_0)$ со свойством $P_A z_1 = \{b\}$. Заметим, что $z_0 \neq b$, $z_1 \neq b$,

$$\|z_1 - b\| \leqslant \|z_1 - a_1\| \leqslant \|z_1 - z_0\| + \|z_0 - a_1\| \leqslant \gamma + R_1$$

и

$$\|z_0 - b\| \leqslant \|z_1 - b\| + \|z_0 - z_1\| \leqslant R_1 + 2\gamma < R.$$

Таким образом, $b \neq a_0$. Определим точки $x_1 \in [b, z_1]$ и $y \in [b, z_0]$ из равенств

$$\frac{\|b - z_1\|}{\|x_1 - z_1\|} = \frac{\|b - z_0\|}{\|y - z_0\|} = C_R.$$

Легко убедиться, что $\{b\} = P_A x_1$ и $\varrho_A(x_1) \leqslant r$. Более того, из векторной алгебры получаем, что

$$b - a_0 = b - z_0 - (a_0 - z_0) = C_R(y - z_0) - C_R(x_0 - z_0) = C_R(y - x_0)$$

и

$$\frac{\|b - a_0\|}{\|y - x_0\|} = C_R.$$

Тогда мы имеем

$$\frac{\|b - a_0\|}{\|x_1 - x_0\|} \geqslant \frac{\|b - a_0\|}{\|y - x_0\| + \|x_1 - y\|} \geqslant \frac{\|b - a_0\|}{\|y - x_0\| + \gamma} = \frac{C_R}{1 + \gamma/\|y - x_0\|}.$$

Из неравенства треугольника получаем, что

$$\|b - a_0\| \geqslant \|z_0 - a_0\| - \|z_0 - b\| \geqslant R - R_1 - 2\gamma,$$

следовательно,

$$\|y - x_0\| = \frac{1}{C_R}\|b - a_0\| \geqslant \frac{R - R_1 - 2\gamma}{C_R},$$

и

$$\frac{C_R}{1 + \gamma/\|y - x_0\|} \geqslant \frac{C_R}{1 + \gamma C_R/(R - R_1 - 2\gamma)} > \frac{C_R}{1 + \beta C_R/(R - R_1 - 2\beta)} = C.$$

Таким образом, в обоих случаях для точек $x_0, x_1 \in \operatorname{cl} U_A(r) \setminus A$ и их проекций a_0, b мы получаем, что $\|a_0 - b\| > C\|x_0 - x_1\|$. Используя первый пункт леммы 3.1, приходим к противоречию. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — замкнутое подмножество со свойством* (1.8) *и $C > 1$ — наименьшая возможная константа Липшица в* (1.8). *Тогда R_0 — наибольшая возможная константа проксимальной гладкости для множества A.*

Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — проксимально гладкое множество с максимальной константой проксимальной гладкости R. Тогда константа Липшица $R/(R - r)$ в формуле (1.6) *наименьшая возможная.*

Доказательство. Утверждение следует из формулы (1.6), теоремы 3.1 и того факта, что $R = rC/(C - 1)$ эквивалентно $C = R/(R - r)$. $\square$

Замечание 3.1. Если в формуле (1.8) $C = 1$, то множество A выпуклое. Действительно, по теореме 3.1 мы получаем, что множество A проксимально гладкое с любой константой $R > 0$. Следовательно, по предложению 1.3 метрическая проекция на множество A единственна и непрерывна в любой точке $x \in E \setminus A$. Согласно знаменитому результату Л. Власова [5] множество A выпуклое.

4. Приложение: метод проекции градиента

Рассмотрим задачу минимизации вида

$$\min f(x), \quad x \in A \subset \mathcal{H}. \tag{4.1}$$

Мы планируем обсудить стандартный метод проекции градиента: $x_1 \in \partial A$,

$$x_{k+1} = P_A\bigl(x_k - \alpha_k f'(x_k)\bigr), \quad \alpha_k > 0.$$

Предположим, что

(i) $A \subset \mathcal{H}$ сильно выпукло с радиусом R;

(ii) $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ выпуклая, дифференцируемая, и градиент $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$, т. е. для всех $x, y \in \mathcal{H}$

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leqslant L\|x - y\|;$$

(iii) для любого натурального k существует единичный вектор $p(x_k) \in N(A, x_k)$, такой что $\bigl(p(x_k), f'(x_k)\bigr) \leqslant 0$, т. е. $x_k - \alpha f'(x_k) \notin A$ для любого $\alpha > 0$;

(iv) задача (4.1) имеет единственной решение $x_* \in \partial A$.

Заметим, что условие (ii) эквивалентно следующему: для всех $x, y \in \mathcal{H}$

$$\big(x-y, f'(x)-f'(y)\big) \geqslant \frac{1}{L}\|f'(x)-f'(y)\|^2 \tag{4.2}$$

(см. [7, лемма 1.2.3, теорема 2.1.5]).

Следующий результат был получен М. Голубевым в [14].

Теорема 4.1. *Предположим, что выполнены условия* (i)—(iv). *Тогда для* $\alpha_k=\alpha=2/L$ *мы имеем оценку*

$$\|x_{k+1}-x_*\| \leqslant \frac{R}{\sqrt[4]{R^2+(4/L^2)\|f'(x_k)\|^2}\,\sqrt{R+(2/L)\|f'(x_*)\|}}\,\|x_k-x_*\|. \tag{4.3}$$

Доказательство. Рассмотрим $x_k \in \partial A$. По предложению 1.1

$$A \subset B_R\big(x_k-Rp(x_k)\big),$$

где $p(x_k)$ из (iii).

Пусть $y_k=x_k-\alpha f'(x_k)$, $z_k=x_k-Rp(x_k)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\|y_k-z_k\|^2=\alpha^2\|f'(x_k)\|^2+R^2-2\alpha R\big(f'(x_k),p(x_k)\big)\geqslant \alpha^2\|f'(x_k)\|^2+R^2,\\
&\varrho(y_k,A)\geqslant \varrho\big(y_k,B_R(z_k)\big)=\|y_k-z_k\|-R\geqslant \sqrt{\alpha^2\|f'(x_k)\|^2+R^2}-R,\\
&\varrho(x_*-\alpha f'(x_*),A)=\alpha\|f'(x_*)\|.
\end{aligned}$$

По формуле (2.1) теоремы 2.1 и замечанию 2.1 (в случае $f'(x_*)=0$) мы получаем

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}-x_*\|=\big\|P_A\big(x_k-\alpha f'(x_k)\big)-P_A\big(x_*-\alpha f'(x_*)\big)\big\|\leqslant&\\
\leqslant C_k\|x_k-\alpha f'(x_k)-x_*+\alpha f'(x_*)\|,&
\end{aligned} \tag{4.4}$$

где

$$C_k=\frac{R}{\sqrt[4]{R^2+(4/L^2)\|f'(x_k)\|^2}\,\sqrt{R+(2/L)\|f'(x_*)\|}}.$$

Используя (ii) и (4.2), мы получаем, что

$$\begin{aligned}
&\|x_k-\alpha f'(x_k)-x_*+\alpha f'(x_*)\|^2\leqslant\\
&\quad\leqslant \|x_k-x_*\|^2-2\alpha\big(x_k-x_*,f'(x_k)-f'(x_*)\big)+\alpha^2\|f'(x_k)-f'(x_*)\|^2\leqslant\\
&\quad\leqslant \|x_k-x_*\|^2-\frac{2\alpha}{L}\|f'(x_k)-f'(x_*)\|^2+\alpha^2\|f'(x_k)-f'(x_*)\|^2=\|x_k-x_*\|^2.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Вместе формулы (4.4) и (4.5) дают (4.3). □

Замечание 4.1. Если у нас есть информация о векторах $p(x_k)$ (см. (iii)), то оценку (4.3) можно уточнить. Используя формулу

$$\|y_k-z_k\|^2=\alpha^2\|f'(x_k)\|^2+R^2-2\alpha R\big(f'(x_k),p(x_k)\big),$$

мы получаем, что

$$\|x_{k+1}-x_*\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{R}{\sqrt[4]{R^2+(4/L^2)\|f'(x_k)\|^2-(4R/L)\big(f'(x_k),p(x_k)\big)}\sqrt{R+(2/L)\|f'(x_*)\|}}\|x_k-x_*\|.$$

Замечание 4.2. Формула (4.2) верна для всех $x, y \in A$, если условие (ii) справедливо для любых точек $x, y \in A + (\operatorname{diam} A) \cdot B_1(0)$. Этот факт легко следует из доказательства леммы 1.2.3 и теоремы 2.1.5 из [7].

Мы хотим напомнить, что в стандартной схеме метода проекции градиента сходимость последовательности $\|x_k - x_*\|$ также имеет место со скоростью геометрической прогрессии, но доказательство использует сильную выпуклость функции (а также непрерывность по Липшицу градиента) и выпуклость и замкнутость множества (см. [7, теорема 2.2.8]). Теорема 4.1 показывает, что в алгоритме (4.1) мы также можем использовать выпуклую функцию с непрерывным по Липшицу градиентом и сильно выпуклое множество.

Другой вопрос о методе проекции градиента: можем ли мы использовать сильно выпуклую функцию и невыпуклое (замкнутое) множество? Или, может быть, невыпуклую функцию и строго выпуклое множество? Частично ответы на эти вопросы были даны в [1, 13].

Пусть

(i) множество A сильно выпуклое с радиусом $R > 0$;

(ii) функция $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ имеет непрерывный по Липшицу градиент на множестве A с константой $L > 0$;

(iii) $R < m/L$, где $m = \inf\limits_{x\in\partial A} \|f'(x)\|$.

Теорема 4.2 [1, теорема 3.1]. *Предположим, что условия* (i)—(iii) *выполнены в задаче*

$$\max_{x\in A} f(x).$$

Тогда итерационный процесс $x_0 \in \partial A$,

$$x_{k+1} = \arg\max_{x\in A}(f'(x_k), x), \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

сходится к (*единственному*) *решению z_0 задачи со скоростью геометрической прогрессии с частным $q = RL/m$.*

Другая теорема может быть сформулирована для проксимально гладкого множества и сильно выпуклой функции с непрерывным по Липшицу градиентом.

Для функции $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ положим

$$\mathcal{L}_f(\alpha) = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \leqslant \alpha\}.$$

Теорема 4.3 [13]. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — проксимально гладкое подмножество с константой проксимальной гладкости $R > 0$. Пусть $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ — сильно* *выпуклая функция с константой сильной выпуклости* $\varkappa > 0$, *т. е. функция* $f(x) - (\varkappa/2)\|x\|^2$ *непрерывна и выпукла. Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}_f(\alpha) \cap A \neq \varnothing$, *а функция* f *имеет непрерывный по Липшицу градиент с константой* $L > 0$ *на множестве* $\mathcal{L}_f(\alpha)$. *Положим* $m = \sup\limits_{x \in \mathcal{L}_f(\alpha)} \|f'(x)\|$. *Предположим, что* $m/\varkappa < R$. *Тогда для любой начальной точки* $x_1 \in A \cap \mathcal{L}_f(\alpha)$ *итерационный процесс*

$$x_{k+1} = P_A\big(x_k - tf'(x_k)\big), \quad t = \frac{\varkappa - m/R}{L^2 - \varkappa m/R}, \tag{4.6}$$

сходится к единственному решению $x_0 \in A$ *задачи* (4.1) *со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем*

$$q(t) = \frac{R}{R - tm}\sqrt{1 - 2t\varkappa + t^2L^2} \in (0, 1), \quad t = \frac{\varkappa - m/R}{L^2 - \varkappa m/R}. \tag{4.7}$$

Именно, для всех $k \geqslant 1$

$$\|x_{k+1} - x_0\| \leqslant q(t)\|x_k - x_0\|.$$

Заметим, что t в формуле (4.6) даёт строгий глобальный минимум функции $q(\cdot)$ на промежутке $[0, R/m)$ и таким образом $q(t) < q(0) = 1$. Мы также хотим указать на то, что для последовательности $\{x_k\}$ из теоремы 4.3 можно доказать включение $x_k - tf'(x_k) \in U_R(A)$ для всех k, поэтому $P_A\big(x_k - tf'(x_k)\big)$ корректно определена и единственна.

Заметим также, что если мы знаем функцию расстояния $\varrho_A(x)$ в рамках теоремы 4.3, то мы можем эффективно вычислять метрическую проекцию в алгоритме (4.6) по формуле (1.7).

Работа была поддержана грантом РФФИ 16-01-00259.

Литература

[1] Балашов М. В. Максимизации функции с непрерывным по Липшицу градиентом // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 5. — С. 17—25.

[2] Балашов М. В., Иванов Г. Е. Свойства метрической проекции на множество, слабо выпуклое по Виалю, и параметризация многозначных отображений со слабо выпуклыми значениями // Матем. заметки. — 2006. — Т. 80, № 4. — С. 483—489.

[3] Балашов М. В., Иванов Г. Е. Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. — 2009. — Т. 73, № 3. — С. 23—66.

[4] Балашов М. В., Половинкин Е. С. M-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества // Матем. сб. — 2000. — Т. 191, № 1. — С. 27—64.

[5] Власов Л. П. О чебышёвских и аппроксимативно выпуклых множествах // Матем. заметки. — 1967. — Vol. 2, №. 2. — P. 191—200.

[6] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. — М.: Изд. иностр. лит., 1962. — Т. 1: Общая теория.

[7] Нестеров Ю. Введение в выпуклую оптимизацию. — М.: МЦМНО, 2010.

[8] Половинкин Е. С. Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. — 1996. — Т. 187, № 2. — С. 103—130.

[9] Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2007.

[10] Abatzoglou T. J. The minimum norm projection on C^2-manofolds in $\mathbb{R}^n$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1978. — Vol. 243. — P. 115—122.

[11] Abatzoglou T. J. The Lipschits continuity of the metric projection // J. Approx. Theory. — 1979. — Vol. 26. — P. 212—218.

[12] Balashov M. V. Proximal smoothness of a set with the Lipschitz metric projection // J. Math. Anal. Appl. — 2013. — Vol. 406, no. 1. — P. 360—363.

[13] Balashov M. V. About the gradient projection algorithm for a strongly convex function and a proximally smooth set // J. Convex Anal. — 2017. — Vol. 24, no. 2. — P. 493—500.

[14] Balashov M. V., Golubev M. O. About the Lipschitz property of the metric projection in the Hilbert space // J. Math. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 394. — P. 545—551.

[15] Balashov M. V., Repovš D. Uniformly convex subsets of the Hilbert space with modulus of convexity of the second order // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — Vol. 377, no. 2. — P. 754—761.

[16] Bernard F., Thibault L., Zlateva N. Characterization of proximal regular sets in super reflexive Banach spaces // J. Convex Anal. — 2006. — Vol. 13, no. 3-4. — P. 525—559.

[17] Canino A. On p-convex sets and geodesics // J. Differ. Equ. — 1988. — Vol. 75. — P. 118—157.

[18] Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R. Proximal smoothness and lower-C^2 property // J. Convex Anal. — 1995. — Vol. 2, no. 1-2. — P. 117—144.

[19] Daniel J. W. The continuity of metric projection as function of data // J. Approx. Theory. — 1974. — Vol. 12, no. 3. — P. 234—240.

[20] Frankowska H., Olech Ch. R-convexity of the integral of the set-valued functions // Contributions to Analysis and Geometry. — Baltimore: John Hopkins Univ. Press, 1981. — P. 117—129.

[21] Lindenstrauss J. On nonlinear projection in Banach spaces // Michigan Math. J. — 1964. — Vol. 11, no. 3. — P. 263—287.

[22] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. — New York: Springer, 1977. — I: Sequence Spaces.

[23] Phelps R. R. Convex sets and nearest points // Proc. Amer. Math. Soc. — 1957. — Vol. 8. — P. 790—797.

[24] Poliquin R. A., Rockafellar R. T., Thibault L. Local differentiability of distance functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 2000. — Vol. 352. — P. 5231—5249.

[25] Stechkin S. B. Approximative properties of sets in linear normed spaces // Rev. Math. Pures Appl. — 1963. — Vol. 8, no. 1. — P. 5—18.

[26] Vial J.-P. Strong and weak convexity of sets and functions // Math. Oper. Res. — 1983. — Vol. 8, no. 2. — P. 231—259.