Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах

Г. Г. БРАЙЧЕВ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: braichev@mail.ru

В. Б. ШЕРСТЮКОВ
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва
e-mail: shervb73@gmail.com

УДК 517.547.22

Ключевые слова: тип и нижний тип, индикатор и нижний индикатор целой функции, верхняя, нижняя плотности и усреднённые плотности, шаг и индекс лакунарности последовательности нулей, экстремальные задачи.

Аннотация

В работе дан обзор новейших исследований, посвящённых двусторонним оценкам классических характеристик роста целых функций, таких, как тип и нижний тип, в терминах обычных или усреднённых плотностей распределения нулей. Приведены также точные оценки величины типа целой функции, учитывающие дополнительно шаг и индекс лакунарности последовательности её нулей. Обсуждаемые результаты опираются на решения экстремальных задач в классах целых функций с ограничениями на поведение нулевого множества. Особое внимание уделяется следующим важным случаям расположения нулей: на одном луче, на прямой, на нескольких лучах, в угле или произвольно в комплексной плоскости.

Abstract

G. G. Braichev, V. B. Sherstyukov, Sharp bounds for asymptotic characteristics of growth of entire functions with zeros on given sets, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 1, pp. 51—97.

The paper provides an overview of the latest research on the two-sided estimates of classical characteristics of growth of entire functions such as the type and the lower type in terms of the ordinary or average densities of the distribution of zeros. We give also the accurate estimates of the type of an entire function, taking into account additionally the step and the lacunarity index of the sequence of zeros. The results under consideration are based on the solution of extremal problems in classes of entire functions with restrictions on the behavior of the zero set. Particular attention is paid to the following important cases of the location of zeros: on a ray, on a straight line, on a number of rays, in the angle, or arbitrarily in the complex plane.

Фундаментальная и прикладная математика, 2018, том 22, № 1, с. 51—97.

1. Основные определения и предварительные сведения

Во многих разделах комплексного анализа заметное место отводится изучению зависимости между асимптотическим поведением функции и распределением её нулей. В рамках теории целых функций вполне регулярного роста такая зависимость была хорошо изучена уже к середине прошлого века (см. [30, 41, 70, 72, 73]) и нашла многочисленные приложения (см., например, [7, 36, 43, 55]). Дальнейшее развитие этой классической теории отражено, например, в [35, 65]. В наше время интенсивное изучение целых функций, не обладающих регулярностью роста, вызвано новыми запросами теории интерполяции, аппроксимации и аналитического продолжения в комплексной области, задачами спектральной теории операторов и теории вероятностей.

Настоящая работа содержит результаты последних лет, дающие точное описание роста целых функций конечного порядка, нули которых расположены на фиксированном множестве и имеют заданные плотностные характеристики. Эти результаты формулируются в терминах экстремальных задач в соответствующих классах целых функций. Важную роль в становлении и развитии тематики сыграли работы Ж. Валирона [77], Б. Я. Левина (см., например, [41, гл. V, § 5, теорема 12]), Р. М. Редхеффера [74], цикл статей А. А. Гольдберга [25—28], более поздние исследования Н. В. Говорова [24], А. А. Кондратюка [32—34], М. И. Андрашко [6], Б. Н. Хабибуллина [56, 59].

Приведём необходимые определения и договоримся об обозначениях.

Традиционными характеристиками глобального роста целой функции $f(z)$ являются её *тип* и *нижний тип* при порядке $\rho > 0$, определяемые соответственно формулами

$$\sigma_\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{r^\rho}, \quad \underline{\sigma}_\rho(f) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln \max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{r^\rho}.$$

Коротко (отмечая зависимость от ρ) эти величины называют ρ-типом и нижним ρ-типом. При этом говорят, что $f(z)$ имеет *совершенно регулярный рост модуля*, если существует предел

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln \max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{r^\rho} = \sigma_\rho(f) = \underline{\sigma}_\rho(f).$$

Рост целой функции $f(z)$ на лучах $\arg z = \theta$ характеризуют её *индикатор* и *нижний индикатор* при порядке $\rho > 0$, которые задаются соответственно формулами

$$h_\rho(f,\theta) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho}, \quad \underline{h}_\rho(f,\theta) = \sup_{E_0} \varliminf_{r\to+\infty,\ r\notin E_0} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho}, \quad \theta\in[-\pi,\pi].$$

Супремум во второй формуле берётся по всем множествам нулевой относительной меры (подробнее см. [3, 41]). Отметим, что из ограниченности сверху индикатора $h_\rho(f,\theta)$ не следует, что величина $\sigma_\rho(f)$ конечна [45, § II.4], но для целой функции конечного ρ-типа справедливо соотношение [41, гл. I, § 18, теорема 29]

$$\max_{\theta\in[-\pi,\pi]} h_\rho(f,\theta) = \sigma_\rho(f). \tag{1}$$

Если при всех $\theta \in [-\pi,\pi]$ выполняется равенство $h_\rho(f,\theta) = \underline{h}_{\,\rho}(f,\theta)$, то $f(z)$ называют функцией *вполне регулярного роста* (при порядке $\rho > 0$). Аналогичным образом определяется вполне регулярный рост целой функции на луче или в угле.

Классическими «измерителями» роста бесконечно большой последовательности комплексных чисел являются её плотности. Введём соответствующие понятия в привязке к целым функциям. Пусть $\Lambda = \Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность нулей целой функции $f(z)$, расположенная в порядке неубывания модулей,

$$n_\Lambda(t) = \sum_{|\lambda_n|\leqslant t} 1 \,-$$

считающая функция этой последовательности,

$$N_\Lambda(r) = \int\limits_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t}\,dt \,-$$

её *усреднённая считающая функция* (без ограничения общности здесь и далее предполагается, что $f(0) = 1$).

Верхняя и *нижняя плотности* Λ при показателе $\rho > 0$ определяются равенствами

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}, \quad \underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}$$

и коротко называются верхней и нижней ρ-плотностями.

Усреднёнными верхней и *нижней ρ-плотностями* последовательности Λ называются соответственно величины

$$\overline{\Delta}_\rho^{\,*}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}, \quad \underline{\Delta}^*_{\,\rho}(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}.$$

Последовательность Λ *измерима* (при показателе ρ), если $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda)$, т. е. существует предел

$$\Delta_\rho(\Lambda) = \lim_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho},$$

называемый *ρ-плотностью* Λ (см., например, [9, раздел 1.3]). Измеримость последовательности Λ равносильна также совпадению

$$\overline{\Delta}_\rho^{\,*}(\Lambda) = \underline{\Delta}^*_{\,\rho}(\Lambda),$$

т. е. существованию предела

$$\Delta_\rho^*(\Lambda) = \lim_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho},$$

который в этом случае называется *усреднённой ρ-плотностью* Λ. При этом $\Delta_\rho(\Lambda) = \rho\,\Delta^*_\rho(\Lambda)$.

Для верхней и нижней ρ-плотностей Λ справедливы формулы

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n_\Lambda(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}, \quad \underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n_\Lambda(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho},$$

по аналогии с которыми вводятся *дискретные усреднённые верхняя и нижняя ρ-плотности* последовательности Λ:

$$\widetilde{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{N_\Lambda(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}, \quad \underset{\sim}{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{N_\Lambda(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}.$$

Дискретная усреднённая верхняя ρ-плотность, вообще говоря, не совпадает с усреднённой верхней ρ-плотностью Λ, но всегда выполняется равенство [14, теорема 1]

$$\underline{\Delta}^*_{\,\rho}(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{N_\Lambda(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho} = \underset{\sim}{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda). \tag{2}$$

Последовательность Λ называем *дискретно измеримой* (при показателе $\rho > 0$), если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_\Lambda(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho} = \widetilde{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underset{\sim}{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda).$$

Отметим ещё, что дискретная измеримость последовательности не влечёт её измеримости.

Наряду с введёнными выше понятиями плотностей последовательности нам понадобятся также следующие характеристики. Назовём *ρ-шагом* последовательности Λ значение

$$h_\rho(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty} \left(|\lambda_{n+1}|^\rho - |\lambda_n|^\rho\right), \tag{3}$$

а *индексом лакунарности* — величину (см. [10])

$$l(\Lambda) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|}. \tag{4}$$

Справедливо неравенство, связывающее ρ-шаг с верхней ρ-плотностью последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ (для $\rho = 1$ и $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ это соотношение отмечено в [44, раздел I.1])

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) h_\rho(\Lambda) \leqslant 1. \tag{5}$$

Взаимосвязи между введёнными характеристиками роста последовательностей подробно описаны в [14]. Например, ввиду оценки $\overline{\Delta}^{\,*}_\rho(\Lambda) \leqslant \widetilde{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda)\, l^\rho(\Lambda)$, доказанной в [14, предложение 1], имеем

$$\overline{\Delta}^{\,*}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{N_\Lambda(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho} = \widetilde{\Delta}_\rho(\Lambda),$$

если индекс лакунарности $l(\Lambda)$ равен 1 (т. е. $|\lambda_{n+1}| \sim |\lambda_n|$ при $n \to \infty$; такие последовательности называются *слабо лакунарными*).

Связи между обычными и усреднёнными плотностями последовательности Λ отражают классические неравенства

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leqslant \rho\,\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \leqslant \rho\,\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \leqslant \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leqslant \rho\,e\,\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \qquad (6)$$

(см. [41, гл. I, § 12; 42, гл. II, § 4, п. 4]).

Из общих результатов о сравнительном росте выпуклых функций, установленных в [11] (см. также [19]), можно извлечь следующие неравенства, уточняющие соотношения (6):

$$\rho\,a_1\,\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \leqslant \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leqslant \rho\,\widetilde{a}_1\,\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda), \quad \rho\,\widetilde{a}_2\,\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \leqslant \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leqslant \rho\,a_2\,\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda). \qquad (7)$$

Здесь a_1 и a_2 — корни уравнения

$$a\ln\frac{e}{a} = \frac{\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)}{\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)},$$

а $\widetilde{a}_1$ и $\widetilde{a}_2$ — корни подобного уравнения с «подправленной» правой частью

$$a\ln\frac{e}{a} = \frac{\widetilde{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)}.$$

Корни этих уравнений связаны неравенствами

$$0 \leqslant a_1 \leqslant \widetilde{a}_1 \leqslant 1 \leqslant \widetilde{a}_2 \leqslant a_2 \leqslant e.$$

Для дискретно измеримых последовательностей в силу условия $\widetilde{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)$ выполняются точные равенства

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \rho\,a_1\,\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda), \quad \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \rho\,a_2\,\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)$$

(см. (2), (7)). Следует отметить, что дискретно измеримые последовательности комплексных чисел часто образуют нулевые множества экстремальных целых функций во многих задачах комплексного анализа. Класс таких последовательностей достаточно широк, поскольку для любых чисел $\rho > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$ можно построить дискретно измеримую последовательность Λ с ρ-плотностями $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$ (см. [21]).

2. Целые функции с произвольным расположением нулей на комплексной плоскости

Напомним некоторые известные результаты.

В классическом мемуаре [77, ч. 2, II, 58—60] Ж. Валирон для любой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ с нулевым множеством $\Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{C}$

установил неравенство, из которого непосредственно вытекает оценка

$$\sigma_\rho(f) \leqslant S(\rho)\,\overline{\Delta}_\rho(\Lambda), \quad \text{где} \quad S(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} r^{-\rho}\, dM_p(r). \tag{8}$$

Здесь функция $M_p(r)$ с индексом $p = [\rho]$, равным целой части ρ, задаётся формулами

$$M_0(r) = \ln(1+r), \qquad p = 0,$$

$$M_p(r) = \max_{|\theta|\leqslant\pi} \left\{ \frac{1}{2}\, \ln(1 - 2r\cos\theta + r^2) + \sum_{k=1}^{p} \frac{r^k\, \cos k\theta}{k} \right\}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Функция $M_p(r)$ была введена и исследована А. Данжуа в [67]. В частности, А. Данжуа показал, что

$$\ln M_p(r) = \int\limits_0^r t^p \frac{\sin p\lambda(t)}{\sin\lambda(t)}\, dt \qquad \text{при} \quad r \leqslant 1 + \frac{1}{p},$$

$$\ln M_p(r) = r + \frac{r^2}{2} + \ldots + \frac{r^p}{p} + \ln(r-1) \quad \text{при} \quad r \geqslant 1 + \frac{1}{p},$$

где $\lambda(t)$ определяется из условий

$$t\bigl(\sin p\lambda(t)\bigr) = \sin\bigl((p+1)\lambda(t)\bigr), \quad 0 < \lambda(t) < \frac{\pi}{p+1}.$$

Как отмечено в [77], оценка (8) справедлива и для уточнённых порядков $\rho(r) \to \rho$, но полный вывод оценки с обоснованием её точности в этом общем случае см. в работе А. А. Гольдберга [25, § 2, п. 4]. В недавней статье [53] (см. также [52]) А. Ю. Попов доказал улучшенную двучленную асимптотическую версию оценки (8) с точным вторым членом.

Изучение величины $S(\rho)$ начато Ж. Валироном [77]. Он показал, в частности, что

$$S(\rho) = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}, \quad \rho \in (0,1).$$

Детальная информация о поведении $S(\rho)$ содержится в [52]. Например, для значений $\rho \in (1,2)$ справедливо разложение в ряд

$$S(\rho) = \rho\, 2^{1-\rho} \left(\frac{1}{2-\rho} + \frac{1}{\rho-1} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k-\rho}}{k+\rho},$$

а при любом нецелом $\rho > 2$ с $p = [\rho]$ и $\{\rho\} = \rho - p$ верна двусторонняя оценка

$$\frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1-\{\rho\}} + 2\ln(p+1) - 2.2 < S(\rho) < \frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1-\{\rho\}} + 2\ln p + \frac{5}{3}.$$

Результат Валирона—Гольдберга получил развитие в работе Ф. С. Мышакова [46], где для произвольного уточнённого порядка $\rho(r) \to \rho \in (0,+\infty) \setminus \mathbb{N}$

установлена оценка (приводим её при $\rho(r) \equiv \rho$)

$$\sigma_\rho(f) \leqslant \rho\, S(\rho)\, \overline{\Delta}_\rho^{\,*}(\Lambda) \tag{9}$$

с той же величиной $S(\rho)$, что и в (8).

Как известно, целые функции целого порядка обладают рядом специфических особенностей и прямой перенос (8), (9) на этот случай невозможен. Однако аналоги указанных оценок справедливы и для $\rho \in \mathbb{N}$ со специально подбираемыми уточнёнными порядками (подробности см. в [27, 47]).

Обратимся теперь к оценкам типа целой функции снизу. В уже упоминавшейся работе Ж. Валирона [77, ч. 2, II, 60] фактически содержится неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{1}{\rho e}\, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda). \tag{10}$$

Более сорока лет спустя Б. Я. Левин в [41, гл. IV, § 1] доказал точность оценки Валирона, построив пример целой функции

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{2^{2^n/\rho}}\right)^{2^{2^n}}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{11}$$

порядка $\rho > 0$, реализующей равенство в (10). В [66, с. 16] Р. Боас приводит оценку типа целой функции $f(z)$, улучшающую (10), когда известна не только верхняя, но и нижняя ρ-плотность последовательности её нулей $\Lambda_f = \Lambda$. Именно,

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \exp\left\{\underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda)/\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)\right\} \frac{1}{\rho e}\, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda). \tag{12}$$

Как и в случае неравенства Валирона (10), считалось, что эта оценка точна, но лишь недавно, через шестьдесят лет после [66], А. Ю. Попов предъявил целую функцию, на которой равенство в (12) достигается (см. [54, теорема 2.1]). Именно, для любых чисел $\rho > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$ им фактически построен пример целой функции порядка ρ с нулями $\Lambda_f = \Lambda$, такой что выполняются равенства

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta, \quad \underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda) = \alpha, \quad \sigma_\rho(f) = \overline{\Delta}_\rho^{\,*}(\Lambda) = \exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\} \frac{\beta}{\rho e}, \quad \underline{\Delta}^*_{\,\rho}(\Lambda) = \frac{\alpha}{\rho}. \tag{13}$$

Оценка снизу ρ-типа целой функции через верхнюю усреднённую ρ-плотность последовательности её нулей вытекает из известной формулы Йенсена (с условием $f(0) = 1$)

$$N_\Lambda(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta, \quad r > 0, \tag{14}$$

и имеет простой вид

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \overline{\Delta}_\rho^{\,*}(\Lambda). \tag{15}$$

Действительно, ввиду (6), (14), (1) справедлива цепочка неравенств

$$\frac{\underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda)}{\rho} \leqslant \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) \leqslant \overline{\Delta}_{\rho}^*(\Lambda) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_\rho(\theta)\,d\theta \leqslant \sigma_\rho(f).$$

Кроме того, теорема 3 из главы IV монографии [41] утверждает, что равенство

$$\frac{\underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda)}{\rho} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_\rho(\theta)\,d\theta$$

выполняется для функций вполне регулярного роста (и только для них). Отсюда следует, что оценка (15) является точной, поскольку достигается на функциях вполне регулярного роста, имеющих постоянный индикатор $h_\rho(f,\theta) \equiv \sigma_\rho(f)$. Примеры таких функций и их применение в различных вопросах можно найти в [41, гл. I, § 20; гл. VI, § 7; 42, гл. I, разделы 3, 4; 29].

Остановимся коротко на случае $\rho = 1$. Рассмотрим класс целых функций экспоненциального типа, индикаторы которых при фиксированном $\sigma > 0$ подчинены оценке

$$h(f,\theta) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\bigl|f(re^{i\theta})\bigr|}{r} \leqslant \sigma|\sin\theta|, \quad \theta\in[-\pi,\pi].$$

Обозначив для последовательности нулей $\Lambda_f = \Lambda$ функции $f(z)$ из этого класса верхние 1-плотности через $\overline{\Delta}(\Lambda)$ и $\overline{\Delta}^*(\Lambda)$, на основании формулы Йенсена (14) получаем точную оценку

$$\overline{\Delta}^*(\Lambda) \leqslant \frac{2}{\pi}\,\sigma$$

с равенством, например, для функций типа Картрайт [41, гл. V]. Отсюда ввиду (6) при $\rho = 1$ вытекает неравенство

$$\overline{\Delta}(\Lambda) \leqslant \frac{2e}{\pi}\,\sigma,$$

которое, однако, в рассматриваемом классе функций уже не является наилучшим возможным. Точный результат установлен в [68].

Теорема 2.1 (А. Э. Ерёменко, П. М. Юдицкий, 2008 г.). *Пусть $\sigma > 0$ и $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатором*

$$h(f,\theta) \leqslant \sigma|\sin\theta|, \quad \theta\in[-\pi,\pi].$$

Тогда верхняя плотность $\overline{\Delta}(\Lambda)$ нулей $\Lambda_f = \Lambda$ функции $f(z)$ удовлетворяет точной достижимой оценке

$$\overline{\Delta}(\Lambda) \leqslant c\,\sigma,$$

где $c \approx 1{,}508879$ — единственный положительный корень уравнения

$$\ln\bigl(\sqrt{c^2+1}+c\bigr) = \sqrt{1+c^{-2}}.$$

Экстремальная функция в теореме 2.1 не обладает полной регулярностью роста при порядке $\rho = 1$. Возвращаясь к общему случаю $\rho > 0$, отметим, что пример бесконечного произведения (11), также не являющегося функцией вполне регулярного роста, доставляет равенство в (15). Последовательность Λ корней этой функции имеет нижние ρ-плотности, равные нулю:

$$\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0.$$

Естественно предполагать, что учёт положительной нижней усреднённой ρ-плотности нулей в общем случае приводит к усилению оценки (15) подобно тому, как это было при переходе от (10) к (12). Попытки доказать такое усиление оказались безуспешными, а позднее выяснилось, что сделать это принципиально невозможно. Покажем сейчас, основываясь на примере А. Ю. Попова из [54], что равенство в (15) может достигаться не только при $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = 0$, но и при любом значении нижней усреднённой ρ-плотности

$$0 < \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \leqslant \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda).$$

Предварительно преобразуем соотношения (13), обозначая $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*$ и $k = \alpha/\beta$. Имеем

$$\beta^* = \exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\}\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\alpha}{\rho e} = \frac{e^{k-1}}{k}\,\alpha^*,$$

или

$$\frac{\alpha^*}{\beta^*} = e^{1-k}k = e^{1-k}\ln\frac{e}{e^{1-k}}. \tag{16}$$

Пусть a_1 и a_2 $(0 \leqslant a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2 \leqslant e)$ — корни уравнения

$$a\ln\frac{e}{a} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}. \tag{17}$$

Поскольку $k = \alpha/\beta \leqslant 1$, то по (16), (17) заключаем, что $e^{1-k} = a_2$. Отсюда находим, что

$$k = \ln\frac{e}{a_2} = \frac{\alpha^*}{a_2\,\beta^*},$$

т. е.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^*}{a_2\,\beta^*}.$$

Теперь по заданным числам ρ, α^* и β^* определим сначала число $\alpha = \rho\alpha^*$, затем найдём корень a_2 уравнения (17) и положим $\beta = \rho a_2\beta^*$. Для этих чисел α и β рассмотрим целую функцию $f(z)$ с последовательностью нулей $\Lambda = \Lambda_f$, обладающую всеми свойствами из (13). Такая функция доставляет равенство в (15), так как её тип согласно (13) вычисляется по формуле

$$\sigma_\rho(f) = \beta^* = \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda).$$

Доказанная точность оценок (8)—(10), (12), (15) позволяет трактовать приведённые выше факты как решение следующих экстремальных задач (ограничимся, например, оценками снизу).

I. Для фиксированных чисел $\rho > 0$, $\beta > 0$ найти

$$S_{\mathbb{C}}(\beta;\rho) := \inf\bigl\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\bigr\}.$$

II. Для фиксированных чисел $\rho > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$ найти

$$S_{\mathbb{C}}(\alpha,\,\beta;\rho) := \inf\bigl\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda) \geqslant \alpha, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\bigr\}.$$

III. Для фиксированных чисел $\rho > 0$, $\beta^* > 0$ вычислить

$$S^*_{\mathbb{C}}(\beta^*;\rho) := \inf\bigl\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \overline{\Delta}^{\,*}_\rho(\Lambda) = \beta^*\bigr\}.$$

IV. Для фиксированных чисел $\rho > 0$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0,\beta^*]$ вычислить

$$S^*_{\mathbb{C}}(\alpha^*,\beta^*;\rho) := \inf\bigl\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}^*_{\,\rho}(\Lambda) \geqslant \alpha^*,\ \overline{\Delta}^{\,*}_\rho(\Lambda) = \beta^*\bigr\}.$$

Удобно дать результат в виде сводной теоремы.

Теорема 2.2. *Для экстремальных задач* I—IV *справедливы следующие равенства*:

$$S_{\mathbb{C}}(\beta;\rho) = \frac{\beta}{\rho e}, \tag{18}$$

$$S_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta;\rho) = e^{\alpha/\beta}\,\frac{\beta}{\rho e}, \tag{19}$$

$$S^*_{\mathbb{C}}(\alpha^*,\beta^*;\rho) = S^*_{\mathbb{C}}(\beta^*;\rho) = \beta^*. \tag{20}$$

Нижние грани во всех случаях достигаются на некоторых последовательностях комплексных чисел, составляющих нулевые множества соответствующих экстремальных целых функций.

Непосредственным выводом из этой теоремы является тот факт, что увеличение минимальной величины типа целой функции возможно лишь при учёте дополнительной информации о распределении её нулей: геометрии расположения, других характеристик роста, таких, как шаг, индекс лакунарности и т. п. Таким задачам посвящены следующие разделы.

3. Целые функции с положительными нулями фиксированных ρ-плотностей и ρ-шага

Для индикатора функции $f(z)$ нецелого порядка ρ, все нули Λ_f которой расположены на одном луче $\arg z = \theta_0$ и имеют ρ-плотность Δ, известна точная формула

$$h_\rho(f,\theta) = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}\,\cos\rho(\theta - \theta_0 - \pi)$$

[41, гл. II, § 2], согласно которой

$$\sigma_\rho(f) = \frac{\pi\Delta}{|\sin\pi\rho|}.$$

При $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) < \overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f)$ нули Λ_f образуют неизмеримую последовательность, а индикатор и тип функции $f(z)$ уже не выражаются точно через эти плотности. В такой ситуации важно располагать точными оценками индикатора и типа целой функции в терминах верхней и нижней плотностей её нулей. Вопрос исследован наиболее полно, когда порядок меньше единицы.

Как отмечалось в предыдущем разделе, для целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ оценки (8), (9) с учётом (6) принимают вид

$$\sigma_\rho(f) \leqslant \frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\,\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \leqslant \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\,\overline{\Delta}_\rho(\Lambda). \tag{21}$$

Равенства здесь заведомо достигаются для целых функций вполне регулярного роста с нулями на луче. Существуют и другие примеры целых функций с положительными нулями, не обладающих полной регулярностью роста, подтверждающие точность оценок (21) (см. теорему 3.3).

Вообще говоря, случай расположения нулей целой функции на одном луче представляет отдельный интерес в связи с приложениями к негармоническому анализу, к проблемам нахождения радиуса полноты систем экспонент, количественным аспектам аналитического продолжения сумм рядов Тейлора и Дирихле за границу области сходимости, к теоремам единственности в весовых классах целых функций и др. Поэтому наряду с оценками сверху для типа, как в (21), важное значение имеют и оценки снизу. Необходимо подчеркнуть, что оценки (21) не могут быть улучшены за счёт учёта нижней ρ-плотности нулей, обычной или усреднённой (см. теорему 3.4), в то время как ситуация с оценками снизу носит принципиально иной характер. Именно, наименьшая возможная величина типа целой функции существенно зависит от нижних плотностных характеристик последовательности её нулей. Для обоснования сказанного перейдём к постановкам соответствующих экстремальных задач.

I$^+$. Для фиксированных чисел $\rho > 0$, $\beta > 0$ найти

$$S_{\mathbb{R}_+}(\beta;\rho) := \inf\bigl\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\bigr\}.$$

II$^+$. Для фиксированных чисел $\rho > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$ найти

$$S_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\beta;\rho) := \inf\bigl\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\bigr\}.$$

Отметим сразу, что в силу теоремы Линделёфа [41, гл. I, § 11] для $\rho \in \mathbb{N}$ выполнено

$$S_{\mathbb{R}_+}(\beta;\rho) = S_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\beta;\rho) = +\infty,$$

поэтому считаем в дальнейшем порядок ρ нецелым.

К настоящему времени означенные проблемы о наименьшем типе целой функции с нулями на луче решены полностью для значений $\rho \in (0,\,1)$. С этого случая мы и начнём.

Инициатором исследования задач I$^+$, II$^+$ стал А. Ю. Попов, сформулировавший и решивший в [49] важную проблему нахождения наименьшей возможной величины ρ-типа целой функции с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности.

Теорема 3.1 (А. Ю. Попов, 2005 г.). *Пусть $\rho \in (0,1)$. Для любой целой функции $f(z)$ с последовательностью положительных нулей $\Lambda_f = \Lambda$ верхней ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ выполняется неравенство*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \beta C(\rho), \quad \text{где} \ \ C(\rho) = \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^\rho}.$$

Равенство достигается на некоторой возрастающей последовательности положительных чисел. Иными словами,

$$S_{\mathbb{R}_+}(\beta;\rho) = \beta C(\rho). \tag{22}$$

В статье [49] А. Ю. Попов провёл подробное исследование неэлементарной функции $C(\rho)$, продиктованное необходимостью применять её в конкретных случаях, а также для выявления специфики отсутствия разброса аргументов корней в постановке задачи I^+. В частности, были получены следующие результаты:

$$C(\rho) > \frac{1}{\rho e}, \qquad \rho \in (0,1), \tag{23}$$

$$C(\rho) = \frac{1}{\rho e} + e^{-1-1/\rho} + O\left(\frac{1}{\rho}\, e^{-2/\rho}\right), \quad \rho \to 0. \tag{24}$$

Сравнивая экстремальные величины (18) и (22), с помощью оценки (23) убеждаемся, что наименьшая возможная величина ρ-типа целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ в случае, когда нули расположены на луче, увеличилась по сравнению с ситуацией, когда нули произвольно расположены в плоскости. Именно,

$$S_{\mathbb{R}_+}(\beta;\rho) = \beta C(\rho) > \frac{\beta}{\rho e} = S_{\mathbb{C}}(\beta;\rho).$$

Впоследствии выяснилось [20], что любая экстремальная в задаче I^+ последовательность имеет нулевую нижнюю ρ-плотность. Возникает естественный вопрос: насколько может увеличиться наименьшая возможная величина типа функции, если нижняя ρ-плотность её нулей положительна (вспомним переход от (10) к (12))? Ответ на этот вопрос А. Ю. Попова потребовал разработки нового метода и был дан в [20].

Теорема 3.2 (В. Б. Шерстюков, 2009 г.). *Пусть $\rho \in (0,1)$. Для любой целой функции $f(z)$ с последовательностью положительных нулей $\Lambda_f = \Lambda$ верхней ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ и нижней ρ-плотности $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha$ выполняется неравенство*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau.$$

Равенство достигается на некоторой возрастающей последовательности $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$, *для которой* $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$ *и* $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$. *Таким образом,*

$$S_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta; \rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{\tau + 1}\, d\tau. \tag{25}$$

Отметим, что случай $\alpha = 0$ приводит к теореме 3.1, а случай $\alpha = \beta$ даёт классическое равенство

$$\sigma_\rho(f) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho},$$

справедливое для целых функций с измеримой последовательностью положительных нулей.

В [20] установлены также двусторонние оценки и изучено асимптотическое поведение при малых ρ экстремальной величины $S_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta; \rho)$ из формулы (25). Для того чтобы сформулировать эти результаты, положим

$$C(k, \rho) = \frac{\pi k}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{ak^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1}\, d\tau, \quad k = \frac{\alpha}{\beta},$$

и запишем решение задачи II^+ в виде

$$S_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta; \rho) = \beta C(k, \rho), \quad \rho \in (0, 1).$$

Из [20] извлекаем для $k \in [0, 1]$ и $\rho \in (0, 1)$ следующие оценки:

$$C(k, \rho) > \frac{e^{k-1}}{\rho}, \tag{26}$$

$$\frac{\pi k}{\sin \pi\rho} + (1 - k + k \ln k) C(\rho) \leqslant C(k, \rho) \leqslant \frac{\pi k}{\sin \pi\rho} + (1 - k) C(\rho). \tag{27}$$

Эти неравенства для величины $C(k, \rho)$ дают некоторое представление о влиянии аргументов и нерегулярности распределения корней функции на величину её типа. Неравенство (26) указывает на различие наименьших возможных величин типов целой функции с заданными плотностями нулей в случаях их расположения на луче или произвольно в комплексной плоскости (см. теорему 2.1):

$$S_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta; \rho) = \beta C\left(\frac{\alpha}{\beta}, \rho\right) > \beta \frac{e^{\alpha/\beta - 1}}{\rho} = S_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta; \rho).$$

Неравенство же (27) даёт численную иллюстрацию связи между экстремальными задачами I^+ и II^+.

Следующие асимптотические формулы имеют довольно сложный вид и требуют привлечения корней некоторых специальных уравнений. Для каждого $j = 0, 1, 2$ обозначим через k_j единственный на $(0, 1)$ корень уравнения

$$\ln k = \frac{6}{j + 2}\,(k - 1).$$

Компьютерные вычисления дают приближённые значения этих корней:

$$k_0 = 0{,}05952\ldots, \quad k_1 = 0{,}20319\ldots, \quad k_2 = 0{,}41719\ldots.$$

При фиксированном $k \in [0,1]$ и $\rho \to 0$ в [20] доказаны следующие соотношения:

$$C(k,\rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + O\left(\frac{1}{\rho}\, e^{-2(1-k)/\rho}\right), \quad k \in [0, k_0];$$
$$C(k,\rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + O\big(\rho\, k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho}\big), \quad k \in (k_0, k_1];$$
$$C(k,\rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \frac{\rho}{1-\rho}\, k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} + O\big(e^{-(1-k)/\rho}\big), \quad k \in (k_1, k_2];$$
$$C(k,\rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \frac{\rho}{1-\rho}\, k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} + O\big(\rho\, k^{2/\rho} e^{2(1-k)/\rho}\big), \quad k \in (k_2, 1).$$

Эти асимптотические равенства открывают достаточно неожиданный факт качественной зависимости асимптотики при $\rho \to 0$ экстремальной величины $C(k,\rho)$ от $k = \alpha/\beta$, сказывающейся в различии вторых и остаточных членов асимптотики для различных промежутков изменения параметра k.

Из сравнения представленных асимптотических формул с равенствами (18), (19) теоремы 2.1 видно, что при порядке ρ, близком к нулю, величины, описывающие экстремальный тип целых функций с нулевыми и произвольными аргументами корней, экспоненциально мало отличаются. Различие же при $\rho \to 1$ становится значительным. Так, при $k = 0$ экстремальные величины типов, описывающие произвольное расположение нулей на плоскости и на фиксированном луче, асимптотически близки к $1/e$ и 1 соответственно. Поскольку (см. (27))

$$C(k,\rho) \geqslant \frac{\pi k}{\sin \pi\rho},$$

то отмеченное различие ещё заметнее при фиксированном $k \in (0,1]$: в этом случае мы сравниваем постоянную e^{k-1} с величиной $C(k,\rho)$, которая при $\rho \to 1-0$ неограниченно возрастает.

В теории тригонометрических рядов и рядов Дирихле [8, 31, 44], в задаче о порождающих в идеалах целых функций, в вопросах спектрального синтеза и разрешимости уравнений свёртки [38—40], при описании определяющих и достаточных множеств [1, 69] часто используются, хотя и не выделяются явно, понятия, подобные шагу последовательности и её индексу лакунарности. Посмотрим сейчас, как на величину типа целой функции влияет шаг (3) последовательности её нулей. Для этого сформулируем следующие задачи.

III$^+$. Для фиксированных чисел $\rho > 0$, $\beta > 0$, $h \in [0, \beta^{-1}]$ вычислить

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta, h; \rho) := \inf\big\{\sigma_\rho(f) \colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ h_\rho(\Lambda) \geqslant h\big\}.$$

IV$^+$. Для фиксированных чисел $\rho > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$, $h \in [0,\beta^{-1}]$ вычислить

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\beta,h;\rho) := \\ := \inf\bigl\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ h_\rho(\Lambda) \geqslant h\bigr\}.$$

Ограничение на параметр h является естественным, так как вызвано легко проверяемым неравенством $h_\rho(\Lambda)\,\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leqslant 1$ (см. (5)).

Ответ к задаче III$^+$ при $\rho \in (0,1)$ найден в [64]. Приведём этот результат.

Теорема 3.3 (О. В. Шерстюкова, 2015 г.). *Пусть $\rho \in (0,1)$. Для любой целой функции $f(z)$ с последовательностью положительных нулей $\Lambda_f = \Lambda$ верхней ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ и ρ-шага $h_\rho(\Lambda) \geqslant h$ выполняется неравенство*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{1}{h}\sup_{a>0}\left\{a^{-\rho}\ln\frac{1+a}{(1+as^{-1/\rho})^s} + \int\limits_a^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\right\} =$$

$$= \sup_{a>0}\left\{\beta a^{-\rho}\ln(1+a) + \frac{1}{h}\int\limits_a^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - sa^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\right\}, \quad \textit{где}\ \ s = 1-\beta h.$$

Равенство достигается на некоторой возрастающей последовательности $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$, для которой $h_\rho(\Lambda) = h$ и $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$. Таким образом,

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta,h;\rho) = \sup_{a>0}\left\{\beta a^{-\rho}\ln(1+a) + \frac{1}{h}\int\limits_a^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - sa^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\right\}, \quad s = 1-\beta h. \tag{28}$$

Из последней формы записи приведённого ответа легко усматривается неравенство, справедливое при $h > 0$ и говорящее о том, что учёт информации о ρ-шаге последовательности нулей целой функции увеличивает её минимально возможный ρ-тип:

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta,h;\rho) > S_{\mathbb{R}_+}(\beta;\rho) = \beta\max_{a>0}\frac{\ln(1+a)}{a^\rho} = \beta C(\rho).$$

Случай $h = 0$, рассматриваемый как предельный, даёт равенство

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta,0;\rho) = S_{\mathbb{R}_+}(\beta;\rho),$$

которое с очевидностью вытекает и из постановок задач III$^+$, I$^+$. Другой крайний случай, когда $h = \beta^{-1}$, понимаемый снова как предельный, приводит к соотношению

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta,\beta^{-1};\rho) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}.$$

Отсюда ввиду оценки (21), справедливой при $\rho \in (0,1)$, вытекает «чистое» равенство

$$\sigma_\rho(f) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}$$

для любой целой функции $f(z)$, у которой $\Lambda_f \subset \mathbb{R}_+$, $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) = \beta$ и $h_\rho(\Lambda_f) = 1/\beta$. Ранее считалось, что такое равенство возможно лишь для целой функции $f(z)$ с измеримой последовательностью положительных нулей $\Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$, т. е. такой, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \beta.$$

Но, разумеется, условие $h_\rho(\Lambda_f) = 1/\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f)$ не влечёт измеримости последовательности Λ_f (соответствующие примеры можно найти в [50]).

Решение задачи IV^+ было получено О. В. Шерстюковой в недавних работах [60, 63].

Теорема 3.4 (О. В. Шерстюкова, 2015 г.). *Пусть $\rho \in (0,1)$. Для любой целой функции $f(z)$ с последовательностью положительных нулей $\Lambda_f = \Lambda$ верхней ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, нижней ρ-плотности $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha$ и ρ-шага $h_\rho(\Lambda) \geqslant h$ выполняется неравенство*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \sup_{a>0}\left\{\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau + \frac{1}{h}\int\limits_{a}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\right\} =$$

$$= \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \sup_{a>0}\left\{\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau + \frac{s}{h}\int\limits_{a}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\nu\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\right\},$$

где

$$s = 1 - \beta h \in [0,1], \quad \nu = \frac{1-\alpha h}{1-\beta h} \in [1,+\infty].$$

Равенство достигается на некоторой возрастающей последовательности $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$, обладающей ρ-шагом $h_\rho(\Lambda) = h$ и ρ-плотностями $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$, $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$. Таким образом,

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\beta,h;\rho) =$$

$$= \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \sup_{a>0}\left\{\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau + \frac{1}{h}\int\limits_{a}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\right\} =$$

$$= \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \sup_{a>0}\left\{\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau + \frac{s}{h}\int\limits_{a}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\nu\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\right\}. \quad (29)$$

Снова полезно сравнить ответы к экстремальным задачам II^+ и IV^+

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\beta,h;\rho) > S_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\beta;\rho) \quad \text{при} \quad h>0, \quad \alpha<\beta, \quad \rho\in(0,1).$$

В заключение раздела отметим, что решения задач I^+—IV^+ пока не известны ни при каком значении $\rho \in (1,+\infty)\setminus\mathbb{N}$. Задаче I^+ при таких ρ посвящена работа А. Ю. Попова [51]. Точное выражение для величины $C(\rho) = \beta^{-1} S_{\mathbb{R}_+}(\beta;\rho)$

найти не удалось, но в [51] установлено её важное свойство: на множестве $\rho \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ функция $C(\rho)$ является ограниченной и отделена от нуля. Конкретнее говоря, справедливы оценки

$$2^{-\rho/2} \leqslant C(\rho) \leqslant 2^{1-\rho}\left(1 + \max_{r\geqslant 2} \frac{\ln(r-1)}{r}\right) < 1{,}28 \cdot 2^{1-\rho}, \quad 1 < \rho < 2;$$

$$C(\rho) < \frac{2^{2-\rho}}{\rho}, \qquad \frac{3}{2} < \rho < 2;$$

$$0{,}47 < -\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt < C(\rho) < 1, \qquad \rho > 2.$$

Авторам не встречались работы, в которых экстремальные проблемы II^+—IV^+ исследовались бы для $\rho > 1$.

Расскажем теперь о продвижениях, достигнутых при решении задач о связи типа функции с усреднёнными характеристиками распределения её нулей.

4. Целые функции с положительными нулями фиксированных усреднённых ρ-плотностей и индекса лакунарности

В 2009 г. на научном семинаре мехмата МГУ под руководством профессора А. М. Седлецкого возник следующий вопрос. Пусть $\rho \in (0, 1)$. Среди всех целых функций с положительными нулями фиксированной верхней ρ-плотности β (или усреднённой верхней ρ-плотности β^*) наибольший тип σ при порядке ρ имеют целые функции с измеримой последовательностью нулей. Это наибольшее значение типа связано с плотностями β и β^* посредством формул

$$\sigma = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho} = \frac{\pi\rho\beta^*}{\sin\pi\rho}.$$

Насколько может уменьшиться величина типа целой функции, последовательность корней которой Λ расположена на одном луче, дискретно измерима, т. е. существует предел

$$\tilde{\Delta}_\rho(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_\Lambda(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho},$$

но не является измеримой?

Следующая теорема [21] даёт ответ на этот вопрос.

Теорема 4.1 (Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, 2012 г.). *Пусть* $\rho \in (0, 1)$, $\beta^* > 0$ *и* $\alpha^* \in [0, \beta^*]$. *Пусть* $a_1 = a_1(\alpha^*, \beta^*)$ *и* $a_2 = a_2(\alpha^*, \beta^*)$ — *корни уравнения* (17):

$$a \ln\frac{e}{a} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}, \quad a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2.$$

Тогда тип $\sigma_\rho(f)$ каждой целой функции $f(z)$ с положительными дискретно измеримыми нулями $\Lambda_f = \Lambda$ ρ-плотностей $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha^*$, $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*$ удовлетворяет неравенству

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \rho\left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0}\int\limits_{a(a_1/a_2)^{1/\rho}}^{a} \frac{a_2\beta^* a^{-\rho} - \alpha^*\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\right).$$

Существует целая функция $f(z)$ с положительными дискретно измеримыми нулями Λ заданных ρ-плотностей $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*$, доставляющая равенство в эту оценку.

Теорема 4.1 даёт для $\rho \in (0,1)$ решение следующей экстремальной задачи в классе целых функций с дискретно измеримыми нулями.

V$^+$. При фиксированных $\rho > 0$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ найти величину

$$\tilde{S}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*, \beta^*; \rho) :=$$
$$:= \inf\bigl\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \tilde{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*\bigr\}.$$

По теореме 4.1 для $\rho \in (0,1)$ выполняется равенство

$$\tilde{S}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*, \beta^*; \rho) = \rho\left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0}\int\limits_{a(a_1/a_2)^{1/\rho}}^{a} \frac{a_2\beta^* a^{-\rho} - \alpha^*\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\right). \qquad (30)$$

Плотностные характеристики дискретно измеримых последовательностей жёстко связаны с индексом лакунарности (4) и с помощью его выражаются друг через друга. Благодаря этому удаётся вычислить наименьший ρ-тип целой функции с положительными дискретно измеримыми нулями, зная индекс лакунарности последовательности нулей и любую из обычных или усреднённых ρ-плотностей. Приведём сначала необходимые соотношения между характеристиками роста последовательностей [13].

Предложение 4.2. *Пусть $\rho > 0$ и Λ — дискретно измеримая последовательность комплексных чисел с ρ-плотностями $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*$. Пусть $l = l(\Lambda)$ — индекс лакунарности последовательности Λ и $q = l^\rho$. Тогда справедливы равенства*

$$\begin{aligned} &\beta = q\alpha, \\ &\beta^* = \frac{\beta}{\rho e}\, q^{1/(q-1)}, \quad \alpha^* = \frac{\beta}{\rho}\,\frac{\ln q}{q-1}, \quad l > 1, \\ &\beta^* = \alpha^* = \frac{\beta}{\rho}, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad l = 1. \end{aligned}$$

Корни уравнения (17) определяются равенствами

$$\begin{aligned} &a_1 = e q^{q/(1-q)}, \quad a_2 = e q^{1/(1-q)}, \quad l > 1, \\ &a_1 = a_2 = 1, \qquad\qquad\qquad\qquad l = 1. \end{aligned}$$

Поставим теперь экстремальные задачи для функций с положительными дискретно измеримыми нулями, имеющими фиксированный индекс лакунарности.

VI$^+$. При фиксированных $\rho > 0$, $\beta > 0$, $l \geqslant 1$ найти величину

$$\check{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta, l; \rho) := \\ := \inf\Big\{\sigma_\rho(f) \colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \tilde{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda),\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ l(\Lambda) = l\Big\}.$$

VII$^+$. При фиксированных $\rho > 0$, $\beta^* > 0$, $l \geqslant 1$ найти величину

$$\check{S}^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*, l; \rho) := \\ := \inf\Big\{\sigma_\rho(f) \colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \tilde{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda),\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*,\ l(\Lambda) = l\Big\}.$$

Из теоремы 4.1 и предложения 4.2 вытекает следующий результат, установленный в [13].

Теорема 4.3. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0,\,1)$ с положительными дискретно измеримыми нулями $\Lambda_f = \Lambda$, имеющими верхние ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*$. Пусть далее $l = l(\Lambda)$ — индекс лакунарности последовательности Λ. Обозначим*

$$q = l^\rho, \quad L = \frac{\ln q}{q-1}, \quad K = q^{1/(1-q)} \ln q^{1/(1-q)}.$$

Тогда наименьший возможный ρ-тип $f(z)$ вычисляется по формулам

$$\check{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta, l; \rho) = \beta\bigg\{\frac{\pi L}{\sin \pi\rho} + \sup_{a>0} \int\limits_{al^{-1}}^{a} \frac{a^{-\rho} - L\tau^{-\rho}}{\tau + 1}\, d\tau\bigg\},$$

$$\check{S}^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*, l; \rho) = \beta^* \rho\, e\bigg\{\frac{\pi K}{\sin \pi\rho} + \sup_{a>0} \int\limits_{al^{-1}}^{a} \frac{q^{1/(1-q)} a^{-\rho} - K\tau^{-\rho}}{\tau + 1}\, d\tau\bigg\}.$$

Случай $l = 1$ влечёт измеримость последовательности нулей и, рассматриваемый как предельный, приводит к точным равенствам

$$\sigma_\rho(f) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho} = \frac{\pi\rho\beta^*}{\sin \pi\rho}.$$

Экстремальная задача V$^+$, решение которой даёт теорема 4.1, поставлена хотя и для широкого, но все же подкласса целых функций, выделяемого условием дискретной измеримости нулей. При отказе от этого условия возникают внешне похожие на V$^+$, но более общие (и, как оказалось, более трудные) экстремальные задачи, состоящие в следующем.

VIII$^+$. Для фиксированных чисел $\rho > 0$, $\beta^* > 0$ вычислить

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*; \rho) := \inf\big\{\sigma_\rho(f) \colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*\big\}.$$

IX^+. Для фиксированных чисел $\rho>0$, $\beta^*>0$, $\alpha^*\in[0,\beta^*]$ вычислить

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho):=\inf\bigl\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda_f=\Lambda\subset\mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)\geqslant\alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)=\beta^*\bigr\}.$$

Решение этих экстремальных задач было найдено в [12]. В результате исследования выяснилось, что отсутствие дополнительного требования дискретной измеримости последовательности нулей не уменьшает величины экстремального типа, выписанной в теореме 4.1. Нам будет удобно придать этой величине несколько иной, «симметричный» вид (см. формулу (32) ниже).

Теорема 4.4 (Г. Г. Брайчев, 2012 г.). *Для наперёд заданных чисел $\rho\in(0,1)$, $\beta^*>0$, $\alpha^*\in[0,\beta^*]$ экстремальные величины в задачах* VIII^+ *и* IX^+ *вычисляются соответственно по формулам*

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*;\rho)=C(\rho)\rho\, e\beta^*, \tag{31}$$

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho)=\rho\left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin\pi\rho}+\max_{b>0}\int\limits_{ba_1^{1/\rho}}^{ba_2^{1/\rho}}\frac{\beta^*b^{-\rho}-\alpha^*\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\right), \tag{32}$$

где a_1 и a_2 те же, что в теореме 4.1. Точная нижняя грань $S^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*;\rho)$ достигается на экстремальной последовательности из теоремы 3.1, а $C(\rho)$ — функция из этой теоремы. Точная нижняя грань $S^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho)$ достигается на экстремальной функции с нулями $\Lambda_f=\Lambda$ из теоремы 4.1.

Поскольку задача IX^+ при $\alpha^*=0$ превращается в задачу VIII^+, то (31) является следствием (32). При $\alpha^*=\beta^*$ ($a_1=a_2=1$) формула (32) даёт неоднократно упоминавшийся выше классический результат

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*,\beta^*;\rho)=\frac{\pi\rho\,\beta^*}{\sin\pi\rho},\quad \rho\in(0,1).$$

В очередной раз отметим, что при заданном значении $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f)=\beta^*$ величина наименьшего возможного ρ-типа целых функций $f(z)$ с нулями на луче строго больше таковой в ситуации, когда нули произвольно распределены на комплексной плоскости (ср. (20) и (31) с учётом (23)):

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*;\rho)>S^*_{\mathbb{C}}(\beta^*;\rho),\quad \rho\in(0,1).$$

Гипотеза о справедливости этого неравенства, получившая подтверждение благодаря теореме 4.4, была несколько лет назад высказана А. Ю. Поповым. Другая его гипотеза, восходящая к [54], состоит в том, что при фиксированном значении $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f)=\beta^*$ (соответственно $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f)=\beta$) тип целой функции $f(z)$ при порядке $\rho\in(0,1)$, не имеющей нулей в каком-либо угле, также строго больше, чем $S^*_{\mathbb{C}}(\beta^*;\rho)$ (соответственно $S_{\mathbb{C}}(\beta;\rho)$). Эти утверждения остаются пока недоказанными. Вопросы роста целых функций с нулями в угле мы рассмотрим в следующем разделе.

Завершая этот раздел, приведём оценки экстремальной величины $S^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho)$, вычисленной в теореме 4.4, через уже изученные величины. Для этого обозначим

$$C^*(k^*,\rho)=\rho\left(\frac{\pi k^*}{\sin\pi\rho}+\max_{b>0}\int\limits_{ba_1^{1/\rho}}^{ba_2^{1/\rho}}\frac{b^{-\rho}-k^*\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\right),\quad k^*=\frac{\alpha^*}{\beta^*},$$

и запишем

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho)=\beta^*C^*(k^*,\rho),\quad \rho\in(0,1).$$

В [12] доказано, что при любых $\rho\in(0,1)$ и $k^*\in[0,1]$ справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{\pi k^*\rho}{\sin\pi\rho}+\left(a_2-k^*\ln\frac{ea_2}{a_1}\right)\rho\,C(\rho)\leqslant C^*(k^*,\rho)\leqslant\frac{\pi k^*\rho}{\sin\pi\rho}+(a_2-k^*)\rho\,C(\rho),$$

а при фиксированном k^* и $\rho\to 0$ выполнены асимптотические равенства

$$C^*(k^*,\rho)=1+a_2^{-1/\rho}\frac{\rho(\ln a_2+\rho)}{1+\rho}+O(a_2^{-2/\rho}),\quad k^*\in[0,k_0^*],$$

$$C^*(k^*,\rho)=1+a_2^{-1/\rho}\frac{\rho(\ln a_2+\rho)}{1+\rho}+O(\rho\,a_1^{1/\rho}),\quad k^*\in(k_0^*,1),$$

где $k_0^*=0{,}58058\ldots$ — корень некоторого вспомогательного трансцендентного уравнения. В частности, при $k^*=0$ отсюда получаем асимптотику

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*;\rho)=C(\rho)\rho\,e\beta^*=\beta^*\{1+\rho e^{-1/\rho}+O(e^{-2/\rho})\},\quad \rho\to 0,$$

согласующуюся с (24).

В дополнение отметим, что зависимость величин $C(\rho)$, $C(k,\rho)$, $C^*(k^*,\rho)$ от своих аргументов обладает рядом замечательных свойств (монотонность, выпуклость и др.), описанных в [12, 20, 49].

Подводя итог, можно сказать, что к настоящему времени вопрос о точных оценках типа целой функции порядка $\rho\in(0,1)$ через классические плотности распределения её нулей в случае, когда нули лежат на луче, достаточно подробно исследован. Следующим естественным шагом в данном направлении является изучение роста целых функций с нулями, расположенными не на одном, а на двух лучах или между ними, т. е. в угле.

5. Целые функции с нулями в угле

В этом разделе мы приведём точные результаты для типа целой функции с нулями, расположенными в угле и имеющими заданные плотности (обычные или усреднённые). Для определённости считаем, что угол имеет вид

$$\Gamma_\theta=\{z\in\mathbb{C}\colon |\arg z|\leqslant\theta\},$$

т. е. ограничен лучами

$$\gamma_{\pm\theta}=\{z\in\mathbb{C}\colon \arg z=\pm\theta\}.$$

Значения параметра θ будут оговариваться ниже.

Совсем недавно А. Ю. Попов [54, теорема 3.1], обобщая свой результат для функций с положительными нулями (см. теорему 3.1), определил наименьший возможный тип при порядке $\rho \in (0,1)$ целых функций с нулями заданной верхней плотности, расположенными в некотором угле. Сформулируем теорему в удобной для нас форме.

Теорема 5.1 (А. Ю. Попов, 2013 г.). *Тип при порядке $\rho \in (0,1)$ каждой целой функции $f(z)$ с нулями $\Lambda = \Lambda_f$, расположенными в угле Γ_θ раствора $2\theta \in [0,\pi]$ и имеющими верхнюю ρ-плотность $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, удовлетворяет оценке*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\beta}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1)}{a^\rho}.$$

Существует целая функция, реализующая равенство в этой оценке.

Чуть позже такая же задача с дополнительным условием на нижнюю ρ-плотность нулей была решена В. Б. Шерстюковым методом, основанным на идеях работы [20]. Результат (анонсирован в [61], с полным доказательством опубликован в [62]) является обобщением теорем 3.2, 5.1 и формулируется следующим образом.

Теорема 5.2 (В. Б. Шерстюков, 2014 г.). *Тип при порядке $\rho \in (0,1)$ каждой целой функции $f(z)$ с нулями $\Lambda = \Lambda_f$, расположенными в угле Γ_θ раствора $2\theta \in [0,\pi]$ и имеющими верхнюю ρ-плотность $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ и нижнюю ρ-плотность $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha$, удовлетворяет оценке*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{(\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho})(\tau + \cos\theta)}{\tau^2 + 2\tau\cos\theta + 1}\, d\tau.$$

Существует целая функция, реализующая равенство в этой оценке, такая что последовательность её нулей Λ расположена на лучах $\gamma_{\pm\theta}$, причём $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$.

Ясно, что в теоремах 5.1 и 5.2 для определённых значений параметров найдены соответственно экстремальные величины

$$S_{\Gamma_\theta}(\beta;\rho) := \inf\{\sigma_\rho(f) \colon \Lambda = \Lambda_f \subset \Gamma_\theta,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\},$$
$$S_{\Gamma_\theta}(\alpha,\beta;\rho) := \inf\{\sigma_\rho(f) \colon \Lambda = \Lambda_f \subset \Gamma_\theta,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha\},$$

связанные очевидным соотношением

$$S_{\Gamma_\theta}(0,\beta;\rho) = S_{\Gamma_\theta}(\beta;\rho).$$

Именно, для фиксированных чисел $\rho \in (0,1)$, $\theta \in [0,\pi/2]$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$ справедливы формулы

$$S_{\Gamma_\theta}(\beta;\rho)=\frac{\beta}{2}\max_{a>0}\frac{\ln(a^2+2a\cos\theta+1)}{a^\rho}, \tag{33}$$

$$S_{\Gamma_\theta}(\alpha,\beta;\rho)=\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta+\max_{a>0}\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a}\frac{(\beta\,a^{-\rho}-\alpha\tau^{-\rho})(\tau+\cos\theta)}{\tau^2+2\tau\cos\theta+1}\,d\tau, \tag{34}$$

причём (33) следует из (34) при $\alpha=0$. Отметим ещё, что при $\theta=0$ формулы (33) и (34) переходят в формулы (22) и (25) соответственно. В частном случае $\theta=\pi/2$ формула (34) показывает, что наименьшее значение для типа при порядке $\rho\in(0,1)$ целой функции $f(z)$ с последовательностью Λ нулей, таких что $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)=\beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)\geqslant\alpha$ и лежащих в некоторой (замкнутой) полуплоскости, выражается величиной

$$\frac{\pi\alpha}{2\sin(\pi\rho/2)}+\max_{a>0}\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a}\frac{(\beta a^{-\rho}-\alpha\tau^{-\rho})\tau}{\tau^2+1}\,d\tau,$$

и указанное значение достигается для некоторой целой функции с нулями, расположенными на одной прямой. После очевидных преобразований последнего интеграла приходим к формуле

$$S_{\Gamma_{\pi/2}}(\alpha,\beta;\rho)=\frac{1}{2}\,S_{\mathbb{R}_+}\Big(\alpha,\beta;\frac{\rho}{2}\Big)=\frac{\beta}{2}\,C\Big(k,\frac{\rho}{2}\Big),\quad k=\frac{\alpha}{\beta}\in[0,1],\quad \rho\in(0,1),$$

которая связывает теоремы 3.2, 5.2 и демонстрирует, что наименьшее значение ρ-типа целой функции с нулями в полуплоскости (или на прямой) равно половине наименьшего значения $(\rho/2)$-типа целой функции с нулями на луче. В частности, при $\alpha=0$ имеем

$$S_{\Gamma_{\pi/2}}(\beta;\rho)=\frac{1}{2}\,S_{\mathbb{R}_+}\Big(\beta;\frac{\rho}{2}\Big)=\frac{\beta}{2}\,C\Big(\frac{\rho}{2}\Big)=\frac{\beta}{2}\max_{a>0}\frac{\ln(a^2+1)}{a^\rho},\quad \rho\in(0,1).$$

Отдельного внимания заслуживает случай $\alpha=\beta$, когда целая функция $f(z)$ обладает измеримой (при показателе $\rho\in(0,1)$) последовательностью нулей Λ_f, расположенной в угле Γ_θ. Как известно, такая $f(z)$ будет функцией вполне регулярного роста тогда и только тогда, когда последовательность Λ_f имеет так называемую угловую плотность $\Delta_\rho(\psi)$ при показателе ρ. В этом случае тип вычисляется по точной формуле, вытекающей из [41, гл. II, § 2],

$$\sigma_\rho(f)=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\max_{0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}\int\limits_0^{2\pi}h_\rho(\varphi-\psi)\,d\Delta_\rho(\psi),$$

где $h_\rho(\varphi)$ есть 2π-периодическое продолжение функции $\cos\rho(\varphi-\pi)$ с отрезка $[0,2\pi]$ на всю вещественную прямую. Для последовательности Λ, расположенной на одном луче, существование угловой плотности при показателе ρ равносильно измеримости Λ при том же показателе. В общем случае расположения последовательности в угле это не так, и существуют целые функции с измеримой последовательностью нулей, не являющиеся функциями вполне регулярного роста. Указанное обстоятельство говорит о том, что задача о наименьшем типе содержательна даже для целых функций с измеримыми нулями, лежащими в угле. Для таких функций из теоремы 5.2 получаем соотношение

$$S_{\Gamma_\theta}(\beta,\beta;\rho)=\frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta,\quad \rho\in(0,1),\quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Отметим, что экстремальная величина $S_{\Gamma_\theta}(\beta,\beta;\rho)$ достигается, если все нули функции расположены на лучах $\gamma_{\pm\theta}$ и на каждом из них образуют измеримые последовательности с равными ρ-плотностями $\beta/2$, причём $S_{\Gamma_\theta}(\beta,\beta;\rho)$ заведомо не достигается, если эти ρ-плотности различны.

Приведём теперь следствие теоремы 5.2, относящееся к чётным целым функциям экспоненциального типа, которые играют важную роль в различных разделах комплексного анализа, например в теории рядов Дирихле (см. [42]).

Теорема 5.3. *Пусть $\beta>0$, $\alpha\in[0,\beta]$, $\theta\in[0,\pi/4]$, и пусть*

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),\quad |\arg\lambda_n|\leqslant\theta,$$

причём

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|}=\beta,\quad \varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|}\geqslant\alpha.$$

Тогда экспоненциальный тип

$$\sigma(F)=\varlimsup_{r\to+\infty}r^{-1}\ln\max_{|z|=r}|F(z)|$$

функции $F(z)$ удовлетворяет точному неравенству

$$\sigma(F)\geqslant S_{\Gamma_{2\theta}}\left(\alpha,\beta;\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\pi\alpha\cos\theta+\max_{a>0}\int\limits_{a(\alpha/\beta)^2}^{a}\left(\frac{\beta}{\sqrt{a}}-\frac{\alpha}{\sqrt{\tau}}\right)\frac{\tau+\cos2\theta}{\tau^2+2\tau\cos2\theta+1}\,d\tau,$$

где интеграл может быть выражен через элементарные функции.

Без учёта нижней плотности нулей ($\alpha=0$) эта оценка принимает более простой вид (см. теорему 5.1):

$$\sigma(F)\geqslant\frac{\beta}{2}\max_{a>0}\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(a^2+2a\cos2\theta+1).$$

Если же последовательность нулей $F(z)$ измерима ($\alpha=\beta$), то имеем точную оценку

$$\sigma(F)\geqslant\pi\beta\cos\theta.$$

Зависимость наименьшего возможного ρ-типа целой функции от усреднённых ρ-плотностей её нулей, целиком лежащих в некотором угле, описывается следующими результатами свежей работы [17].

Теорема 5.4 (Г. Г. Брайчев, 2016 г.). *Тип при порядке $\rho \in (0, 1)$ каждой целой функции $f(z)$ с нулями, расположенными в угле раствора $2\theta \in [0, \pi]$ и имеющими верхнюю усреднённую ρ-плотность β^*, удовлетворяет оценке*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\beta^* \rho e}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1)}{a^\rho}.$$

Существует целая функция, нулями которой служит некоторая последовательность $\Lambda \subset \gamma_{\pm\theta}$ с верхней усреднённой ρ-плотностью $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*$, реализующая равенство в этой оценке.

Теорема 5.4 является следствием более общего результата, учитывающего, кроме верхней, ещё и нижнюю усреднённую ρ-плотность нулей.

Теорема 5.5 (Г. Г. Брайчев, 2016 г.). *Пусть $\rho \in (0,1)$, $\theta \in [0, \pi/2]$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$. Тип при порядке ρ каждой целой функции $f(z)$ с нулями Λ_f, лежащими в угле Γ_θ и имеющими усреднённые ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) \geqslant \alpha^*$, удовлетворяет оценке*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \rho\left(\frac{\pi\alpha^* \cos\rho\theta}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho})(\tau + \cos\theta)}{\tau^2 + 2\tau\cos\theta + 1}\, d\tau\right),$$

где a_1, a_2 — корни уравнения (17). Существует целая функция с последовательностью нулей $\Lambda \subset \gamma_{\pm\theta}$, такой что $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*$, реализующая равенство в этой оценке.

Таким образом, в самое последнее время получено серьёзное продвижение в решении следующих экстремальных задач для функций конечного порядка с нулями в угле.

Для фиксированных чисел $\rho > 0$, $\theta \in [0, \pi]$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ требуется вычислить величины

$$S^*_{\Gamma_\theta}(\beta^*; \rho) := \inf\bigl\{\sigma_\rho(f) \colon \Lambda = \Lambda_f \subset \Gamma_\theta,\ \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*\bigr\},$$
$$S^*_{\Gamma_\theta}(\alpha^*, \beta^*; \rho) := \inf\bigl\{\sigma_\rho(f) \colon \Lambda = \Lambda_f \subset \Gamma_\theta,\ \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*,\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha^*\bigr\}.$$

Полное решение этих задач пока известно только для $\theta = \pi$, что соответствует произвольному расположению нулей в комплексной плоскости (см. теорему 2.2). Для $\theta \in [0, \pi/2]$ и $\rho \in (0, 1)$ согласно теоремам 5.4, 5.5 имеем

$$S^*_{\Gamma_\theta}(\beta^*; \rho) = \frac{\beta^* \rho e}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1)}{a^\rho}, \tag{35}$$

$$S^*_{\Gamma_\theta}(\alpha^*, \beta^*; \rho) = \rho\left(\frac{\pi\alpha^* \cos\rho\theta}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho})(\tau + \cos\theta)}{\tau^2 + 2\tau\cos\theta + 1}\, d\tau\right). \tag{36}$$

Отметим, что (35) следует из (36) при $\alpha^* = 0$, а для функций с измеримыми нулями получаем

$$S^*_{\Gamma_\theta}(\beta^*, \beta^*; \rho) = \frac{\pi\rho\beta^*}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta, \quad \rho \in (0,1), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Экстремальная величина $S^*_{\Gamma_\theta}(\beta^*, \beta^*; \rho)$ достигается, если все нули функции расположены на лучах $\gamma_{\pm\theta}$ и на каждом из них образуют измеримые последовательности с равными ρ-плотностями $\beta^*/2$, и $S_{\Gamma_\theta}(\beta^*, \beta^*; \rho)$ заведомо не достигается, если эти ρ-плотности различны.

Вводя обозначения

$$C_\theta(\rho) = \frac{1}{2}\max_{a>0}\frac{\ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1)}{a^\rho},$$

$$C_\theta(k,\rho) = \frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta + \max_{a>0}\int_{ak^{1/\rho}}^{a}\frac{(a^{-\rho} - k\tau^{-\rho})(\tau + \cos\theta)}{\tau^2 + 2\tau\cos\theta + 1}\,d\tau, \quad k = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$C^*_\theta(k^*,\rho) = \rho\left(\frac{\pi k^*}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta + \max_{a>0}\int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}}\frac{(a^{-\rho} - k^*\tau^{-\rho})(\tau + \cos\theta)}{\tau^2 + 2\tau\cos\theta + 1}\,d\tau\right), \quad k^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*},$$

запишем для $\rho \in (0,1)$ и $\theta \in [0, \pi/2]$ формулы (33)—(36) в компактном виде:

$$S_{\Gamma_\theta}(\beta;\rho) = \beta C_\theta(\rho), \qquad S_{\Gamma_\theta}(\alpha,\beta;\rho) = \beta C_\theta(k,\rho),$$
$$S^*_{\Gamma_\theta}(\beta^*;\rho) = \beta^*\rho e C_\theta(\rho), \qquad S^*_{\Gamma_\theta}(\alpha^*,\beta^*;\rho) = \beta^* C^*_\theta(k^*,\rho).$$

Величина $C_\theta(\rho)$ введена и исследована в [54], где, в частности, показано [54, теорема 3.2], что для фиксированного $\theta \in [0, \pi/2)$ выполнена асимптотика

$$C_\theta(\rho) = \frac{1}{\rho e} + e^{-1-1/\rho}\cos\theta + O\big(\rho^{-2}\,e^{-2/\rho}\big), \quad \rho \to 0.$$

Некоторое представление о сложно устроенных величинах $C_\theta(k,\rho)$ и $C^*_\theta(k^*,\rho)$ можно получить из оценок

$$\frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta + (1 - k + k\ln k)C_\theta(\rho) \leqslant C_\theta(k,\rho) \leqslant \frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta + (1-k)C_\theta(\rho),$$

$$\frac{\pi\rho k^*}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta + \frac{\rho e}{2}\,C_\theta(\rho) - k^* B_\theta(\rho) \leqslant C^*_\theta(k^*,\rho) \leqslant \frac{\pi\rho\, k^*}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta + \frac{\rho e}{2}\,(1-k^*)C_\theta(\rho),$$

где

$$B_\theta(\rho) = \int_0^{a_0}\tau^{-\rho}\frac{\tau^2\cos\theta + 2\tau + \cos\theta}{(\tau^2 + 2\tau\cos\theta + 1)^2}\,d\tau$$

и $a_0 = a_0(\theta,\rho)$ — точка, на которой достигается максимум в определении $C_\theta(\rho)$.

Интересно, что методы, развитые при доказательстве теорем 5.1—5.5, позволяют устанавливать точные оценки снизу и для индикатора

$$h_\rho(f,\theta) = \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho}, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

при порядке $\rho \in (0, 1)$ целой функции с отрицательными нулями заданных ρ-плотностей. Например, если заданной является только верхняя (обычная или усреднённая) ρ-плотность нулей, то верны оценки

$$\begin{aligned} h_\rho(f,\theta) &\geqslant S_{\Gamma_\theta}(\beta;\rho) = \beta C_\theta(\rho) = \\ &= \frac{\beta}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1)}{a^\rho}, \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ h_\rho(f,\theta) &\geqslant S^*_{\Gamma_\theta}(\beta^*;\rho) = \beta^* \rho e C_\theta(\rho) = \\ &= \frac{\beta^* \rho e}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1)}{a^\rho}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Если же заданы обе ρ-плотности нулей (обычные или усреднённые), то верны оценки

$$h_\rho(f,\theta) \geqslant S_{\Gamma_\theta}(\alpha, \beta; \rho), \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
$$h_\rho(f,\theta) \geqslant S^*_{\Gamma_\theta}(\alpha^*, \beta^*; \rho), \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

где правые части определены в (34) и (36) соответственно. Для каждой из указанных оценок индикатора существует своя целая функция порядка $\rho \in (0, 1)$ с отрицательными нулями, превращающая оценку в тождество на всём промежутке $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Отметим, наконец, что в «крайних» случаях $\alpha = \beta$ и $\alpha^* = \beta^*$ получаем неравенства

$$h_\rho(f,\theta) \geqslant \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho} \cos\rho\theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
$$h_\rho(f,\theta) \geqslant \frac{\pi\rho\beta^*}{\sin\pi\rho} \cos\rho\theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Эти неулучшаемые оценки согласуются с классическими фактами, ведь для целых функций с измеримой последовательностью отрицательных нулей справедлива асимптотика, из которой величина индикатора при всех θ находится точно (см., например, [65, гл. 7]):

$$h_\rho(f,\theta) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho} \cos\rho\theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$
$$h_\rho(f,\theta) = \frac{\pi\rho\beta^*}{\sin\pi\rho} \cos\rho\theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Результаты предыдущих разделов 3—5 допускают распространение на более общие ситуации, когда нули целой функции лежат на нескольких лучах или в нескольких углах.

6. Целые функции с нулями на лучах или в углах

Основное содержание этого раздела составляет обзор избранных результатов недавних работ Г. Г. Брайчева [16, 17]. Начнём с описания наименьшего возможного значения типа при порядке $\rho \in (0, m)$ целых функций с нулями заданных верхней и нижней (обычных или усреднённых) ρ-плотностей, расположенными на m лучах. Считаем, что лучи исходят из точки $z = 0$ и разбивают комплексную плоскость на равные углы. В соответствии с обозначением из предыдущего раздела при $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\gamma_{(2k+1)\pi/m} = \left\{z \in \mathbb{C}\colon z = re^{i(2k+1)\pi/m},\ r \geqslant 0\right\}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$V_m = \bigcup_{k=0}^{m-1} \gamma_{(2k+1)\pi/m}. \tag{37}$$

При $m = 1$ множество V_1 состоит из одного луча γ_π, совпадающего с отрицательной вещественной полуосью, а при $m = 2$ множество V_2 есть мнимая ось комплексной плоскости. В формулировках следующих теорем используем величины $C(\rho)$, $C(k, \rho)$, $C^*(k^*, \rho)$, $C_\theta(k, \rho)$, $C^*_\theta(k^*, \rho)$, введённые в разделах 3—5.

Теорема 6.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0, m)$ с нулями $\Lambda_f = \Lambda \subset V_m$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{m}\, C\left(\frac{\rho}{m}\right) = \frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{m} \max_{a>0} \frac{\ln(1 + a^m)}{a^\rho}. \tag{38}$$

Для каждой пары чисел $m \in \mathbb{N}$ и $\rho \in (0, m)$ существует целая функция $f(z)$ порядка ρ с нулями $\Lambda \subset V_m$, доставляющая равенство в (38).

При $m = 1$ теорема 6.1 переходит в результат, равносильный теореме 3.1. Следующее утверждение, развивающее теоремы 3.2 и 6.1, учитывает обе ρ-плотности нулей целой функции.

Теорема 6.2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$ и пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0, m)$ с нулями $\Lambda_f \subset V_m$, имеющими ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) \geqslant \alpha$. Тогда выполняется неравенство*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\beta}{m}\, C\left(k, \frac{\rho}{m}\right) = \frac{\beta}{m}\left[\frac{\pi k}{\sin(\pi\rho/m)} + \max_{a>0} \int\limits_{ak^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho/m} - k\tau^{-\rho/m}}{\tau + 1}\, d\tau\right], \tag{39}$$

где $k = \alpha/\beta$. Для каждого фиксированного набора параметров m, ρ, β, α существует целая функция из указанного в условии класса, доставляющая равенство в (39).

Перейдём теперь к оценкам ρ-типа целой функции через усреднённые ρ-плотности её корней, по-прежнему расположенных на «правильной» системе лучей. Базовый результат формулируется так.

Теорема 6.3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0,m)$ с нулями $\Lambda_f \subset V_m$ заданных усреднённых ρ-плотностей $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) \geqslant \alpha^*$ удовлетворяет точной оценке*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\beta^*}{m} C^*\Big(k^*, \frac{\rho}{m}\Big) = \frac{\rho\beta^*}{m}\bigg(\frac{\pi k^*}{\sin(\pi\rho/m)} + \max_{a>0} \int\limits_{aa_1^{m/\rho}}^{aa_2^{m/\rho}} \frac{a^{-\rho/m} - k^*\tau^{-\rho/m}}{\tau+1}\,d\tau\bigg), \tag{40}$$

где a_1, a_2 — корни уравнения (17), $k^* = \alpha^*/\beta^*$. Равенство достигается на некоторой целой функции с нулями $\Lambda \subset V_m$ усреднённых ρ-плотностей $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*$.

Если в этой теореме ограничение на нижнюю усреднённую ρ-плотность отсутствует, т. е. $\alpha^* = 0$, то получается следующее утверждение.

Теорема 6.4. *Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0,m)$ с нулями $\Lambda_f \subset V_m$ усреднённой верхней ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$ удовлетворяет достижимой оценке*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\rho e\beta^*}{m} C\Big(\frac{\rho}{m}\Big) = \frac{\rho\, e\beta^*}{m} \max_{a>0} \frac{\ln(1+a^m)}{a^\rho}. \tag{41}$$

Точные оценки (38)—(41) решают при $\rho \in (0,m)$ экстремальные задачи

$$S_{V_m}(\beta;\rho) := \inf\big\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda = \Lambda_f \subset V_m,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\big\},$$
$$S_{V_m}(\alpha,\beta;\rho) := \inf\big\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda = \Lambda_f \subset V_m,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha\big\},$$
$$S^*_{V_m}(\beta^*;\rho) := \inf\big\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda = \Lambda_f \subset V_m,\ \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*\big\},$$
$$S^*_{V_m}(\alpha^*,\beta^*;\rho) := \inf\big\{\sigma_\rho(f)\colon \Lambda = \Lambda_f \subset V_m,\ \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*,\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha^*\big\},$$

позволяя для таких ρ записать соотношения

$$S_{V_m}(\beta;\rho) = \frac{\beta}{m} C\Big(\frac{\rho}{m}\Big), \qquad S_{V_m}(\alpha,\beta;\rho) = \frac{\beta}{m} C\Big(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\rho}{m}\Big),$$
$$S^*_{V_m}(\beta^*;\rho) = \frac{\rho\, e\beta^*}{m} C\Big(\frac{\rho}{m}\Big), \qquad S^*_{V_m}(\alpha^*,\beta^*;\rho) = \frac{\beta^*}{m} C^*\Big(\frac{\alpha^*}{\beta^*}, \frac{\rho}{m}\Big).$$

Важный случай $m=2$, когда нули целой функции порядка $\rho \in (0,2)$ лежат на прямой, достоин отдельного рассмотрения. Но мы не останавливаемся здесь на нём, поскольку подробное обсуждение будет проведено ниже для более общего случая расположения нулей в криволинейной полосе.

Несколько расширим множество локализации нулей (37), считая заданными их усреднённые ρ-плотности. Пусть, как и прежде,

$$\Gamma_\theta = \{z \in \mathbb{C}\colon |\arg z| \leqslant \theta\}$$

обозначает угол раствора 2θ. Для $m \in \mathbb{N}$ и $\theta \in [0, \pi/2m]$ положим

$$\Gamma_{\theta,k,m} = e^{i(2k+1)\pi/m}\Gamma_\theta =$$
$$= \left\{ z \in \mathbb{C}\colon z = re^{i\varphi},\ r \geqslant 0,\ \left| \frac{\varphi - (2k+1)\pi}{m} \right| \leqslant \theta \right\}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$
$$V_{\theta,\,m} = \bigcup_{k=0}^{m-1} \Gamma_{\theta,k,m}.$$

Например, с учётом обозначений (37) множество $V_{0,1} = V_1$ есть отрицательная вещественная полуось, а множество $V_{0,2} = V_2$ представляет собой мнимую ось комплексной плоскости. Вообще, для заданного $m \geqslant 2$ множество $V_{0,m}$ совпадает с множеством V_m из формулы (37), т. е. состоит из m лучей, делящих плоскость на равные углы. При этом лучи $\Gamma_{0,k,m}$ совпадают с лучами $\gamma_{(2k+1)\pi/m}$ и являются биссектрисами углов $\Gamma_{\theta,k,m}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. В общем случае $\theta \in (0, \pi/2m]$ множество $V_{\theta,m}$ состоит из m непересекающихся углов $\Gamma_{\theta,k,m}$ раствора 2θ каждый.

Пусть $\theta \in [0, \pi/2m]$. Для $\theta \in [0, \pi/2m)$ будем говорить, что последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ является *ρ-асимптотически близкой к множеству* $V_{\theta,m}$, если при любом $\theta' \in (\theta, \pi/2m)$ все члены последовательности Λ, кроме, быть может, некоторой подпоследовательности нулевой ρ-плотности, принадлежат $V_{\theta',m}$. Для крайнего значения $\theta = \pi/2m$ в этом определении требуем, чтобы каждый член последовательности Λ, кроме, возможно, некоторой подпоследовательности нулевой ρ-плотности, входил в само множество $V_{\theta,m}$.

Теорема 6.5. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\theta \in [0, \pi/2m]$. Тип при порядке $\rho \in (0, m)$ каждой целой функции $f(z)$ с ρ-асимптотически близкими к множеству $V_{\theta,m}$ нулями Λ_f заданных усреднённых ρ-плотностей $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) \geqslant \alpha^*$ удовлетворяет точной оценке*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\beta^*}{m}\, C^*_{m\theta}\left(k^*, \frac{\rho}{m}\right),$$

или в развёрнутой записи

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\rho}{m} \left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin(\pi\rho/m)} \cos(\rho m\theta) + {} \right.$$
$$\left. + \max_{a>0} \int\limits_{aa_1^{m/\rho}}^{aa_2^{m/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho/m} - \alpha^* \tau^{-\rho/m})(\tau + \cos m\theta)}{\tau^2 + 2\tau\cos m\theta + 1}\, d\tau \right),$$

где $k^* = \alpha^*/\beta^*$ и a_1, a_2 — корни уравнения

$$a \ln\frac{e}{a} = k^*.$$

Равенство достигается на некоторой целой функции с нулями Λ, одинаково распределёнными на граничных лучах множества $V_{\theta,m}$ и имеющими усреднённые ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*$.

Теорема 6.5 при $\theta = 0$ усиливает теорему 6.3 в части ослабления условий на расположение нулей целой функции. Например, при $m = 1$ они могут теперь находиться не только на положительной полуоси, но и располагаться ρ-асимптотически близко к ней, скажем лежать внутри параболы $\{z = x + iy\colon x = |y|^\gamma\}$, где $\gamma > 1$.

Случай $m = 2$ теоремы 6.5, содержащий наиболее интересные для приложений возможности расположения нулей целых функций на одной прямой или между двумя параллельными (пересекающимися) прямыми, обсудим более подробно. Нам удобней здесь рассматривать целые функции, имеющие последовательности нулей, «привязанные» не к мнимой, а к вещественной оси. Ясно, что соответствующий поворот комплексной плоскости не меняет ни величины типа целой функции, ни значений усреднённых плотностей её нулей. Сформулируем результат, вытекающий из теоремы 6.5 при $m = 2$, в виде отдельного утверждения.

Теорема 6.6. *Пусть $\theta \in [0, \pi/4]$. Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 2)$ с ρ-асимптотически близкими к множеству $V_{\theta,2}$ нулями Λ_f усреднённых ρ-плотностей $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) \geqslant \alpha^*$ удовлетворяет точной оценке*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\beta^*}{2}\, C^*_{2\theta}\left(k^*, \frac{\rho}{2}\right),$$

или в развёрнутой записи

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\rho\beta^*}{2}\left(\frac{\pi k^*}{\sin(\pi\rho/2)}\cos(2\rho\theta) + \max_{a>0}\int\limits_{aa_1^{2/\rho}}^{aa_2^{2/\rho}} \frac{(a^{-\rho/2} - k^*\tau^{-\rho/2})(\tau + \cos 2\theta)}{\tau^2 + 2\tau\cos 2\theta + 1}\, d\tau\right),$$

где $k^* = \alpha^*/\beta^*$ и a_1, a_2 — корни уравнения

$$a \ln\frac{e}{a} = k^*.$$

Равенство достигается на некоторой целой функции с нулями Λ, лежащими на прямых

$$l_{\pm\theta} = \{z \in \mathbb{C}\colon z = te^{\pm i\theta},\ t \in \mathbb{R}\}$$

и имеющими усреднённые ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*$.

Выбирая в теореме 6.6 значение $\theta = 0$, как следствие получаем следующее утверждение.

Теорема 6.7. *Тип произвольной целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 2)$ с нулями $\Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$,*

$$\frac{\operatorname{Im}\lambda_n}{|\lambda_n|} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

имеющими усреднённые ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) \geqslant \alpha^*$, удовлетворяет точной достижимой оценке

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\rho\beta^*}{2}\left(\frac{\pi k^*}{\sin(\pi\rho/2)} + \max_{a>0}\int\limits_{aa_1^{2/\rho}}^{aa_2^{2/\rho}} \frac{a^{-\rho/2} - k^*\tau^{-\rho/2}}{\tau+1}\,d\tau\right),$$

где $k^* = \alpha^*/\beta^*$ и a_1, a_2 — корни уравнения

$$a\ln\frac{e}{a} = k^*.$$

Обратим внимание на то, что теорема 6.7 заведомо справедлива, когда нули целой функции расположены на вещественной оси или между параллельными прямыми

$$\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z = \pm h\}, \quad h > 0,$$

или даже в криволинейной полосе

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C}\colon |y| \leqslant \delta(x)\},$$

где положительная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $\delta(x)$ такова, что

$$\delta(x) = o(|x|), \quad x \to \infty.$$

Отдельный интерес представляет поведение на мнимой оси целой функции с вещественными нулями, характеризуемое величинами

$$\varlimsup_{y\to\pm\infty} \frac{\ln|f(iy)|}{|y|^\rho},$$

т. е. значениями индикатора $h_\rho(f,\varphi)$ в точках $\varphi = \pm\pi/2$. В случае измеримой последовательности нулей, когда пределы в определениях её ρ-плотностей и усреднённых ρ-плотностей существуют одновременно и связаны равенством $\Delta_\rho(\Lambda) = \rho\Delta_\rho^*(\Lambda)$, из [65, теорема 7.3.1; 66, теорема 8.2.1] извлекаем следующий факт.

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0,1)$, все нули которой $\Lambda_f = \Lambda$ являются вещественными. Тогда эквивалентны утверждения

$$\text{существует предел } \lim_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho} = \beta = \rho\beta^* = \rho\lim_{r\to+\infty}\frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}$$

и

$$\text{существует предел } \lim_{y\to\pm\infty} \frac{\ln|f(iy)|}{|y|^\rho} = \frac{\pi\beta}{2\sin(\pi\rho/2)} = \frac{\pi\rho\beta^*}{2\sin(\pi\rho/2)}.$$

Результат верен также для канонических произведений порядка $\rho = 1$.

В менее изученном случае целых функций с неизмеримыми вещественными нулями теорема 6.6 даёт точную нижнюю оценку для значений $h_\rho(f, \pm\pi/2)$. Оказывается, что индикатор в точках $\varphi = \pm\pi/2$ любой целой функции нецелого порядка $\rho \in (0,2)$ с вещественными нулями заданных усреднённых ρ-плотностей не меньше, чем минимальный возможный ρ-тип на классе таких функций. Дадим точную формулировку.

Теорема 6.8. *Пусть $\rho \in (0,2)$, $\rho \neq 1$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0,\beta^*]$ и $f(z)$ — целая функция порядка ρ с вещественными нулями ρ-плотностей $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) \geqslant \alpha^*$. Тогда*

$$h_\rho\left(f,-\frac{\pi}{2}\right) = h_\rho\left(f,\frac{\pi}{2}\right) = \varlimsup_{y\to+\infty} \frac{\ln|f(\pm iy)|}{y^\rho} \geqslant \frac{\rho\beta^*}{2}\, C^*\left(k^*,\frac{\rho}{2}\right), \quad k^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

При $\rho = 1$ результат верен для функций вида

$$f(z) = e^{cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)e^{z/\lambda_n}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Именно, справедливо неравенство

$$h\left(f,\pm\frac{\pi}{2}\right) \geqslant \frac{\beta^*}{2}\, C^*\left(k^*,\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi\alpha^*}{2} + \max_{a>0}\Phi_{\alpha^*,\beta^*}(a),$$

где величина

$$\Phi_{\alpha^*,\beta^*}(a) = \frac{\beta^*}{2\sqrt{a}}\ln\frac{1+aa_2^2}{1+aa_1^2} - \alpha^*\operatorname{arctg}\frac{(a_2-a_1)\sqrt{a}}{1+aa_1a_2}$$

получена прямым подсчётом интеграла в определении $C^*(k^*,\rho)$ при $\rho = 1/2$. Приведённые в теореме оценки неулучшаемы.

Помимо целых функций с вещественными нулями, важную роль на практике играют функции с нулями на обеих (вещественной и мнимой) осях комплексной плоскости, что соответствует случаю $m = 4$ в теоремах 6.1—6.4. Такие функции с успехом применялись в [57] для обобщения теоремы Рубела—Мальявена из [71] и в вопросах полноты систем экспонент в неограниченных областях. Здесь мы рассмотрим более общую ситуацию, когда нули целой функции расположены на двух произвольных прямых, пересекающихся в точке $z = 0$. Приведём один результат А. Е. Аветисяна [2], перекликающийся с упомянутыми выше фактами из [65, 66].

Теорема 6.9 (А. Е. Аветисян, 1988 г.). *Пусть целая функция $f(z)$ с условием $f(0) = 1$ имеет порядок $\rho \in (1,2)$ и все её нули $\Lambda_f = \Lambda$ лежат на двух прямых*

$$\left\{z = te^{i(\pi/2+\pi/(2\rho))} \colon t \in \mathbb{R}\right\}$$

и

$$\left\{z = te^{-i(\pi/2+\pi/(2\rho))} \colon t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Следующие два утверждения эквивалентны:

$$\text{существует предел } \lim_{r\to+\infty}\frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho} = \beta$$

и

$$\text{существуют пределы } \lim_{y\to+\infty}\frac{\ln|f(iy)f(-iy)|}{y^\rho} = \pi\beta, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln|f(x)f(-x)|}{x^\rho} = 0. \tag{42}$$

Отметим существенные особенности этого результата: последовательность нулей измерима; положение прямых привязано к величине порядка; пределы в (42) лишь косвенно связаны со значением типа функции. Укажем также, что доказательство приведённого результата основано на применении классической теории Левина—Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста. Новыми методами, разработанными в [16, 17], охватываются целые функции порядка $\rho \in (0,2)$ с нулями на двух прямых, расположение которых не зависит от величины порядка, причём сама последовательность нулей не предполагается измеримой. Приведём один результат о росте максимума модуля целой функции с нулями на двух прямых.

Теорема 6.10. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0,2)$ с нулями, имеющими верхнюю ρ-плотность $\beta > 0$, нижнюю ρ-плотность $\geqslant \alpha \in [0,\beta]$ и лежащими на двух прямых, пересекающихся в точке $z = 0$ под углом $2\theta \in [0,\pi/2]$. Тогда имеет место неравенство*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\beta}{2}\, C_{2\theta}\left(k, \frac{\rho}{2}\right), \quad k = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{43}$$

Для каждой четвёрки рассматриваемых значений ρ, β, α, θ существует функция $f(z)$, реализующая равенство в (43).

Аналог этого результата в случае целой функции с нулями заданных усреднённых плотностей охватывается теоремой 6.6.

Итак, мы достаточно подробно рассказали о том, как основные классические характеристики распределения нулей целой функции конечного положительного порядка влияют на величину её типа. С другой стороны, как показано в [4] (см. также обзор [30]), целая функция с измеримой последовательностью нулей может не иметь совершенно регулярного роста модуля, т. е. величины её типа и нижнего типа могут не совпадать. Для полноценного описания поведения даже таких функций $f(z)$ с известной плотностью нулей требуется знать точный диапазон изменения не только типа $\sigma_\rho(f)$, но и нижнего типа $\underline{\sigma}_\rho(f)$. Этому кругу вопросов посвящён следующий раздел.

7. Экстремальные задачи для нижнего типа целых функций

Исследованию экстремальных задач, включающих нижний индикатор и нижний тип целых функций при заданном диапазоне изменения плотностных характеристик нулей, посвящены работы А. А. Гольдберга, А. А. Кондратюка, В. С. Азарина (см., например, [5, 27, 28, 34]). С оценками снизу для целых функций конечного порядка через специальные усреднённые характеристики распределения нулей — индексы концентрации и конденсации — связаны работы И. Ф. Красичкова-Терновского [37] и А. В. Братищева [23]. Однако самым естественным задачам, относящимся к нижнему типу при фиксированных значениях плотностей, уделялось гораздо меньше внимания. Так, на момент выхода известной монографии А. Ф. Леонтьева уже ощущался недостаток фактов общей теории «нижнего» роста целых функций (см. [42, гл. VI, § 2, с. 405—409]). Некоторые оценки предварительного характера для нижнего ρ-типа функции $f(z)$ с нулевым множеством $\Lambda_f \subset \mathbb{R}_+$ даны в [18]. Оценки сверху нижнего ρ-типа через нижние ρ-плотности, подобные верхним оценкам (8), (9), (21), в математической литературе вообще отсутствуют. В [15, 22] найдено объяснение этому факту. Именно, доказана принципиальная невозможность оценки сверху нижнего ρ-типа только через нижнюю ρ-плотность или нижнюю усреднённую ρ-плотность. Уместно подчеркнуть, что экстремальные величины для нижнего ρ-типа целой функции обладают рядом любопытных и отчасти неожиданных свойств, не присущих соответствующим величинам для обычного ρ-типа. Так, например, наибольшая возможная величина нижнего ρ-типа не зависит от расположения нулей целой функции на плоскости, но зависит от обеих обычных или усреднённых ρ-плотностей. В противоположность этому, наименьшая возможная величина нижнего ρ-типа зависит от расположения нулей целой функции на плоскости и определяется только нижней (обычной или усреднённой) ρ-плотностью.

В этом разделе будут приведены неулучшаемые оценки нижнего ρ-типа и снизу и сверху через ρ-плотности корней в двух принципиальных случаях: корни функции произвольно распределены на плоскости; корни функции лежат на одном луче. Начнём с известного соотношения

$$\underline{\sigma}_{\rho}(f) \geqslant \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) \geqslant \frac{\underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda)}{\rho},$$

которое вытекает непосредственно из формулы Йенсена (14) и неравенств (6), связывающих обычные и усреднённые ρ-плотности. Как недавно выяснилось [15], пример А. Ю. Попова из обзорной статьи [54, теорема 2.1] представляет целую функцию, имеющую не только наименьший ρ-тип, но обладающую также и наименьшим нижним ρ-типом. Это важное наблюдение позволяет решить сразу несколько экстремальных задач. Сформулируем их.

Для заданных чисел $\rho > 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant \alpha$ вычислить экстремальные величины

$$\underline{s}_{\mathbb{C}}(\alpha;\rho) := \inf\bigl\{\underline{\sigma}_{\rho}(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \alpha\bigr\}, \tag{44}$$

$$\underline{s}_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta;\rho) := \inf\bigl\{\underline{\sigma}_{\rho}(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \alpha,\ \overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) \geqslant \beta\bigr\}. \tag{45}$$

Для заданных чисел $\rho > 0$, $\alpha^* \geqslant 0$, $\beta^* \geqslant \alpha^*$ вычислить экстремальные величины

$$\underline{s}^*_{\mathbb{C}}(\alpha^*;\rho) := \inf\bigl\{\underline{\sigma}_{\rho}(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) = \alpha^*\bigr\}, \tag{46}$$

$$\underline{s}^*_{\mathbb{C}}(\alpha^*,\beta^*;\rho) := \inf\bigl\{\underline{\sigma}_{\rho}(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) = \alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) \geqslant \beta^*\bigr\}. \tag{47}$$

Ответы к этим задачам даёт следующая теорема [15].

Теорема 7.1 (Г. Г. Брайчев, 2015 г.). *Для произвольного порядка $\rho > 0$ и любых чисел $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant \alpha$ справедливы равенства*

$$\underline{s}_{\mathbb{C}}(\alpha;\rho) = \underline{s}_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta;\rho) = \frac{\alpha}{\rho}.$$

При любом значении $\beta \geqslant \alpha$ существует последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — нулевое множество некоторой целой функции — с ρ-плотностями $\underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \alpha$ и $\overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \beta$, на которой нижние грани (44), (45) *достигаются.*

Для произвольного порядка $\rho > 0$ и любых чисел $\alpha^* \geqslant 0$, $\beta^* \geqslant \alpha^*$ справедливы равенства

$$\underline{s}^*{}_{\mathbb{C}}(\alpha^*;\rho) = \underline{s}^*{}_{\mathbb{C}}(\alpha^*,\beta^*;\rho) = \alpha^*.$$

При любом значении $\beta^* \geqslant \alpha^*$ существует последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — нулевое множество некоторой целой функции — с усреднёнными ρ-плотностями $\underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) = \alpha^*$ и $\overline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) = \beta^*$, на которой нижние грани (46), (47) *достигаются.*

Возникает вопрос, увеличится ли нижний ρ-тип целой функции, если её корни при заданном значении ρ-плотностей будут находиться на одном луче, а не произвольно на комплексной плоскости. Ответ к настоящему времени получен для $\rho \in (0,1)$. Оказалось, что увеличение наименьшего возможного значения нижнего ρ-типа при переходе от произвольного расположения нулей на плоскости к их расположению на одном луче действительно происходит, но это значение, как и в теореме 7.1, не зависит от верхних ρ-плотностей. Чтобы точно описать ситуацию, сформулируем соответствующие экстремальные задачи.

Для заданных чисел $\rho > 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant \alpha$ вычислить экстремальные величины:

$$\underline{s}_{\mathbb{R}_+}(\alpha;\rho) := \inf\bigl\{\underline{\sigma}_{\rho}(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \alpha\bigr\}, \tag{48}$$

$$\underline{s}_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\beta;\rho) := \inf\bigl\{\underline{\sigma}_{\rho}(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \alpha,\ \overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) \geqslant \beta\bigr\}. \tag{49}$$

Для заданных чисел $\rho > 0$, $\alpha^* \geqslant 0$, $\beta^* \geqslant \alpha^*$ вычислить экстремальные величины

$$\underline{s}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*;\rho) := \inf\bigl\{\underline{\sigma}_{\rho}(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) = \alpha^*\bigr\}, \tag{50}$$

$$\underline{s}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho) := \inf\bigl\{\underline{\sigma}_{\rho}(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) = \alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) \geqslant \beta^*\bigr\}. \tag{51}$$

Теперь можем сформулировать результат [15].

Теорема 7.2 (Г. Г. Брайчев, 2015 г.). *Пусть $\rho \in (0,1)$. Для любых фиксированных чисел $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant \alpha$ справедливы равенства*

$$\underline{s}_{\mathbb{R}_+}(\alpha;\rho) = \underline{s}_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\beta;\rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}.$$

При любом значении $\beta \geqslant \alpha$ существует возрастающая последовательность $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ с усреднёнными ρ-плотностями $\underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \alpha$ и $\overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \beta$, на которой нижние грани (48), (49) *достигаются.*

Пусть по-прежнему $\rho \in (0,1)$. Для любых фиксированных чисел $\alpha^* \geqslant 0$ и $\beta^* \geqslant \alpha^*$ справедливы равенства

$$\underline{s}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*;\rho) = \underline{s}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho) = \frac{\pi\rho\,\alpha^*}{\sin\pi\rho}.$$

При любом значении $\beta^* \geqslant \alpha^*$ существует возрастающая последовательность $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ с ρ-плотностями $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*$ и $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*$, на которой нижние грани (50), (51) *достигаются.*

Обратим внимание на увеличение (по крайней мере для $\rho \in (0,1)$) наименьшего возможного значения нижнего ρ-типа целой функции с фиксированными ρ-плотностями нулей при переходе от произвольного расположения нулей на плоскости к их расположению на одном луче:

$$\underline{s}_{\,\mathbb{R}_+}(\alpha;\rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} > \underline{s}_{\,\mathbb{C}}(\alpha;\rho) = \frac{\alpha}{\rho},$$
$$\underline{s}^*_{\,\mathbb{R}_+}(\alpha^*;\rho) = \frac{\pi\rho\alpha^*}{\sin\pi\rho} > \underline{s}^*_{\,\mathbb{C}}(\alpha^*;\rho) = \alpha^*.$$

Обратимся к оценкам нижнего ρ-типа сверху. Ставится задача о наибольшем возможном значении нижнего ρ-типа целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями заданных нижней и верхней ρ-плотностей. Здесь мы сталкиваемся с непредвиденными обстоятельствами. Так, в отличие от предыдущих результатов о наименьшей возможной величине ρ-типа, оказалось, что только через нижнюю ρ-плотность (обычную или усреднённую) оценить нижний ρ-тип сверху невозможно. Вторая неожиданность: указанная величина нижнего ρ-типа не зависит от того, лежат все нули на одном луче или расположены произвольно в плоскости. Эти факты вытекают из формулируемой ниже теоремы 7.3, доказанной в [22]. Предварительно для заданных чисел $\rho > 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant \alpha$ введём следующие обозначения:

$$\bar{s}_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta;\rho) := \sup\bigl\{\underline{\sigma}_{\,\rho}(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda) = \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leqslant \beta\bigr\},$$
$$\bar{s}_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\beta;\rho) := \sup\bigl\{\underline{\sigma}_{\,\rho}(f)\colon \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda) = \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leqslant \beta\bigr\}.$$

Теорема 7.3 (Г. Г. Брайчев, О. В. Шерстюкова, 2011 г.). *Для произвольно заданного порядка $\rho \in (0,1)$ и любых чисел $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant \alpha$ справедливы равенства*

$$\bar{s}_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta;\rho) = \bar{s}_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\beta;\rho) =: \bar{s}(\alpha,\beta;\rho),$$
$$\bar{s}(\alpha,\beta;\rho) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho} - \sup_{a>0} \int\limits_a^{a(\beta/\alpha)^{1/\rho}} \frac{\beta\tau^{-\rho} - \alpha a^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau. \tag{52}$$

Верхняя грань $\bar{s}(\alpha,\beta;\rho)$ достигается на некоторой возрастающей положительной последовательности Λ, для которой $\underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda) = \alpha$ и $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$.

Вычисление несобственного интеграла в (52) при $\alpha = 0$ и любом $\beta > 0$ даёт

$$\bar{s}(0,\beta;\rho) = 0, \quad \rho \in (0,1),$$

т. е. нижний ρ-тип целой функции с нулевой нижней ρ-плотностью её корней равен нулю. При $\alpha = \beta > 0$ равенство (52) превращается в известный результат о вычислении типа функции с измеримой последовательностью положительных нулей:

$$\bar{s}(\beta,\beta;\rho)=\frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho},\quad \rho\in(0,1).$$

Так как задача линейная, имеем

$$\bar{s}(\alpha,\beta;\rho)=\beta\bar{s}(k,1;\rho),\quad k=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Как показано в [22], для произвольного порядка $\rho\in(0,1)$ и любых чисел $\alpha\geqslant 0$ и $\beta\geqslant\alpha$ справедливы оценки

$$\frac{\pi k}{\sin\pi\rho}+A_\rho k^{1-\rho}(1-k)\leqslant\bar{s}(k,1;\rho)\leqslant\frac{\pi k}{\sin\pi\rho}+B_\rho k^{1-\rho}(1-k)\ln\frac{e}{k},\tag{53}$$

где использованы обозначения $A_\rho=\min\{1/2;\rho\}$, $B_\rho=(\rho(1-\rho))^{-1}$. Из нижней оценки в [22] выводится, что при фиксированных $\rho\in(0,1)$ и $\alpha>0$ выполнено соотношение

$$\sup_{\beta\geqslant\alpha}\bar{s}(\alpha,\beta;\rho)=+\infty.$$

Последнее означает отмеченную выше невозможность оценки сверху нижнего ρ-типа целой функции порядка $\rho\in(0,1)$ только через нижнюю ρ-плотность её нулей.

Близкие результаты имеют место и при оценке сверху нижнего ρ-типа через усреднённые ρ-плотности. Речь идёт о следующих задачах.

Для заданных чисел $\rho>0$, $\alpha^*\geqslant 0$, $\beta^*\geqslant\alpha^*$ вычислить экстремальные величины

$$\bar{s}^*_{\mathbb{C}}(\alpha^*,\beta^*;\rho):=\sup\bigl\{\underline{\sigma}_\rho(f)\colon \Lambda_f=\Lambda\subset\mathbb{C},\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)=\alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)\leqslant\beta^*\bigr\},$$

$$\bar{s}^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho):=\sup\bigl\{\underline{\sigma}_\rho(f)\colon \Lambda_f=\Lambda\subset\mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)=\alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)\leqslant\beta^*\bigr\}.$$

Из приводимой ниже теоремы [15] следует, что наибольший возможный нижний ρ-тип целой функции, как и в случае обычных ρ-плотностей, не зависит от расположения нулей на плоскости, но зависит от обеих усреднённых ρ-плотностей.

Теорема 7.4 (Г. Г. Брайчев, 2015 г.). *Для любого $\rho\in(0,1)$ и любых фиксированных чисел $\alpha^*\geqslant 0$, $\beta^*\geqslant\alpha^*$ справедливы равенства*

$$\bar{s}^*_{\mathbb{C}}(\alpha^*,\beta^*;\rho)=\bar{s}^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho)=:\bar{s}^*(\alpha^*,\beta^*;\rho),$$

$$\bar{s}^*(\alpha^*,\beta^*;\rho)=\rho\beta^*\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}-\sup_{b>0}\int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}}\tau^{-\rho-1}\ln\frac{\tau+1}{b+1}\,d\tau\right),$$

где a_1, a_2 — корни уравнения

$$a\ln\frac{e}{a}=\frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

Верхняя грань $\bar{s}^*(\alpha^*,\beta^*;\rho)$ достигается на некоторой положительной возрастающей последовательности Λ, для которой $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)=\alpha^*$ и $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)=\beta^*$.

Как и следовало ожидать, для всех $\rho \in (0,1)$ теорема 7.4 даёт
$$\bar{s}^*(0,\beta^*;\rho) = 0, \quad \bar{s}^*(\beta^*,\beta^*;\rho) = \frac{\pi\rho\beta^*}{\sin\pi\rho}.$$

Приведём ещё оценки экстремальной величины, вычисленной в теореме 7.4. Для любых $\rho \in (0,1)$, $\alpha^* \geqslant 0$, $\beta^* \geqslant \alpha^*$ справедливы неравенства
$$a_1\frac{\pi\rho\beta^*}{\sin\pi\rho} \leqslant \bar{s}^*(\alpha^*,\beta^*;\rho) \leqslant \frac{\pi\rho\beta^*}{\sin\pi\rho},$$
$$\bar{s}^*(\alpha^*,\beta^*;\rho) \geqslant \rho\beta^*\left[\frac{\pi a_1}{\sin\pi\rho} + a_1^{1-\rho}(1-a_1)A_\rho\right],$$
$$\bar{s}^*(\alpha^*,\beta^*;\rho) \leqslant \rho\beta^*\left[\frac{\pi a_1}{\sin\pi\rho} + a_1^{1-\rho}(1-a_1)\left(B_\rho\ln\frac{e}{a_1} + e\right)\right],$$
где a_1 — меньший корень уравнения
$$a\ln\frac{e}{a} = \frac{\alpha^*}{\beta^*},$$
A_ρ, B_ρ — те же величины, что и в (53).

Завершая изложение основного содержания работы, сделаем два существенных дополнения, касающихся значительной части оригинальных результатов последнего времени, представленных в обзоре.

Как указано в теореме 3.2, экстремальная функция имеет нули с минимальной возможной нижней ρ-плотностью. Это же наблюдение распространяется на теоремы 2.2, 3.1, 4.4, 5.1—5.5, 6.1—6.5. Проведённое в [12, 17, 20] исследование соответствующих экстремальных величин позволяет утверждать, что в каждой из задач о наименьшем ρ-типе *любая* экстремальная целая функция имеет нулевое множество с минимальной допустимой условиями этих теорем нижней (усреднённой) ρ-плотностью. В частности, в задачах с фиксированной верхней (усреднённой) ρ-плотностью последовательность корней экстремальной функции обладает нулевой нижней ρ-плотностью, что влечёт равенство нулю нижнего ρ-типа такой функции. Точно так же в задачах о наибольшем нижнем ρ-типе, решённых теоремами 7.3, 7.4, *всякая* экстремальная целая функция имеет нули с максимальной допустимой верхней (усреднённой) ρ-плотностью.

Другое дополнение состоит в следующем. Теоремы 3.1, 3.2 и 4.4 вместе с оценкой (21) дают точные границы для величины типа целых функций, рассматриваемых в этих теоремах. На самом деле любое число, заключённое в означенных границах, совпадает с типом некоторой целой функции из соответствующего класса. Например, для $\rho \in (0,1)$ диапазоном изменения ρ-типа целых функций с положительными нулями верхней ρ-плотности $\beta > 0$ является отрезок
$$[C(\rho)\beta, \pi\beta\operatorname{cosec}\pi\rho].$$
Если же задана усреднённая верхняя ρ-плотность нулей $\beta^* > 0$, то величины ρ-типов таких целых функций целиком заполняют отрезок
$$[C(\rho)\rho e\beta^*, \pi\rho\beta^*\operatorname{cosec}\pi\rho].$$

При задании значений α и β или α^* и β^* верхней и нижней ρ-плотностей или соответственно усреднённых ρ-плотностей нулей диапазоном изменения ρ-типа служит отрезок

$$[C(k,\rho)\beta, \pi\beta \operatorname{cosec} \pi\rho], \quad k = \frac{\alpha}{\beta},$$

или соответственно отрезок

$$[C^*(k^*,\rho)\beta^*, \pi\rho\beta^* \operatorname{cosec} \pi\rho], \quad k^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

Аналогичное замечание справедливо и в отношении других теорем, где рассмотрены случаи расположения нулей в угле, на лучах и т. д.

8. Заключительные замечания

В цикле фундаментальных работ А. А. Гольдберга [25—28] разработан метод решения задач о нахождении точных оценок типов и индикаторов целых функций при условии, что заданы *границы* изменения обеих плотностей нулевого множества. Полученные А. А. Гольдбергом результаты показывают, что экстремальными функциями в таких задачах являются целые функции вполне регулярного роста, у которых верхняя и нижняя плотности нулей равны и совпадают с одной из границ заданного диапазона. Отличительная особенность постановок задач, обсуждаемых в настоящем обзоре, состоит в том, что фиксируются значения, *а не диапазон изменения* верхней и нижней плотностей распределения нулей целых функций. Это существенное отличие приводит к тому, что экстремальные функции устроены весьма сложно, заведомо не обладая полной регулярностью роста. Исследование экстремальных задач в такой постановке требует развития известных и разработки оригинальных методов. В этой связи сформулируем несколько важных, на наш взгляд, не решённых ещё задач теории целых функций, непосредственно относящихся к рассматриваемому здесь кругу вопросов.

1. Для целых функций f порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями, лежащими в угле раствора, большего π, и имеющими заданные (обычные или усреднённые) плотности, дать точную оценку снизу величины типа $\sigma_\rho(f)$. К этой задаче примыкает упомянутая в разделе 4 гипотеза А. Ю. Попова о справедливости неравенств $\sigma_\rho(f) > \overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f)/(\rho e)$ и $\sigma_\rho(f) > \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f)$ для целой функции f, не имеющей нулей в каком-нибудь угле.
2. Для целых функций f порядка $\rho \in (0,1)$ с отрицательными нулями в терминах (предварительно зафиксированных) плотностей или усреднённых плотностей нулей дать точную оценку снизу индикатора $h_\rho(f,\theta)$ за пределами отрезка $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.
3. Для целых функций f порядка $\rho > 1$ с нулями на луче или в угле дать точную оценку снизу величины типа $\sigma_\rho(f)$ через заданные плотности распределения нулей.

4. Для целых функций f порядка $\rho > 1$ с нулями на луче дать точную оценку сверху величины нижнего типа $\underline{\sigma}_{\rho}(f)$ через заданные плотности распределения нулей.

Остановимся теперь коротко на непосредственных приложениях изложенных результатов. Справедлив универсальный принцип, который в общих чертах выражается следующим образом. Всякое утверждение об оценке типа (нижнего типа, индикатора) целой функции через асимптотические характеристики распределения её нулей может быть переформулировано в виде теоремы единственности: отличная от тождественного нуля целая функция из некоторого класса (заданного ограничениями на рост) не может иметь «слишком много» нулей. Прежде чем привести несколько примеров конкретизации этого принципа, напомним некоторые определения.

Как обычно, говорим, что целая функция $f(z)$ *обращается в нуль на последовательности* Λ комплексных чисел, если для каждого $\lambda \in \Lambda$ выполняется

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \ldots = f^{(n)}(\lambda) = 0, \quad n \geqslant \Lambda(\lambda) - 1,$$

где $\Lambda(\lambda)$ обозначает число вхождений точки λ в Λ. (Функция $f(z)$ может также иметь нули, причём произвольной кратности, в точках, не принадлежащих Λ.) Для положительных чисел ρ, σ через $E_{[\rho,\sigma)}$ обозначим класс целых функций f, имеющих ρ-тип $\sigma_\rho(f) < \sigma$.

Выберем, к примеру, теорему 5.4 и переформулируем её в виде следующей теоремы единственности.

Теорема 8.1. *Пусть* $\sigma > 0$, $\rho \in (0,1)$, $\theta \in [0, \pi/2]$ *и*

$$C_\theta(\rho) = \frac{1}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1)}{a^\rho} -$$

величина из теоремы 5.1. *Если функция* $f \in E_{[\rho,\sigma)}$ *с* $\Lambda_f \subset \Gamma_\theta$ *обращается в нуль на последовательности* Λ, *имеющей усреднённую верхнюю* ρ*-плотность*

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \geqslant \frac{\sigma}{\rho e C_\theta(\rho)}, \tag{54}$$

то $f \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}$. *Утверждение перестаёт быть верным, если правую часть в* (54) *заменить на любую меньшую величину.*

Говорят, что последовательность комплексных чисел Λ является *множеством единственности* для класса $E_{[\rho,\sigma)}$, если всякая функция $f \in E_{[\rho,\sigma)}$, обращающаяся в нуль на Λ, есть тождественный нуль.

Теорему единственности для *всего* класса $E_{[\rho,\sigma)}$, в отличие от предыдущего утверждения, даёт основанное на теореме 5.2 следующее естественное развитие (см. [62]) одного результата Б. Н. Хабибуллина [59, теорема 4].

Теорема 8.2. *Пусть* $\rho \in (0,1)$ *и* Λ — *последовательность комплексных чисел конечной верхней* ρ*-плотности* $\beta > 0$ *и нижней* ρ*-плотности не меньше* $\alpha \in [0, \beta]$, *расположенная в некотором угле раствора* $2\theta \leqslant \pi$. *Если тип при порядке* ρ *целой* *функции f, обращающейся в нуль на Λ, меньше величины*

$$\sigma = \frac{2^\rho\sqrt{\pi}\Gamma(1-\rho/2)}{\Gamma((1-\rho)/2)}\, S_{\Gamma_\theta}(\alpha,\beta;\rho) = \frac{\sin\pi\rho}{\pi}\,\Gamma(\rho)\Gamma^2(1-\rho/2)S_{\Gamma_\theta}(\alpha,\beta;\rho),$$

где $S_{\Gamma_\theta}(\alpha,\beta;\rho)$ выписана в теореме 5.2, то $f\equiv 0$ на $\mathbb{C}$. Другими словами, последовательность Λ является множеством единственности для класса $E_{[\rho,\sigma)}$.

В формулировке теоремы 8.2 фигурирует гамма-функция Эйлера. Доказательство получается прямым соединением теоремы 4 из [59] и теоремы 5.2. Из теорем 8.2, 5.3 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 8.3. *Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность комплексных чисел конечной верхней плотности $\beta > 0$ и нижней плотности $\geqslant \alpha \in [0,\beta]$, такая что $|\arg\lambda_n| \leqslant \theta$, где $\theta \in [0,\pi/4]$. Пусть целая функция F обращается в нуль на множестве $\pm\Lambda$ и её экспоненциальный тип меньше величины*

$$\sigma = \frac{\Gamma^2(3/4)}{\sqrt{\pi}}\, S_{\Gamma_{2\theta}}\left(\alpha,\beta;\frac{1}{2}\right) = 0{,}8472\ldots S_{\Gamma_{2\theta}}\left(\alpha,\beta;\frac{1}{2}\right).$$

Тогда $F\equiv 0$ на $\mathbb{C}$, т. е. последовательность $\pm\Lambda$ является множеством единственности для класса $E_{[1,\sigma)}$.

Раскроем ещё возможности для применения теоремы 8.3 к экспоненциальной аппроксимации в комплексной области. Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность точек из $\mathbb{C}$. Говорят, что система (кратных) экспонент

$$\mathcal{E}_\Lambda := \{z^{n-1}e^{\lambda z}\colon \lambda\in\Lambda,\ n = 1,2,\ldots,\Lambda(\lambda)\},\quad z\in\mathbb{C},$$

полна в круге $K_R = \{z\in\mathbb{C}\colon |z| < R\}$, $R > 0$, если она полна в пространстве $A(K_R)$ функций, аналитических в этом круге, наделённом топологией равномерной сходимости на компактах из K_R. Символ $R(\Lambda)$ обозначает *радиус круга полноты* последовательности Λ, т. е. точную верхнюю грань радиусов кругов K_R, в которых полна система $\mathcal{E}_\Lambda$. Обозначим через $\sigma_{\inf}(\Lambda)$ точную нижнюю грань значений $\sigma > 0$, для которых найдётся целая функция $F\not\equiv 0$ из класса $E_{[1,\sigma)}$, обращающаяся в нуль на Λ. Согласно известному критерию полноты системы $\mathcal{E}_\Lambda$ в пространстве $A(K_R)$ (см., например, [58, § 3.3.1]) справедливо равенство

$$\sigma_{\inf}(\Lambda) = R(\Lambda).$$

При фиксированных $\beta > 0$, $\alpha\in[0,\beta]$, $\theta\in[0,\pi/4]$ введём класс $P_\theta(\alpha,\beta)$, состоящий из всевозможных последовательностей $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ комплексных чисел конечной верхней плотности β и нижней плотности не меньше α, таких что $|\arg\lambda_n|\leqslant\theta$. Положим

$$R_\theta(\alpha,\beta) = \inf_{\Lambda\in P_\theta(\alpha,\beta)} R(\pm\Lambda). \tag{55}$$

Эта величина даёт радиус наибольшего из кругов, в которых полна любая система экспонент, множество показателей которой $\pm\Lambda$ порождено какой-либо последовательностью Λ из класса $P_\theta(\alpha,\beta)$.

Наилучшие из известных к настоящему моменту оценок для $R_\theta(\alpha,\beta)$ удаётся получить, сочетая теорему 8.3 с классическим неравенством (см. [66, § 2.5] и раздел 2 этого обзора)

$$\sigma(F) \geqslant \beta \exp\left\{\frac{\alpha}{\beta} - 1\right\},$$

справедливым для экспоненциального типа любой целой функции F, последовательность нулей которой имеет верхнюю плотность β и нижнюю плотность не меньше α.

Теорема 8.4. *Пусть зафиксированы три числа $\beta > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ и величина $S_{\Gamma_{2\theta}}(\alpha,\beta;1/2)$ взята из теоремы 5.3. Тогда для экстремального радиуса полноты $R_\theta(\alpha,\beta)$, определённого формулой (55), справедлива двусторонняя оценка*

$$\max\left\{\frac{\Gamma^2(3/4)}{\sqrt{\pi}}\, S_{\Gamma_{2\theta}}(\alpha,\beta;1/2);\ 2\beta e^{\alpha/\beta-1}\right\} \leqslant R_\theta(\alpha,\beta) \leqslant S_{\Gamma_{2\theta}}\left(\alpha,\beta;\frac{1}{2}\right).$$

Например, для систем экспонент с измеримыми показателями имеем

$$\beta \max\left\{\Gamma^2(3/4)\sqrt{\pi}\cos\theta;\ 2\right\} \leqslant R_\theta(\beta,\beta) \leqslant \pi\beta\cos\theta,$$

где числовой коэффициент $\Gamma^2(3/4)\sqrt{\pi}$ равен $2{,}6614\ldots$.

В частном случае $\theta = 0$, $\alpha = \beta$ справедлива точная формула

$$R_0(\beta,\beta) = \pi\beta,$$

поскольку (см., например, [59, с. 145])

$$R(\pm\Lambda) = \pi\beta, \quad \Lambda \in P_0(\beta,\beta).$$

Отметим, что теорема 8.4 допускает распространение на функции, инвариантные относительно поворота на угол $2\pi/s$, где $s = 3, 4, \ldots$, в духе [59].

Результаты этого раздела тесно связаны с исследованиями Л. А. Рубела [76], П. Мальявена и Л. А. Рубела [71], Р. М. Редхеффера [74, 75], Б. Н. Хабибуллина [58, 59], А. Ю. Попова [48].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

Литература

[1] Абанин А. В. Определяющие множества для пространства голоморфных в шаре функций полиномиального роста // Уфимск. матем. журн. — 2015. — Т. 7, № 4. — С. 3—14.

[2] Аветисян А. Е. О целых функциях порядка ρ ($1 < \rho < 2$) // Изв. АН Арм. ССР. Математика. — 1988. — Т. 23, № 6. — С. 557—574.

[3] Азарин В. С. О лучах вполне регулярного роста целой функции // Матем. сб. — 1969. — Т. 79 (121), № 4 (8). — С. 463—476.

[4] Азарин В. С. О регулярности роста функционалов на целых функциях // Теория функций, функц. анал. и их прил. — 1972. — Вып. 16. — С. 109—137.

[5] Азарин В. С. Об экстремальных задачах на целых функциях // Теория функций, функц. анал. и их прил. — 1973. — Вып. 18. — С. 18—50.

[6] Андрашко М. И. Екстремальний індикатор цілої функції з додатними нулями порядка меньше одиниці // Доп. АН УРСР. — 1960. — № 7. — С. 869—872.

[7] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965.

[8] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: ГИФМЛ, 1961.

[9] Бибербах Л. Аналитическое продолжение. — М.: Наука, 1967.

[10] Брайчев Г. Г. Индекс лакунарности // Матем. заметки. — 1993. — Т. 53, № 6. — С. 3—10.

[11] Брайчев Г. Г. Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. — М.: Прометей, 2005.

[12] Брайчев Г. Г. Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными корнями заданных усреднённых плотностей // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 7. — С. 31—56.

[13] Брайчев Г. Г. Точные оценки типов целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями на луче // Уфимск. матем. журн. — 2012. — Т. 7, № 4. — С. 34—60.

[14] Брайчев Г. Г. Точные соотношения между некоторыми характеристиками роста последовательностей // Уфимск. матем. журн. — 2013. — Т. 5, № 4. — С. 17—30.

[15] Брайчев Г. Г. Точные границы величины нижнего типа целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями заданных усреднённых плотностей // Уфимск. матем. журн. — 2015. — Т. 7, № 4. — С. 34—60.

[16] Брайчев Г. Г. Точные оценки типов целых функций с нулями на лучах // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, № 4. — С. 503—515.

[17] Брайчев Г. Г. Наименьший тип целой функции с корнями заданных усреднённых плотностей, расположенными на лучах или в угле // Матем. сб. — 2016. — Т. 207, № 2. — С. 45—80.

[18] Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. Связь типов целой функции конечного порядка с плотностями её нулей // Сб. трудов XIV Междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование». — Абрау-Дюрсо, 2006. — С. 52—55.

[19] Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. Точные соотношения между плотностями нулей целых функций конечного порядка // Матем. студ. — 2008. — Т. 30, № 2. — С. 183—188.

[20] Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. матем. — 2011. — Т. 75, № 1. — С. 3—28.

[21] Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями // Матем. заметки. — 2012. — Т. 91, № 5. — С. 674—690.

[22] Брайчев Г. Г., Шерстюкова О. В. Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями фиксированных ρ-плотностей // Матем. заметки. — 2011. — Т. 90, № 2. — С. 199—215.

[23] Братищев А. В. Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1984. — Т. 48, № 3. — С. 451—475.

[24] Говоров Н. В. Екстремальний індикатор цілої функції з додатними нулями заданої верхньої та нижньої густини // Доп. АН УРСР. — 1966. — № 2. — С. 148—150.

[25] Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. I // Матем. сб. — 1962. — Т. 58 (100), № 3. — С. 289—334.

[26] Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. II // Матем. сб. — 1963. — Т. 61 (103), № 3. — С. 334—349.

[27] Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. III // Матем. сб. — 1964. — Т. 65 (107), № 3. — С. 414—453.

[28] Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. IV // Матем. сб. — 1965. — Т. 66 (108), № 3. — С. 411—457.

[29] Гольдберг А. А., Ерёменко А. Э., Островский И. В. О сумме целых функций вполне регулярного роста // Изв. АН АрмССР. — 1983. — Т. 18, № 1. — С. 3—15.

[30] Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В. Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 1991. — Т. 85. — (Комплексный анализ. Одна переменная-1). — С. 5—185.

[31] Гольдберг А. А., Островский И. В. Индикаторы целых функций конечного порядка, представимых рядом Дирихле // Алгебра и анализ. — 1990. — Т. 2, вып. 3. — С. 144—170.

[32] Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями // Литовск. матем. сб. — 1967. — Т. 7, № 1. — С. 79—117.

[33] Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями, II // Литовск. матем. сб. — 1968. — Т. 8, № 1. — С. 65—85.

[34] Кондратюк А. А. Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями // Сиб. матем. журн. — 1970. — Т. 11, № 5. — С. 1084—1092.

[35] Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. — Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1988.

[36] Коробейник Ю. Ф. О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов линейных операторных уравнений. — Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2005.

[37] Красичков И. Ф. Оценки снизу для целых функций конечного порядка // Сиб. матем. журн. — 1965. — Т. 6, № 4. — С. 840—861.

[38] Кривошеев А. С. Регулярность роста системы функций и системы неоднородных уравнений свёртки в выпуклых областях комплексной плоскости // Изв. РАН. Сер. матем. — 2000. — Т. 64, № 5. — С. 69—132.

[39] Кривошеев А. С. Критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексной плоскости // Изв. РАН. Сер. матем. — 2004. — Т. 68, № 1. — С. 43—78.

[40] Кривошеев А. С., Ганцев С. Н. О порождающих в идеалах целых функций конечного порядка и типа в плоскости // Сиб. матем. журн. — 2002. — Т. 43, № 5. — С. 1046—1063.

[41] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.

[42] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.

[43] Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1983.

[44] Мандельбройт С. Ряды Дирихле. Принципы и методы. — М.: Мир, 1973.

[45] Маркушевич А. И. Избранные главы теории аналитических функций. — М.: Наука, 1976.

[46] Мышаков Ф. С. Аналог теоремы Валирона—Гольдберга при ограничении на усреднённую считающую функцию множества корней // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96, № 5. — С. 794—798.

[47] Мышаков Ф. С., Попов А. Ю. Уточнение теоремы Гольдберга об оценке типа при уточненном порядке целой функции целого порядка // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 12. — С. 119—144.

[48] Попов А. Ю. О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1999. — № 5. — С. 48—52.

[49] Попов А. Ю. Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2005. — № 1. — С. 31—36.

[50] Попов А. Ю. Экстремальные задачи в теории целых функций: Дисс.. . . докт. физ.-матем. наук. — М.: МГУ, 2005.

[51] Попов А. Ю. О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ-плотности, лежащими на одном луче // Матем. заметки — 2009. — Т. 85, № 2. — С. 246—260.

[52] Попов А. Ю. Асимптотические оценки модуля целой функции нецелого порядка через мажоранту считающей функции её корней // Докл. РАН. — 2011. — Т. 437, № 3. — С. 309—312.

[53] Попов А. Ю. Наибольший возможный рост максимума модуля канонического произведения нецелого порядка с заданной мажорантой считающей функции корней // Матем. сб. — 2013. — Т. 204, № 5. — С. 67—108.

[54] Попов А. Ю. Развитие теоремы Валирона—Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью корней // СМФН. — 2013. — Т. 49. — С. 132—164.

[55] Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. — М.: Физматлит, 2005.

[56] Хабибуллин Б. Н. О типе целых и мероморфных функций // Матем. сб. — 1992. — Т. 183, № 11. — С. 35—44.

[57] Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа с нулями вблизи прямой // Матем. заметки. — 2001. — Т. 70, № 4. — С. 621—635.

[58] Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2006.

[59] Хабибуллин Б. Н. Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции // Матем. сб. — 2009. — Т. 200, № 2. — С. 129—158.

[60] Шерстюкова О. В. Об экстремальном типе целой функции порядка меньше единицы с нулями фиксированных плотностей и шага // Уфимск. матем. журн. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 161—165.

[61] Шерстюков В. Б. Минимальное значение типа целой функции порядка меньше единицы с нулями заданных плотностей, лежащими в угле // Материалы 17-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2014. — С. 309—310.

[62] Шерстюков В. Б. Минимальное значение типа целой функции порядка $\rho \in (0,1)$, все нули которой лежат в угле и имеют заданные плотности // Уфимск. матем. журн. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 113—126.

[63] Шерстюкова О. В. Задача о наименьшем типе целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными нулями заданных плотностей и шага // Уфимск. матем. журн. — 2015. — Т. 7, № 4. — С. 146—154.

[64] Шерстюкова О. В. О наименьшем типе целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями на луче // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, вып. 4. — С. 433—441.

[65] Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular variation. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. — (Encycl. Math. Its Appl.; Vol. 27).

[66] Boas R. P. Entire functions. — New York: Academic Press, 1954.

[67] Denjoy A. Sur les produits canoniques d'ordre infini // J. Math. Pures Appl. 6e ser. — 1910. — Vol. 6. — P. 1—136.

[68] Eremenko A., Yuditskii P. An extremal problem for a class of entire functions of exponential type. — arXiv:0807.2054V1[math.CV] — 2008.

[69] Horovitz C., Korenblum B., Pinchuk B. Sampling sequences for $A^{-\infty}$ // Michigan Math. J. — 1997. — Vol. 44, no. 2. — P. 389—398.

[70] Levin B. Ya. Lectures on Entire Functions. — Providence: Amer. Math. Soc., 1996. — (Transl. Math. Monographs; Vol. 150).

[71] Malliavin P., Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France. — 1961. — Vol. 89. — P. 175—206.

[72] Pfluger A. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen. I // Comment. Math. Helv. — 1938. — Vol. 11. — P. 180—213.

[73] Pfluger A. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen. II // Comment. Math. Helv. — 1939. — Vol. 12. — P. 25—69.

[74] Redheffer R. M. On even entire functions with zeros having a density // Trans. Amer. Math. Soc. — 1954. — Vol. 77. — P. 32—61.

[75] Redheffer R. M. Completeness of sets of complex exponentials // Adv. Math. — 1977. — Vol. 24, no. 1. — P. 1—62.

[76] Rubel L. A. Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — Vol. 83, no. 2. — P. 417—429.

[77] Valiron G. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulièr // Ann. Fac. Sci. Toulouse. — 1913. — Vol. 5. — P. 117—257.