О неулучшаемости некоторых теорем о сходимости в среднем тригонометрических рядов

А. С. БЕЛОВ
Ивановский государственный университет
e-mail: asbel@ivanovo.ac.ru

УДК 517.518

Ключевые слова: тригонометрические ряды, ряды Фурье, сходимость в среднем тригонометрических рядов, неограниченность в среднем частных сумм.

Аннотация

Предлагается способ построения примеров тригонометрических рядов Фурье с неограниченными в метрике $L_{2\pi}$ частными суммами, у которых коэффициенты удовлетворяют некоторым заранее заданным условиям. В частности, в статье строятся примеры тригонометрических рядов Фурье, которые показывают неулучшаемость некоторых условий сходимости в среднем тригонометрических рядов Фурье.

Abstract

A. S. Belov, On unimprovability of some theorems on convergence in mean of trigonometric series, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 1, pp. 31—49.

The paper puts forward a method for constructing trigonometric Fourier series with $L_{2\pi}$-unbounded partial sums that have coefficients with some preassigned properties. In particular, examples of trigonometric Fourier series showing that some conditions of convergence in the mean of trigonometric series cannot be sharpened are constructed.

1. Введение

Пусть

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\bigr) - \tag{1.1}$$

произвольный тригонометрический ряд, записанный в действительной или комплексной форме, где $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = (c_n - c_{-n})i$. Как обычно,

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad \text{и} \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x) -$$

соответственно частные суммы и средние Фейера для ряда (1.1), рассматриваемые при всех $n \geqslant 0$, а

$$\tilde{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} i(-c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) -$$

частные суммы сопряжённого ряда.

Если $f \in L_{2\pi}$ (т. е. f является 2π-периодической и интегрируемой по Лебегу функцией), то

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx.$$

Известно (см. [1, гл. 1, § 60]), что если ряд (1.1) является рядом Фурье некоторой функции $f \in L_{2\pi}$, то $\|\sigma_n - f\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит, частные суммы S_n сходятся (являются ограниченными) в среднем, т. е. в метрике $L_{2\pi}$, тогда и только тогда, когда

$$\|\sigma_n - S_n\|_1 = o(1) \quad (\text{соответственно } \|\sigma_n - S_n\|_1 = O(1)). \tag{1.2}$$

В (1.2) и далее в аналогичных соотношениях предполагаем, конечно, что n стремится к бесконечности.

Также известно (см. [2, лемма 3] или [3, леммы 1 и 2]), что условие (1.2) эквивалентно каждому из следующих условий:

$$\|\tilde{\sigma}_n - \tilde{S}_n\|_1 = o(1) \quad (\text{соответственно } \|\tilde{\sigma}_n - \tilde{S}_n\|_1 = O(1));$$
$$\max_{m=n,\dots,2n-1} \|S_m - S_{n-1}\|_1 = o(1)$$
$$(\text{соответственно } \max_{m=n,\dots,2n-1} \|S_m - S_{n-1}\|_1 = O(1));$$
$$\max_{m=n,\dots,2n-1} \|\tilde{S}_m - \tilde{S}_{n-1}\|_1 = o(1)$$
$$(\text{соответственно } \max_{m=n,\dots,2n-1} \|\tilde{S}_m - \tilde{S}_{n-1}\|_1 = O(1)).$$

Более подробно об условии (1.2) см. [6].

Будем, как обычно, использовать обозначение $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$.

В [2] доказана следующая теорема.

Теорема A. *Пусть существует такая положительная постоянная C, что*

$$2^n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} (|\Delta a_k|^2 + |\Delta b_k|^2) \leqslant C n^2 \quad \textit{при всех} \;\; n \geqslant 1. \tag{1.3}$$

Тогда условие (1.2) *эквивалентно условию*

$$(|a_n| + |b_n|) \ln n = o(1) \quad (\textit{соответственно } (|a_n| + |b_n|) \ln n = O(1)). \tag{1.4}$$

Из теоремы A как следствие (см. [2]) вытекает теорема B.

Теорема B. *Пусть существует такая положительная постоянная C, что*

$$|\Delta a_n| + |\Delta b_n| \leqslant C\frac{\ln(n+1)}{n} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1. \tag{1.5}$$

Тогда условия (1.2) *и* (1.4) *эквивалентны.*

В теоремах A и B тригонометрический ряд (1.1) не обязан быть рядом Фурье. В случае когда ряд (1.1) является рядом Фурье, теорема B утверждает, что при условии (1.5) частные суммы ряда (1.1) сходятся (ограничены) в среднем тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.4). Последнее утверждение улучшает результат Г. А. Фомина [12], который получается из сформулированного, если в правой части (1.5) взять $O(1/n)$.

Теорема A может быть несколько усилена. В [8] доказаны следующие две теоремы.

Теорема C. *Пусть для ряда* (1.1) *существуют числа* $p \in (1, \infty)$ *и* $C > 0$, *такие что*

$$2^{n(p-1)} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} (|\Delta a_k|^p + |\Delta b_k|^p) \leqslant Cn^p \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1. \tag{1.6}$$

Тогда условие (1.2) *эквивалентно условию* (1.4).

При $p = 2$ теорема C превращается в теорему A.

Теорема D. *Пусть для ряда* (1.1) *существуют числа* $p \in (2, \infty)$, $\theta > 0$ *и* $C > 0$, *такие что*

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |\Delta a_k| \left(\ln^+\left(\theta\frac{2^n}{n}|\Delta a_k|\right)\right)^p + \\ + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |\Delta b_k| \left(\ln^+\left(\theta\frac{2^n}{n}|\Delta b_k|\right)\right)^p \leqslant Cn \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1. \tag{1.7}$$

Тогда условие (1.2) *эквивалентно условию* (1.4).

Здесь, как обычно, обозначаем $a^+ = \max\{a, 0\}$,

$$\ln^+ x = \begin{cases} \ln x & \text{при } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Теоремы C и D, в частности, означают, что если тригонометрический ряд (1.1) является рядом Фурье (рядом Фурье—Стилтьеса) и выполнено либо условие (1.6), либо условие (1.7), то для сходимости (соответственно ограниченности) частных сумм ряда (1.1) в метрике $L_{2\pi}$ необходимо и достаточно выполнения соответствующего условия (1.4).

Отметим, что имеется довольно много работ (см., например, [11—14] и указанную там литературу), в которых для рядов Фурье при некоторых условиях на коэффициенты ряда получается эквивалентность условий (1.2) и (1.4). Но сформулированные теоремы A—D не только значительно усиливают известные результаты, но в принципе отличаются от них тем, что правые части условий (1.3), (1.5)—(1.7) неулучшаемы по порядку. Из [5, теорема 2] легко получаем (см. [5, доказательство теоремы 3]), что если в условиях (1.3), (1.5)—(1.7) вместо постоянной C взять произвольную положительную неограниченную функцию от n, то теоремы A—D потеряют силу, т. е. в этом смысле правые части условий (1.3), (1.5)—(1.7) неулучшаемы. Из той же теоремы 2 работы [5] следует, что в условии (1.7) в аргументе функции $\ln^+$ величину $2^n/n$ нельзя заменить на функцию от n, которая является $o(2^n/n)$. Однако построенные изложенным в [5] способом примеры тригонометрических рядов не обязаны быть рядами Фурье. В этой статье (см. следующий раздел) будет доказано, что теоремы A—D неулучшаемы в том же смысле даже для рядов Фурье.

Автор также анонсировал (см. [7, 9]) следующую теорему.

Теорема E. *Пусть существуют такие неотрицательные числа C_1 и C_2, что*

$$\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \big((|\Delta a_k| - C_1 n 2^{-n})^+ + (|\Delta b_k| - C_1 n 2^{-n})^+\big) \leqslant \frac{C_2}{n} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1. \tag{1.8}$$

Тогда условие (1.2) *эквивалентно условию*

$$\sum_{k=[n/2]}^{2n} \frac{|a_k| + |b_k|}{|k-n|+1} = o(1) \quad \Big(\text{соответственно} \sum_{k=[n/2]}^{2n} \frac{|a_k| + |b_k|}{|k-n|+1} = O(1)\Big). \tag{1.9}$$

Отметим, что из условия (1.4) вытекает условие (1.9).

Цель этой статьи — изложение конструкции рядов Фурье с требуемым поведением разностей коэффициентов и доказательства неулучшаемости условий (1.3), (1.5)—(1.8) в теоремах A—E, причём следует отметить, что изложенная конструкция применима и для доказательства неулучшаемости теорем, которые сформулированы в [7] без доказательства и которые дают различные условия эквивалентности (1.2) и (1.9).

2. Основные результаты

В статье мы будем строить тригонометрические ряды Фурье вида (1.1) только по косинусам или только по синусам. Поэтому всюду далее мы будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \tag{2.1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \tag{2.2}$$

и при всех $n \geqslant 0$ использовать обозначения

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx), \quad \tilde{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(nx). \tag{2.3}$$

Квадратные скобки всюду в статье, как обычно, обозначают целую часть числа.

В разделе 5 статьи будет доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть число* $\lambda > 1$ *и последовательность неотрицательных чисел* $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *таковы, что величина*

$$m(\varphi; n) = \min_{k=n,\ldots,[\lambda n]} \varphi(k) \tag{2.4}$$

удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\ln n} m(\varphi; n) = \infty. \tag{2.5}$$

Тогда можно построить такую последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, *что оба тригонометрических ряда* (2.1) *и* (2.2) *являются рядами Фурье интегрируемых по Лебегу функций,*

$$a_n \ln n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{2.6}$$

выполнено условие

$$|\Delta a_n| \leqslant \varphi(n) \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1 \tag{2.7}$$

и

$$\frac{|\Delta a_n|}{\varphi(n)} \to 0 \quad \text{при} \quad \varphi(n) > 0, \quad n \to \infty, \tag{2.8}$$

но частные суммы и ряда (2.1), *и ряда* (2.2) *неограниченные в метрике* $L_{2\pi}$, *т. е. в обозначениях* (2.3),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|S_n\|_1 = \infty \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \|\tilde{S}_n\|_1 = \infty, \tag{2.9}$$

и, более того,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{m=n,\ldots,2n-1} \|S_m - S_n\|_1 = +\infty \tag{2.10}$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{m=n,\ldots,2n-1} \|\tilde{S}_m - \tilde{S}_n\|_1 = +\infty. \tag{2.11}$$

Например, если $\varphi(n) = d_n \ln n/n$, где последовательность положительных чисел $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к бесконечности, то условие (2.5) выполнено. Это доказывает неулучшаемость условия (1.5) в теореме B для рядов Фурье. Этот результат был анонсирован в [13].

В разделе 7 также будет доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Для любой последовательности неотрицательных чисел* $\{\Phi(n)\}_{n=0}^{\infty}$, *которая удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \Phi(n) = \infty, \tag{2.12}$$

можно построить такую последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, *что оба тригонометрических ряда* (2.1) *и* (2.2) *являются рядами Фурье интегрируемых по Лебегу функций, выполнены условие* (2.6) *и условие*

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} |\Delta a_k| \leqslant \frac{\Phi(n)}{n+1} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 0, \tag{2.13}$$

но частные суммы и ряда (2.1), *и ряда* (2.2) *являются неограниченными в метрике* $L_{2\pi}$, *т. е. в обозначении* (2.3) *верно* (2.9), *и, более того, справедливы утверждения* (2.10) *и* (2.11).

Таким образом, теорема 2.2 доказывает неулучшаемость условия (1.8) в теореме E для рядов Фурье.

В разделе 8 статьи будет доказана следующая теорема.

Теорема 2.3. *Для любого числа* $p \in (1, \infty)$ *и любой последовательности неотрицательных чисел* $\{\Phi(n)\}_{n=0}^{\infty}$, *которая удовлетворяет условию* (2.12), *можно построить такую последовательность действительных чисел* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, *что оба тригонометрических ряда* (2.1) *и* (2.2) *являются рядами Фурье интегрируемых по Лебегу функций, выполнены условие* (2.6) *и условие*

$$2^{n(p-1)} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} |\Delta a_k|^p \leqslant \Phi(n) n^p \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 0, \tag{2.14}$$

но частные суммы и ряда (2.1), *и ряда* (2.2) *являются неограниченными в метрике* $L_{2\pi}$, *т. е. в обозначении* (2.3) *верно* (2.9), *и, более того, справедливы утверждения* (2.10) *и* (2.11).

Теорема 2.3 доказывает неулучшаемость условия (1.6) в теореме C и условия (1.3) в теореме A даже для рядов Фурье.

Отметим, что теоремы 2.2 и 2.3 анонсированы в [9].

Наконец, неулучшаемость теоремы D показывает следующая теорема.

Теорема 2.4. *Для любых чисел* $p, \theta \in (0, \infty)$ *и любой последовательности неотрицательных чисел* $\{\Phi(n)\}_{n=0}^{\infty}$, *которая удовлетворяет условию* (2.12), *можно построить такую последовательность действительных чисел* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, *что оба тригонометрических ряда* (2.1) *и* (2.2) *являются рядами Фурье интегрируемых по Лебегу функций, выполнены условие* (2.6) *и условие*

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} |\Delta a_k| \left(\ln^+ \left(\theta \frac{2^n}{n} |\Delta a_k|\right)\right)^p \leqslant n\Phi(n) \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1, \tag{2.15}$$

но частные суммы и ряда (2.1), *и ряда* (2.2) *являются неограниченными в метрике* $L_{2\pi}$, *т. е. в обозначении* (2.3) *верно* (2.9), *и, более того, справедливы утверждения* (2.10) *и* (2.11).

Эта статья содержит подробные доказательства сформулированных теорем 2.1—2.4. При этом изложен и на примере этих теорем применён способ построения рядов Фурье с требуемыми свойствами коэффициентов и их разностей.

Изложенная конструкция применима и для доказательства неулучшаемости условий теорем о сходимости в среднем, сформулированных в [7] без доказательства.

3. Основные оценки

Важную роль в этой статье играет следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть n — натуральное число, $T_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ — произвольный, т. е. с любыми комплексными коэффициентами, тригонометрический полином степени не выше n и $f \in L_{2\pi}$. Тогда для всех вещественных α и $N \geqslant 1$ и любого натуральное числа τ верны оценки*

$$\frac{[N/\tau]}{N}(\tau - 2\pi n)\|f\|_1\|T_n\|_1 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |T_n(x)|\,|f(Nx)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{[N/\tau]+1}{N}(\tau + 2\pi n)\|f\|_1\|T_n\|_1, \tag{3.1}$$

$$\frac{[N]-2\pi n}{N}\|f\|_1\|T_n\|_1 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |T_n(x)|\,|f(Nx)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{[N]+1+2\pi n}{N}\|f\|_1\|T_n\|_1. \tag{3.2}$$

В частности, если $N \geqslant 4\pi n$, то для любого α справедливы оценки

$$\frac{1}{3}\|f\|_1\|T_n\|_1 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |T_n(x)|\,|f(Nx)|\,dx \leqslant 2\|f\|_1\|T_n\|_1. \tag{3.3}$$

Заметим, что, как известно (см. [1, гл. 1, § 20]),

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |T_n(x)|\,|f(Nx)|\,dx \to \|f\|_1\|T_n\|_1 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Это утверждение вытекает и из оценок (3.2), которые, а именно это далее и используется, позволяют оценить скорость приближения в этом утверждении.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $N \geqslant 1$ и τ — натуральное число. При всех целых k будем обозначать $\alpha_k = \alpha + 2\pi k/\tau$, $I_k = [\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, $m_k = \min\{|T_n(x)|\colon x \in I_k\}$, $M_k = \max\{|T_n(x)|\colon x \in I_k\}$ и $x_k \in I_k$, $y_k \in I_k$ — любые такие точки, что $|T_n(x_k)| = M_k$, $|T_n(y_k)| = m_k$. Тогда

$$M_k - m_k = |T_n(x_k)| - |T_n(y_k)| \leqslant |T_n(x_k) - T_n(y_k)| \leqslant \int\limits_{I_k} |T_n'(x)|\,dx.$$

Поэтому по неравенству Бернштейна—Зигмунда (см. [10, гл. 10, § 3]) имеем

$$\sum_{k=1}^{\tau}(M_k - m_k) \leqslant \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |T_n'(x)|\,dx = 2\pi\|T_n'\|_1 \leqslant 2\pi n\|T_n\|_1.$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\tau} m_k \leqslant \frac{\tau}{2\pi}\sum_{k=1}^{\tau}\int\limits_{I_k}|T_n(x)|\,dx = \tau\|T_n\|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{\tau} M_k,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\tau} M_k \leqslant (\tau + 2\pi n)\|T_n\|_1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\tau} m_k \geqslant (\tau - 2\pi n)\|T_n\|_1. \tag{3.4}$$

Так как

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |T_n(x)|\,|f(Nx)|\,dx = \sum_{k=1}^{\tau}\int\limits_{I_k}|T_n(x)|\,|f(Nx)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\tau} M_k \int\limits_{I_k}|f(Nx)|\,dx = \sum_{k=1}^{\tau}\frac{M_k}{N}\int\limits_{N\alpha_k-2\pi N/\tau}^{N\alpha_k}|f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\tau}\frac{M_k}{N}\left(\left[\frac{N}{\tau}\right]+1\right)2\pi\|f\|_1 = \frac{2\pi}{N}\left(\left[\frac{N}{\tau}\right]+1\right)\|f\|_1\sum_{k=1}^{\tau}M_k,$$

то из первого неравенства (3.4) сразу получаем вторую оценку (3.1). Аналогично из оценки

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |T_n(x)|\,|f(Nx)|\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{\tau}\frac{m_k}{N}\int\limits_{N\alpha_k-2\pi N/\tau}^{N\alpha_k}|f(x)|\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\tau}\frac{m_k}{N}\left[\frac{N}{\tau}\right]2\pi\|f\|_1 = \frac{2\pi}{N}\left[\frac{N}{\tau}\right]\|f\|_1\sum_{k=1}^{\tau}m_k$$

и из второго неравенства (3.4) сразу получаем первую оценку (3.1). Полагая в ней $\tau = [N]$ и замечая, что $N/[N] < 2$, $\big[N/[N]\big] = 1$, сразу приходим к первой оценке (3.2). Беря $\tau = [N]+1$ во второй оценке (3.1), сразу приходим ко второй оценке (3.2).

Наконец, если $N \geqslant 4\pi n$, то

$$\frac{1+2\pi n}{N} \leqslant \frac{1+N/2}{N} < \frac{2}{3}$$

и

$$\frac{[N]-2\pi n}{N} > \frac{N-1-2\pi n}{N} > \frac{1}{3}, \quad \frac{N+1+2\pi n}{N} < \frac{5}{3}.$$

Этим оценки (3.3), а значит и теорема 3.1, доказаны. □

Для каждого целого неотрицательного ν через

$$F_\nu(x) = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \left(1 - \frac{|j|}{\nu+1}\right) e^{ijx} \tag{3.5}$$

будем обозначать неотрицательное ядро Фейера. Напомним, что $\|F_\nu\|_1 = 1$. Через

$$\hat{F}_\nu(x) = \sum_{j=-\nu}^{0} \left(1 - \frac{|j|}{\nu+1}\right) e^{ijx} \tag{3.6}$$

обозначим укороченное ядро Фейера. Так как

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\hat{F}_\nu(x)|\,dx \geqslant \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)e^{-ix}\hat{F}_\nu(x)\,dx\right| =$$

$$= \sum_{j=0}^{\nu}\left(1 - \frac{j}{\nu+1}\right)\frac{1}{(j+1)} = \frac{\nu+2}{\nu+1}\sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{j+1} - 1$$

и в случае $\ln(\nu+2) \geqslant 2$ имеем

$$\frac{\nu+2}{\nu+1}\sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{j+1} - 1 \geqslant \frac{\nu+2}{\nu+1}\int_1^{\nu+2}\frac{dt}{t} - 1 = \frac{(\nu+2)\ln(\nu+2)}{\nu+1} - 1 > \frac{(\nu+2)\ln(\nu+2)}{2(\nu+1)},$$

а в случае $\ln(\nu+2) < 2$ замечаем, что

$$\sum_{j=0}^{\nu}\left(1 - \frac{j}{\nu+1}\right)\frac{1}{j+1} \geqslant 1 > \frac{\ln(\nu+2)}{2},$$

то

$$\int_0^{2\pi} |\hat{F}_\nu(x)|\,dx > \ln(\nu+2) \quad \text{при всех} \quad \nu \geqslant 0. \tag{3.7}$$

Эта оценка потребуется нам далее.

4. Основные элементы построения примеров

Основные идеи этой статьи содержатся в следующей теореме.

Теорема 4.1. *Существуют абсолютные положительные постоянные C_1, $C_2 \geqslant C_1$ и C_3, для которых справедливы следующие два утверждения.*

1. *Для любых натуральных чисел n, m и K, таких что $n \geqslant 3m-1$ и $K \geqslant 16$, и любого целого неотрицательного ν можно построить последовательность*

действительных чисел $\{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, *такую что*

$$b_k = 0 \quad \text{при всех} \quad k \leqslant 0 \quad \text{и} \quad k \geqslant (2K\nu + 1)n, \tag{4.1}$$

$$|b_k| \leqslant \left(\frac{m}{n}\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad |\Delta b_k| \leqslant \frac{2}{\sqrt{nm}} \quad \text{при всех целых} \quad k \tag{4.2}$$

и тригонометрические полиномы

$$T(n,m,\nu,K;x) = \sum_{k=0}^{(2K\nu+1)n} b_k e^{ikx} \quad \text{и} \quad \hat{T}(n,m,\nu,K;x) = \sum_{k=0}^{(K\nu+1)n} b_k e^{ikx} \tag{4.3}$$

удовлетворяют оценкам

$$C_1 \leqslant \|T(n,m,\nu,K)\|_1 \leqslant C_2 \quad \text{и} \quad \|\hat{T}(n,m,\nu,K)\|_1 \geqslant C_3 \ln(\nu+2). \tag{4.4}$$

2. *В частности, для любых натурального числа* $n \geqslant 9$ *и целого неотрицательного* ν *можно построить последовательность действительных чисел* $\{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, *такую что*

$$b_k = 0 \quad \text{при всех} \quad k \leqslant 0 \quad \text{и} \quad k \geqslant (32\nu + 1)n, \tag{4.5}$$

$$|b_k| \leqslant \frac{1}{\ln n} \quad \text{и} \quad |\Delta b_k| < 3\frac{\ln n}{n} \quad \text{при всех целых} \quad k \tag{4.6}$$

и тригонометрические полиномы

$$U(n,\nu;x) = \sum_{k=0}^{(32\nu+1)n} b_k e^{ikx} \quad \text{и} \quad \hat{U}(n,\nu;x) = \sum_{k=0}^{(16\nu+1)n} b_k e^{ikx} \tag{4.7}$$

удовлетворяют оценкам

$$C_1 \leqslant \|U(n,\nu)\|_1 \leqslant C_2 \quad \text{и} \quad \|\hat{U}(n,\nu)\|_1 \geqslant C_3 \ln(\nu+2). \tag{4.8}$$

Доказательство. В [5, доказательство теоремы 2] для любых натуральных чисел n, m, где $n \geqslant 3m - 1$, построена последовательность действительных чисел $\{d_k(n,m)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, такая что

$$d_k(n,m) = 0 \quad \text{при всех} \quad k < (2m-1)\left(\left[\frac{n}{2m-1}\right] + 1\right) \quad \text{и} \tag{4.9}$$

$$k > (2m-1)\left[\frac{2n}{2m-1}\right] - 1, \tag{4.10}$$

$$|d_k(n,m)| \leqslant \left(\frac{m}{n}\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad |\Delta d_k(n,m)| \leqslant \frac{2}{\sqrt{nm}} \quad \text{при всех целых} \quad k \tag{4.11}$$

и тригонометрический полином

$$T(n,m;x) = \sum_{k=n+1}^{2n-1} d_k(n,m) e^{ikx}$$

таков, что
$$C_4 \leqslant \|T(n,m)\|_1 \leqslant C_5, \tag{4.12}$$
где $C_4 \leqslant C_5$ — абсолютные положительные, т. е. не зависящие от n и m, постоянные. Более того,
$$|d_{j(2m-1)+s}(n,m)| = \min(s+1, 2m-1-s)(nm)^{-1/2}$$
при $s = 0, \ldots, 2m-2$, $j = [n/(2m-1)]+1, \ldots, [2n/(2m-1)]-1$.

Будем использовать обозначения (3.5) и (3.6). При натуральных n, m, где $n \geqslant 3m-1$, положим
$$T(n,m,\nu,K;x) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} d_{s+n}(n,m)e^{isx}F_\nu(Knx)e^{iKn\nu x} = \\ = T(n,m;x)F_\nu(Knx)e^{i(-1+K\nu)nx},$$
т. е.
$$b_k = \sum_{j=-\nu}^{\nu} d_{k+n-(j+\nu)Kn}(n,m)\left(1 - \frac{|j|}{\nu+1}\right) \tag{4.13}$$
при всех целых k. Отсюда и из (4.9) сразу вытекает (4.1) и то, что под суммой в (4.13) может быть не более одного ненулевого слагаемого. Другим образом (4.13) можно записать в виде
$$b_{s+(j+\nu)Kn} = d_{s+n}(n,m)\left(1 - \frac{|j|}{\nu+1}\right)$$
при всех целых $s = 1, \ldots, n-1$, $j = -\nu, \ldots, \nu$, а остальные b_k равны нулю. Поэтому из (4.11) вытекает (4.2) и
$$\hat{T}(n,m,\nu,K;x) = T(n,m;x)\hat{F}_\nu(Knx)e^{i(-1+K\nu)nx}.$$
По теореме 3.1, где $N = Kn$, из (3.3), (3.7), (4.12) и (4.13) выводим оценки
$$\|T(n,m,\nu,K)\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |T(n,m;x)e^{-inx}|F_\nu(Knx)\,dx \leqslant \\ \leqslant 2\|F_\nu\|_1\|T(n,m)\|_1 = 2\|T(n,m)\|_1 \leqslant 2C_5 = C_2,$$
$$\|T(n,m,\nu,K)\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |T(n,m;x)e^{-inx}|F_\nu(Knx)\,dx \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{3}\|F_\nu\|_1\|T(n,m)\|_1 = \frac{1}{3}\|T(n,m)\|_1 \geqslant \frac{1}{3}C_4 = C_1,$$
$$\|\hat{T}(n,m,\nu,K)\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |T(n,m;x)e^{-inx}|\,|\hat{F}_\nu(Knx)|\,dx \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{3}\|\hat{F}_\nu\|_1\|T(n,m)\|_1 \geqslant \frac{\ln(\nu+2)}{6\pi}\|T(n,m)\|_1 \geqslant \frac{C_4}{6\pi}\ln(\nu+2) = C_3\ln(\nu+2).$$
Этим доказано (4.4), а значит и первая часть теоремы 4.1.

Функция $x/\ln x$ возрастает при $x \geqslant e$. Поэтому функция $x/\ln^2 x = \left(\sqrt{x}/(2\ln\sqrt{x})\right)^2$ возрастает при $x \geqslant e^2$. В частности, если $n \geqslant 9$, то $n \geqslant \ln^2 n$, и, полагая $m(n) = [n/\ln^2 n]$, имеем $3m(n) - 1 < 3n/\ln^2 n \leqslant n$. Положим $m = m(n)$, $K = 16$ и $U(n,\nu;x) = T(n,m(n),\nu,16;x)$. Тогда полиномы (4.3) превращаются в полиномы (4.7), и из (4.1), (4.2) и (4.4) получаем (4.5), (4.6) и (4.8), поскольку

$$\frac{m(n)}{n} \leqslant \frac{1}{\ln^2 n} \quad \text{и} \quad \frac{2}{\sqrt{nm}} \leqslant \frac{2\sqrt{2}\ln n}{n} < \frac{3\ln n}{n}.$$

Теорема 4.1 полностью доказана. □

5. Доказательство теоремы 2.1

В этом разделе, используя тригонометрические полиномы (4.7), мы построим тригонометрические ряды Фурье (2.1) и (2.2), которые удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Напомним, что для рядов (2.1) и (2.2) мы пользуемся обозначениями (2.3).

Доказательство теоремы 2.1. Возьмём произвольную строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, что $\nu_1 > 3$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln \nu_k}} < +\infty. \tag{5.1}$$

Пусть $K = 16$. Найдём такое натуральное P, что

$$P \geqslant \frac{3K\lambda}{\lambda - 1}. \tag{5.2}$$

Выберем произвольную последовательность натуральных чисел $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, что

$$w_k \geqslant \lambda (P\nu_k)^2 \quad \text{при всех} \quad k \geqslant 1, \tag{5.3}$$

$$w_k \geqslant \lambda w_{k-1} \quad \text{при всех} \quad k \geqslant 2 \tag{5.4}$$

и

$$\frac{w_k}{\ln w_k} m(\varphi; w_k) \geqslant 3P\nu_k \quad \text{при всех} \quad k \geqslant 1. \tag{5.5}$$

Это возможно в силу (2.5). Пусть

$$n_k = \left[\frac{w_k}{P\nu_k}\right] + 1 \quad \text{при всех} \quad k \geqslant 1 \tag{5.6}$$

и

$$N_k = n_k + 2\nu_k K n_k \quad \text{при всех} \quad k \geqslant 1. \tag{5.7}$$

Формулы (5.6) и (5.7) определяют последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, свойства которых теперь изучим.

Из (5.2) следует, что $P > 3K = 48$. Поэтому из (5.3) и (5.6) выводим, что при всех натуральных k верны оценки $n_k \geqslant [\lambda P\nu_k] + 1 \geqslant 49$,

$$P\nu_k n_k > w_k \tag{5.8}$$

и

$$\frac{w_k}{P\nu_k} \geqslant \lambda P\nu_k \geqslant 3\lambda P > \frac{9K\lambda}{\lambda - 1}.$$

Отсюда и из (5.2), (5.6) и (5.7) при всех натуральных k получаем, что

$$\begin{aligned} P\nu_k n_k + N_k &< n_k\nu_k(P + 2K + 1) \leqslant \frac{(P + 2K + 1)}{P}(w_k + P\nu_k) < \\ &< \left(1 + (2K+1)\frac{(\lambda - 1)}{3K\lambda}\right) w_k \left(1 + \frac{\lambda - 1}{9K\lambda}\right) < \\ &< w_k \left(1 + \frac{(\lambda - 1)}{9K\lambda}(3(2K+1) + 2)\right) < \lambda w_k. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Из (5.4) и (5.9) получаем, что

$$P\nu_k n_k + N_k < w_{k+1} \quad \text{при всех} \quad k \geqslant 1. \tag{5.10}$$

Положим $a_0 = 0$, и пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx} \tag{5.11}$$

получается (см. (4.7)) формальным раскрытием скобок в ряде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln \nu_k}} U(n_k, \nu_k; x) e^{iP\nu_k n_k x}, \tag{5.12}$$

т. е. последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяется путём формального приравнивания рядов (5.11) и (5.12). В силу (4.7), (5.7), (5.8) и (5.10) член с индексом k в ряде (5.12) является суммой слагаемых ряда (5.11) с номерами $n = P\nu_k n_k, \ldots, P\nu_k n_k + N_k$, а значит и с номерами $n = w_k + 1, \ldots, w_{k+1} - 1$. Поэтому при всех натуральных k $a_{w_k} = 0$ и

$$\sum_{n=w_k}^{w_{k+1}} a_n e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{\ln \nu_k}} U(n_k, \nu_k; x) e^{iP\nu_k n_k x}. \tag{5.13}$$

Из тождества (5.13) и (4.5)—(4.8) сразу получаем, что $a_n = 0$ при $n = w_k, \ldots, P\nu_k n_k$ и $n = P\nu_k n_k + N_k, \ldots, w_{k+1}$;

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\ln n_k \sqrt{\ln \nu_k}} \tag{5.14}$$

и

$$|\Delta a_n| < 3\frac{\ln n_k}{n_k \sqrt{\ln \nu_k}} \tag{5.15}$$

при всех целых $n = w_k, \dots, w_{k+1} - 1$;

$$\Bigl\| \sum_{n=w_k+1}^{w_{k+1}} a_n e^{inx} \Bigr\|_1 \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{\ln \nu_k}}; \tag{5.16}$$

$$\Bigl\| \sum_{n=w_k}^{P\nu_k n_k + n_k + \nu_k K n_k} a_n e^{inx} \Bigr\|_1 \geqslant \frac{C_3 \ln(\nu_k + 2)}{\sqrt{\ln \nu_k}}. \tag{5.17}$$

В силу (5.1) и (5.16) ряд (5.11), а значит и ряд (2.1) и ряд (2.2), являются рядами Фурье интегрируемых по Лебегу функций. Так как в силу (5.8) и (5.3) $(P\nu_k n_k)^2 > w_k^2 \geqslant w_k \lambda (P\nu_k)^2$, то

$$n_k^2 > \lambda w_k. \tag{5.18}$$

Из (5.14), (5.18) и из (5.9) при $n = w_k, \dots, P\nu_k n_k + N_k$ получаем, что

$$|a_n| \ln n \leqslant \frac{2 \ln n}{\ln(n_k^2) \sqrt{\ln \nu_k}} < \frac{2 \ln(\lambda w_k)}{\ln(\lambda w_k) \sqrt{\ln \nu_k}}.$$

Поэтому с учётом нулевых коэффициентов a_n имеем, что

$$|a_n| \ln n < \frac{2}{\sqrt{\ln \nu_k}} \quad \text{при всех} \quad n = w_k, \dots, w_{k+1}.$$

Отсюда и из (5.1) получаем (2.6).

Теперь докажем, что

$$|\Delta a_n| \leqslant \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\ln \nu_k}} \quad \text{при всех} \quad n = w_k, \dots, w_{k+1} - 1. \tag{5.19}$$

Действительно, учитывая нулевые коэффициенты a_n, достаточно доказать (5.19) при $n = w_k, \dots, P\nu_k n_k + N_k - 1$. Поскольку функция $\ln x / x$ убывает при $x \geqslant 3$, то из (5.15), (5.8) и (5.5) получаем, что

$$|\Delta a_n| < 3 \frac{\ln(w_k / P\nu_k)}{(w_k / P\nu_k) \sqrt{\ln \nu_k}} \leqslant \frac{3 P\nu_k \ln w_k}{w_k \sqrt{\ln \nu_k}} \leqslant \frac{m(\varphi; w_k)}{\sqrt{\ln \nu_k}}.$$

Отсюда и из (2.4) и (5.9) получаем (5.19), а значит, в силу (5.1), и (2.7), и (2.8). Наконец, из (5.17) и (5.9) выводим, что

$$\max_{\tau = w_k+1, \dots, [\lambda w_k]} \Bigl\| \sum_{n=w_k+1}^{\tau} a_n e^{inx} \Bigr\| \to \infty$$

при $k \to \infty$. Поэтому (см. [6]) последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является LB-последовательностью и верно (2.9)—(2.11). Теорема 2.1 полностью доказана. $\square$

6. Основные полиномы построения примеров

Вариантом теоремы 4.1 является следующая теорема.

Теорема 6.1. *Существуют абсолютные положительные постоянные C_1, $C_2 \geqslant C_1$ и C_3, для которых справедливо следующее утверждение. Для любых натурального числа $n \geqslant 2$ и целого неотрицательного ν можно построить последовательность действительных чисел $\{h_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, такую что*

$$h_k = 0 \quad \text{при всех} \quad k \leqslant 0 \quad \text{и} \quad k > (32\nu+1)n, \tag{6.1}$$

$$|h_k| \leqslant \frac{1}{\ln n} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{32\nu n+n} |\Delta h_k| = \frac{2(1+\nu)}{\ln n} \quad \text{при всех целых} \quad k \tag{6.2}$$

и тригонометрические полиномы

$$V(n,\nu;x) = \sum_{k=1}^{(32\nu+1)n} h_k e^{ikx} \quad \text{и} \quad \hat{V}(n,\nu;x) = \sum_{k=1}^{(16\nu+1)n} h_k e^{ikx} \tag{6.3}$$

удовлетворяют оценкам

$$C_1 \leqslant \|V(n,\nu)\|_1 \leqslant C_2 \quad \text{и} \quad \|\hat{V}(n,\nu)\|_1 \geqslant C_3 \ln(\nu+2). \tag{6.4}$$

Доказательство. Положим

$$W(n;x) = \frac{1}{\ln n} \sum_{s=1}^{n} e^{isx}. \tag{6.5}$$

Тогда (см. [1])

$$C_4 \leqslant \|W(n)\|_1 \leqslant C_5. \tag{6.6}$$

Пусть $K = 16$ и

$$V(n,\nu;x) = W(n;x) F_\nu(Knx) e^{iK\nu nx} =$$
$$= \sum_{j=-\nu}^{\nu} \frac{1}{\ln n} \sum_{s=1}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{\nu+1}\right) e^{i(Kn(j+\nu)+s)x} = \sum_{k=1}^{(32\nu+1)n} h_k e^{ikx},$$

т. е. верно (6.1) и

$$h_k = \frac{1}{\ln n}\left(1 - \frac{|j|}{\nu+1}\right)$$

при всех целых $k = Kn(j+\nu)+1, \ldots, Kn(j+\nu)+n$ и $j = -\nu, \ldots, \nu$, а при остальных целых k коэффициент h_k равен 0. Поэтому

$$|\Delta h_k| = \frac{1}{\ln n}\left(1 - \frac{|j|}{\nu+1}\right) \quad \text{при} \quad k = Kn(j+\nu) \quad \text{и} \quad k = Kn(j+\nu)+n$$

и всех целых $j = -\nu, \ldots, \nu$, а при остальных целых k разность Δh_k равна 0. Отсюда сразу получаем, что

$$\sum_{k=0}^{32\nu n+n} |\Delta h_k| = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \frac{2}{\ln n}\left(1 - \frac{|j|}{\nu+1}\right) = \frac{2(1+\nu)}{\ln n},$$

т. е. верно (6.2). Заметим, что

$$\hat{V}(n,\nu;x) = W(n;x)\hat{F}_\nu(Knx)e^{iK\nu nx}.$$

По теореме 3.1, где $N = Kn$, из (3.3), (3.7), (6.5) и (6.6) выводим, что

$$\begin{aligned}
\|V(n,\nu)\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |W(n;x)|F_\nu(Knx)\,dx \leqslant \\
&\leqslant 2\|F_\nu\|_1\|W(n)\|_1 = 2\|W(n)\|_1 \leqslant 2C_5 = C_2, \\
\|V(n,\nu)\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |W(n;x)|F_\nu(Knx)\,dx \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{3}\|F_\nu\|_1\|W(n)\|_1 = \frac{1}{3}\|W(n)\|_1 \geqslant \frac{1}{3}C_4 = C_1, \\
\|\hat{V}(n,\nu)\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |W(n;x)|\,|\hat{F}_\nu(Knx)|\,dx \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{3}\|\hat{F}_\nu\|_1\|W(n)\|_1 \geqslant \frac{\ln(\nu+2)}{6\pi}\|W(n)\|_1 \geqslant \frac{C_4}{6\pi}\ln(\nu+2) = C_3\ln(\nu+2),
\end{aligned}$$

т. е. верно (6.4). Теорема 6.1 полностью доказана. □

7. Доказательство теоремы 2.2

В этом разделе мы применим теорему 6.1 к построению тригонометрических рядов Фурье (2.1) и (2.2), которые удовлетворяют условиям теоремы 2.2 и показывают неулучшаемость теоремы E.

Доказательство теоремы 2.2. Пусть далее логарифм берётся по основанию 2. Возьмём произвольную неубывающую последовательность натуральных чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, что $\nu_1 \geqslant 4$, все ν_k являются степенями двойки и выполнено условие (5.1). Возьмём также натуральное число P, являющееся степенью двойки, такое что $P \geqslant 40$. Выберем теперь произвольную последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ так, что $n_0 = 1$ и при всех натуральных k выполнены следующие свойства: число n_k является степенью двойки,

$$n_k \geqslant 2n_{k-1} \quad \text{и} \quad n_k \geqslant 2P\nu_k, \tag{7.1}$$

$$\Phi(\log(P\nu_k n_k)) \geqslant 8(1+\nu_k). \tag{7.2}$$

При всех натуральных k для краткости обозначим $N_k = P\nu_k n_k$. Тогда N_k является степенью двойки, и из (7.1) получаем

$$N_k + (32\nu_k+1)n_k \leqslant P\nu_k n_k + 33\nu_k n_k < 2P\nu_k n_k \leqslant P\nu_{k+1}n_{k+1} = N_{k+1}. \tag{7.3}$$

Положим $a_0 = 0$, и пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx} \tag{7.4}$$

получается (см. (6.3)) формальным раскрытием скобок в ряде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln \nu_k}} V(n_k, \nu_k; x) e^{iP\nu_k n_k x}, \tag{7.5}$$

т. е. последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяется из формального приравнивания рядов (7.4) и (7.5). По (6.3) и (7.3) член с индексом k в ряде (7.5) является суммой слагаемых ряда (7.4) с номерами $n = P\nu_k n_k + 1, \ldots, P\nu_k n_k + (32\nu_k + 1)n_k$, а значит и с номерами $n = N_k + 1, \ldots, N_{k+1}$. Поэтому при всех натуральных k числа a_{N_k} равны 0 и

$$\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}} a_n e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{\ln \nu_k}} V(n_k, \nu_k; x) e^{iP\nu_k n_k x}. \tag{7.6}$$

Из тождества (7.6) и (7.3), (6.2), (6.3) сразу получаем, что $a_n = 0$ при $n = 2P\nu_k n_k, \ldots, P\nu_{k+1} n_{k+1}$,

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\ln n_k \sqrt{\ln \nu_k}} \quad \text{при всех} \quad n = N_k, \ldots, N_{k+1} \tag{7.7}$$

и

$$\sum_{n=P\nu_k n_k}^{2P\nu_k n_k} |\Delta a_n| \leqslant 2 \frac{(1 + \nu_k)}{\ln n_k \sqrt{\ln \nu_k}}, \tag{7.8}$$

$$\left\| \sum_{n=P\nu_k n_k}^{2P\nu_k n_k} a_n e^{inx} \right\|_1 \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{\ln \nu_k}}, \tag{7.9}$$

$$\left\| \sum_{n=P\nu_k n_k}^{P\nu_k n_k + n_k + 16\nu_k n_k} a_n e^{inx} \right\|_1 \geqslant \frac{C_3 \ln(\nu_k + 2)}{\sqrt{\ln \nu_k}}. \tag{7.10}$$

По (5.1) и (7.9) ряд (7.4), а значит и ряд (2.1) и ряд (2.2), являются рядами Фурье интегрируемых по Лебегу функций. Так как в силу (7.1)

$$2N_k = 2P\nu_k n_k \leqslant n_k^2, \tag{7.11}$$

то из (7.7) при $n = P\nu_k n_k, \ldots, 2P\nu_k n_k$ получаем

$$|a_n| \ln n \leqslant \frac{\ln(2P\nu_k n_k)}{\ln(n_k)\sqrt{\ln \nu_k}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\ln \nu_k}}.$$

Поэтому с учётом нулевых коэффициентов a_n имеем

$$|a_n| \ln n \leqslant \frac{2}{\sqrt{\ln \nu_k}} \quad \text{при всех} \quad n = N_k, \ldots, N_{k+1}.$$

Отсюда и из (5.1) получаем (2.6). Из (7.3) и (7.10) выводим, что

$$\max_{\tau=N_k,\dots,2N_k}\left\|\sum_{n=N_k}^{\tau} a_n e^{inx}\right\| \to \infty \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Поэтому (см. [6]) последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является LB-последовательностью и верно (2.9)—(2.11).

Теперь докажем, что

$$\sum_{n=P\nu_k n_k}^{2P\nu_k n_k} |\Delta a_n| \leqslant \frac{\Phi\bigl(\log(P\nu_k n_k)\bigr)}{\log(P\nu_k n_k)+1} \quad \text{при всех} \quad k\geqslant 1. \tag{7.12}$$

Действительно, из (7.2) следует, что

$$2\frac{(1+\nu_k)}{\ln n_k\sqrt{\ln\nu_k}} \leqslant 2\frac{\Phi\bigl(\log(P\nu_k n_k)\bigr)}{8\ln n_k\sqrt{\ln\nu_k}} < \frac{\Phi\bigl(\log(P\nu_k n_k)\bigr)}{\ln(n_k^2)+1}.$$

Отсюда, из (7.11) и (7.8) сразу получаем (7.12). Учитывая нулевые коэффициенты a_n, замечаем, что (7.12) означает (2.13). Теорема 2.2 полностью доказана. □

8. Доказательство теорем 2.3 и 2.4

В этом разделе мы применим теорему 2.1 к построению тригонометрических рядов Фурье (2.1) и (2.2), которые удовлетворяют условиям теоремы 2.3 или 2.4 и показывают неулучшаемость теорем A и C.

Доказательство теоремы 2.3. Возьмём произвольную строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, что $n_1 \geqslant 2$ и $\Phi(n_k)\geqslant k$ при всех $k\geqslant 1$. При всех натуральных k положим

$$\varphi(j) = \bigl(\Phi(n_k)\bigr)^{1/p} n_k 2^{-n_k} \quad \text{при всех} \quad j = 2^{n_k}+1,\dots,2^{n_k+1}-1.$$

Пусть $\varphi(j)=0$ для всех остальных $j\geqslant 0$. Тогда при $\lambda=3/2$ и обозначении (2.4) имеем

$$\frac{2^{n_k}}{n_k} m(\varphi; 2^{n_k}+1) \geqslant \bigl(\Phi(n_k)\bigr)^{1/p} \tag{8.1}$$

при всех натуральных k. Поскольку $(3/2)(2^n+1)\leqslant 2^{n+1}-1$ при всех $n\geqslant 2$, то выполнено условие (2.5). По теореме 2.1 строим соответствующую последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда по условию (2.7) имеем (2.14). Теорема 2.3 полностью доказана. □

Из теоремы 2.1 следует и теорема 2.4.

Доказательство теоремы 2.4. Возьмём произвольную строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, что $n_1 \geqslant 2$ и $\Phi(n_k)\geqslant k$ при всех $k\geqslant 1$. При каждом натуральном k найдём число γ_k, такое что $\gamma_k\bigl(\ln^{+}(\theta\gamma_k)\bigr)^p = \Phi(n_k)$, и положим

$$\varphi(j) = \gamma_k n_k 2^{-n_k} \quad \text{при всех} \quad j = 2^{n_k}+1,\dots,2^{n_k+1}-1,$$

а при остальных $j \geqslant 0$ пусть $\varphi(j) = 0$. Тогда при $\lambda = 3/2$ и всех натуральных k верно (8.1). Поэтому выполнено условие (2.5). По теореме 2.1 строим соответствующую последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда из условия (2.7) получаем (2.15). Теорема 2.4 полностью доказана. $\square$

Литература

[1] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.

[2] Белов А. С. Об условиях сходимости в среднем тригонометрических рядов Фурье // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 1998. — Т. 4, № 1. — С. 40—46.

[3] Белов А. С. Об условиях сходимости (ограниченности) в среднем частных сумм тригонометрического ряда // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: Сб. статей. — М.: АФЦ, 1999. — С. 1—17.

[4] Белов А. С. О коэффициентных условиях сходимости тригонометрического ряда в среднем // Теория функций, её приложения и смежные вопросы. Материалы 5-й Казанской международной школы-конференции (27 июня — 4 июля 2001 г.). — Казань: Изд-во ДАС, 2001. — (Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского; Т. 8). — С. 36—38.

[5] Белов А. С. Об одном условии сходимости в среднем тригонометрических рядов // Матем. заметки. — 2001. — Т. 69, № 3. — С. 323—328.

[6] Белов А. С. Замечания о сходимости (ограниченности) в среднем частных сумм тригонометрического ряда // Матем. заметки. — 2002. — Т. 71, № 6. — С. 807—817.

[7] Белов А. С. О новых условиях сходимости в среднем тригонометрических рядов // Тр. междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, база отдыха Ростовского госунив. «Лиманчик», 5—11 сент. 2002 г. Тезисы докладов. — Ростов-на-Дону, 2002. — С. 103—105.

[8] Белов А. С. Об условиях сходимости (ограниченности) в среднем частных сумм тригонометрического ряда // Вестн. Иванов. госунив. Сер. Биология. Химия. Физика. Математика. — 2004. — Вып. 3. — С. 110—117.

[9] Белов А. С. Неулучшаемость некоторых теорем о сходимости в среднем тригонометрических рядов Фурье // Материалы 9-й междунар. Казанской летней науч. школы-конференции «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, 1—7 июля 2009 г.). — Казань: Казан. матем. общ-во, 2009. — (Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского; Т. 38). — С. 40—43.

[10] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1965.

[11] Теляковский С. А., Фомин Г. А. О сходимости в метрике L рядов Фурье с квазимонотонными коэффициентами // Тр. МИАН СССР. — 1975. — Т. 134. — С. 310—313.

[12] Фомин Г. А. О сходимости рядов Фурье в среднем // Матем. сб. — 1979. — Т. 110, № 2. — С. 251—265.

[13] Fridli S. On the L^1-convergence of Fourier series // Stud. Math. — 1997. — Vol. 125, no. 2. — P. 161—174.

[14] Garret J. W., Rees C. S., Stanojević Č. V. On L^1-convergence of Fourier series with quasi-monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. — 1978. — Vol. 72, no. 3. — P. 535—538.