Критерий существования 1-липшицевой выборки из метрической проекции на множество из непрерывных выборок из многозначного отображения*

А. А. ВАСИЛЬЕВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru

УДК 515.126.83

Ключевые слова: липшицева выборка из метрической проекции, многозначное отображение, метрическая проекция.

Аннотация

Пусть S_F — множество непрерывных ограниченных выборок из многозначного отображения $F\colon T \to 2^H$ с непустыми выпуклыми замкнутыми значениями, где T — паракомпактное хаусдорфово топологическое пространство, H — гильбертово пространство. В работе получен критерий существования липшицевой с константой 1 выборки из метрической проекции на множество S_F в $C(T, H)$.

Abstract

A. A. Vasil'eva, Criterion for the existence of a 1*-Lipschitz selection from the metric projection onto the set of continuous selections from a multivalued mapping*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 1, pp. 99—110.

Let S_F be the set of continuous bounded selections from the set-valued mapping $F\colon T \to 2^H$ with nonempty convex closed values; here T is a paracompact Hausdorff topological space, and H is a Hilbert space. In this paper, we obtain a criterion for the existence of a 1-Lipschitz selection from the metric projection onto the set S_F in $C(T, H)$.

1. Введение

Пусть T — паракомпактное хаусдорфово топологическое пространство (в некоторых источниках (например, в [12]) условие хаусдорфовости входит в определение паракомпактного пространства), H — гильбертово пространство. Через $C(T, H)$ обозначим пространство непрерывных ограниченных функций $f\colon T \to H$ с нормой

$$\|f\|_{C(T,H)} = \sup_{t\in T} \|f(t)\|_H.$$

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 16-01-00295).

Фундаментальная и прикладная математика, 2018, том 22, № 1, с. 99—110.

Пусть отображение $F\colon T \to 2^H$ таково, что для любой $t \in T$ множество $F(t)$ непусто, выпукло и замкнуто. Также предполагаем, что F полунепрерывно снизу, т. е. для любого открытого множества $V \subset H$ множество $\{t \in T\colon F(t) \cap V \neq \varnothing\}$ открыто. Обозначим

$$S_F = \{f \in C(T, H)\colon f(t) \in F(t) \text{ для любой } t \in T\},$$

т. е. S_F — множество непрерывных ограниченных выборок (селекций) из многозначного отображения F. По теореме Майкла [11] существует непрерывная выборка из отображения F. Поэтому если пространство T компактно, то множество S_F непусто. В [5, теорема 2] было показано, что если T — компакт, то совокупность всех множеств вида S_F (где F такое, как выше) совпадает с совокупностью всех непустых замкнутых промежутков в $C(T, H)$.

Замечание 1. Если отображение F не является полунепрерывным снизу, а множество S_F непусто, то найдётся полунепрерывное снизу отображение $\tilde{F}\colon T \to 2^H$, такое что для любой $t \in T$ множество $\tilde{F}(t)$ непусто, выпукло и замкнуто, при этом $S_F = S_{\tilde{F}}$ (см. [5, утверждение 1]; при доказательстве компактность T можно заменить на паракомпактность).

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, $M \subset X$, $x \in X$. Обозначим

$$\operatorname{dist}(x, M) = \inf\{\|x - y\|\colon y \in M\}, \quad P_M(x) = \{z \in M\colon \|x - z\| = \operatorname{dist}(x, M)\}.$$

Отображение $x \mapsto P_M(x)$ называется метрической проекцией на M. Если для любой $x \in X$ множество $P_M(x)$ непусто, то M называется множеством существования. Если для любой $x \in X$ множество $P_M(x)$ одноточечно, то множество M называется чебышёвским. В этом случае через $p_M(x)$ будем обозначать ближайшую к x точку из M.

Пусть $M \subset X$ — множество существования. Отображение $s_M\colon X \to M$ назовём выборкой из метрической проекции, если $s_M(x) \in P_M(x)$ для любой $x \in X$.

В [9] было показано, что если T — хаусдорфов компакт, $H = \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in C(T, \mathbb{R})$, $f_1(t) \leqslant f_2(t)$ для любой $t \in T$, $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$, то существует липшицева с константой 1 выборка из метрической проекции на S_F. В [5] было показано, что если T — хаусдорфов компакт и H — гильбертово пространство, то S_F является множеством существования (в доказательстве компактность не использовалась, вместо компакта можно взять и паракомпактное хаусдорфово топологическое пространство); если при этом отображение F непрерывно относительно хаусдорфовой метрики, то существует липшицева с константой 1 выборка из метрической проекции на S_F (здесь использовались результаты Дж. Даниэля [10], В. И. Бердышева [3, 4] и А. В. Маринова [8] о равномерной непрерывности метрической проекции). Остался открытым вопрос о характеризации отображений F, для которых существует липшицева с константой 1 выборка из метрической проекции на S_F.

2. Основной результат

Хорошо известно, что в гильбертовом пространстве метрическая проекция на непустые выпуклые замкнутые множества обладает следующими свойствами (см., например, [1, с. 4; 6, предложение 2.6 и следствие 3.1]).

1. Любое выпуклое замкнутое множество $M \subset H$ является чебышёвским.
2. Отображение $x \mapsto p_M(x)$ липшицево с константой 1.
3. Любое выпуклое замкнутое множество $M \subset H$ является солнцем, т. е. для любой $x \notin M$ и любого $\lambda \geqslant 0$ выполнено $p_M\big((1-\lambda)p_M(x) + \lambda x\big) = p_M(x)$.

Пусть $f \in C(T, H)$, $F\colon T \to 2^H$, для любой $t \in T$ множество $F(t)$ непусто, выпукло и замкнуто. Обозначим

$$p_f(t) = p_{F(t)}\big(f(t)\big).$$

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. *Пусть $F\colon T \to 2^H$ — полунепрерывное снизу отображение с непустыми выпуклыми замкнутыми значениями, и пусть множество S_F непусто. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *существует выборка из метрического проектора на S_F, удовлетворяющая условию Липшица с константой* 1;
2) *для любой функции $f \in C(T, H)$ отображение $t \mapsto p_f(t)$ непрерывно*;
3) *для любой $x \in H$ отображение $t \mapsto p_{F(t)}(x)$ непрерывно.*

Замечание 2. Если для любой функции $f \in C(T, H)$ отображение $t \mapsto p_f(t)$ непрерывно, то отображение F полунепрерывно снизу.

Так как пространство T паракомпактно, то оно нормально [7, с. 216]. Значит, выполняется утверждение леммы Урысона о продолжении.

Предложение 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любых $t \in T$, $x \in F(t)$ существует функция $f_{t,x} \in S_F$, такая что $f_{t,x}(t) = x$.*

Доказательство. Положим

$$F_{t,x}(s) = \begin{cases} F(s), & s \in T \setminus \{t\}, \\ \{x\}, & s = t. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что такое отображение полунепрерывно снизу. По теореме Майкла [11] существует непрерывная выборка $\tilde{f}_{t,x}$ из отображения $F_{t,x}$. Существует окрестность U точки t, в которой функция $\tilde{f}_{t,x}$ ограничена. По лемме Урысона о продолжении существует непрерывная функция $\lambda\colon T \to [0, 1]$, такая что $\lambda(t) = 1$, $\lambda|_{T\setminus U} \equiv 0$. Пусть $g_0 \in S_F$. Функция

$$f_{t,x}(s) = \lambda(s)\tilde{f}_{t,x}(s) + \big(1 - \lambda(s)\big)g_0(s)$$

является искомой. □

Всюду далее через $B_R(x)$ ($\mathring{B}_R(x)$) обозначим замкнутый (соответственно открытый) шар радиуса R с центром в точке x.

Доказательство теоремы 1. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть существуют функция $f\in C(T,H)$ и точка $t_0\in T$, такие что функция $t\mapsto p_f(t)$ разрывна в точке t_0. Докажем, что $f(t_0)\ne p_f(t_0)$. Предположим обратное и покажем, что в этом случае функция p_f непрерывна в точке t_0. Если $f(t_0)=p_f(t_0)$, то

$$\|p_f(t_0)-p_f(t)\|_H\leqslant \|f(t_0)-f(t)\|_H+\|f(t)-p_f(t)\|_H.$$

В силу полунепрерывности снизу отображения F для любого $\varepsilon>0$ существует окрестность W точки t_0, такая что для любой $t\in W$ множество $F(t)\cap \mathring{B}_\varepsilon\bigl(f(t_0)\bigr)$ непусто. Выберем точку $\tilde p(t)\in F(t)\cap \mathring{B}_\varepsilon\bigl(f(t_0)\bigr)$. Тогда

$$\|f(t)-p_f(t)\|_H\leqslant \|f(t)-\tilde p(t)\|_H\leqslant \|f(t)-f(t_0)\|_H+\varepsilon,$$

т. е.

$$\|p_f(t_0)-p_f(t)\|_H\leqslant 2\|f(t_0)-f(t)\|_H+\varepsilon$$

для любой $t\in W$. Остаётся воспользоваться непрерывностью функции f.

По предложению 1 существует функция $g\in S_F$, такая что $g(t_0)=p_f(t_0)$. Из разрывности p_f в точке t_0 следует, что существует $\varepsilon_0>0$, такое что для любой окрестности $O(t_0)$ существует точка $t\in O(t_0)$, такая что $\|p_f(t)-g(t)\|_H>\varepsilon_0$.

Пусть $\gamma(t)\in[0,\pi]$ — угол между векторами $f(t)-g(t)$ и $p_f(t)-g(t)$ (если один из векторов нулевой, то полагаем $\gamma(t)=0$). Так как функции f, g ограничены и $\|f(t)-p_f(t)\|_H\leqslant\|f(t)-g(t)\|_H$ для любых $t\in T$, то существуют окрестность V точки t_0 и число $\alpha_0\in[0,\pi/2)$, такие что

$$\text{если } \|p_f(t)-g(t)\|_H>\varepsilon_0 \text{ для любой } t\in V, \text{ то } 0\leqslant\gamma(t)\leqslant\alpha_0. \tag{1}$$

Возможны два случая:

1) существует окрестность $U_0(t_0)$ со следующим свойством: для любой $t\in U_0(t_0)$, такой что $\|p_f(t)-g(t)\|_H>\varepsilon_0$, выполнено $\gamma(t)\geqslant\pi/4$;
2) для любой окрестности $U(t_0)$ существует $t\in U(t_0)$, такая что $\gamma(t)<\pi/4$ и $\|p_f(t)-g(t)\|_H>\varepsilon_0$.

Во втором случае положим $U_0(t_0)=T$.

Определим функцию h равенством

$$h(t)=g(t)+\varepsilon_0c_0\bigl(f(t)-g(t)\bigr)\min\left\{\frac{1}{\|f(t_0)-g(t_0)\|_H},\,\frac{1}{\|f(t)-g(t)\|_H}\right\}, \tag{2}$$

где

$$c_0=\begin{cases}\cos\alpha_0 & \text{в случае 1},\\ 1/2 & \text{в случае 2}.\end{cases} \tag{3}$$

Напомним, что $f(t_0)\ne g(t_0)$. Поэтому функция h непрерывна. Так как

$$h(t_0)-p_f(t_0)=h(t_0)-g(t_0)=\varepsilon_0c_0\frac{f(t_0)-p_f(t_0)}{\|f(t_0)-p_f(t_0)\|_H}$$

и множество $F(t_0)$ является солнцем, то

$$p_h(t_0) = p_f(t_0) = g(t_0). \tag{4}$$

Так как для любой $t \in T$

$$\|h(t) - g(t)\|_H = c_0\varepsilon_0 \min\left\{1, \frac{\|f(t) - g(t)\|_H}{\|f(t_0) - g(t_0)\|_H}\right\}, \tag{5}$$

то

$$\|h(t_0) - g(t_0)\|_H = c_0\varepsilon_0, \quad \|h - g\|_{C(T,H)} = c_0\varepsilon_0. \tag{6}$$

Пусть $\tilde{h} \in P_{S_F}(h)$. По (6) $\|h - \tilde{h}\|_{C(T,H)} \leqslant c_0\varepsilon_0$; в частности,

$$\|h(t_0) - \tilde{h}(t_0)\|_H \leqslant c_0\varepsilon_0. \tag{7}$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{h}(t_0) = p_f(t_0) = g(t_0). \tag{8}$$

В самом деле, так как множество $F(t_0)$ чебышёвское, в противном случае выполнялись бы соотношения

$$\|h(t_0) - \tilde{h}(t_0)\|_H > \|h(t_0) - p_h(t_0)\|_H \overset{(4),\,(6)}{=} c_0\varepsilon_0 \text{ —}$$

противоречие с (7).

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем окрестность

$$O(t_0) \subset V \cap U_0(t_0) \tag{9}$$

так, что для любой $t \in O(t_0)$

$$\begin{gathered} \|g(t) - g(t_0)\|_H < \varepsilon, \quad \|\tilde{h}(t) - \tilde{h}(t_0)\|_H < \varepsilon, \\ |\|h(t) - g(t)\|_H - \|h(t_0) - g(t_0)\|_H| < \varepsilon, \quad f(t) \neq g(t). \end{gathered} \tag{10}$$

Определим точку $t_1 \in O(t_0)$ следующим образом. В случае 1 (см. с. 102) точку $t_1 \in O(t_0)$ выбираем произвольно так, чтобы $\|g(t_1) - p_f(t_1)\|_H > \varepsilon_0$. В случае 2 существует $t_* \in O(t_0)$, такая что $\|g(t_*) - p_f(t_*)\|_H > \varepsilon_0$ и $\gamma(t_*) < \pi/4$. Тогда полагаем $t_1 = t_*$.

Так как

$$t_1 \in O(t_0) \overset{(9)}{\subset} V,$$

то

$$0 \leqslant \gamma(t_1) \overset{(1)}{\leqslant} \alpha_0. \tag{11}$$

Из предложения 1 и выпуклости множества $F(t_1)$ следует, что существует функция $\varphi \in S_F$, такая что $\varphi(t_1) \in [g(t_1), p_f(t_1)]$ и

$$\|\varphi(t_1) - g(t_1)\|_H = \varepsilon_0. \tag{12}$$

В силу (5) и последнего соотношения (10) $h(t) - g(t) \neq 0$ при $t \in O(t_0)$. Обозначим через $\beta(t)$ угол между векторами $h(t) - g(t)$ и $\varphi(t) - g(t)$. Из (2) и определения функции φ следует, что $\beta(t_1) = \gamma(t_1)$.

Пусть $U(t_1) \subset O(t_0)$ — окрестность точки t_1, такая что

$$||\|\varphi(t) - g(t)\|_H - \varepsilon_0| < \varepsilon, \quad |\cos\beta(t) - \cos\gamma(t_1)| < \varepsilon, \quad t \in U(t_1). \tag{13}$$

По лемме Урысона о продолжении, существует функция $\lambda \in C(T, [0,1])$, такая что

$$\lambda(t_1) = 0, \quad \lambda|_{T\setminus U(t_1)} \equiv 1. \tag{14}$$

Положим

$$\psi(t) = \lambda(t)g(t) + \bigl(1 - \lambda(t)\bigr)\varphi(t). \tag{15}$$

Тогда $\psi \in S_F$.

Оценим сверху величину $\|h(t) - \psi(t)\|_H$. Пусть $t \in T \setminus U(t_1)$. Тогда

$$\|h(t) - \psi(t)\|_H \overset{(14)}{=} \|h(t) - g(t)\|_H \overset{(3),\ (5)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_0. \tag{16}$$

Пусть $t \in U(t_1)$. Тогда

$$\|h(t) - \psi(t)\|_H \leqslant \lambda(t)\|h(t) - g(t)\|_H + \bigl(1 - \lambda(t)\bigr)\|h(t) - \varphi(t)\|_H \overset{(3),\ (5)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \lambda(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_0 + \bigl(1 - \lambda(t)\bigr)\|h(t) - \varphi(t)\|_H.$$

Для каждого $t \in U(t_1)$ имеем при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\|h(t) - \varphi(t)\|_H^2 = \|\varphi(t) - g(t)\|_H^2 + \|h(t) - g(t)\|_H^2 -$$
$$- 2\|h(t) - g(t)\|_H\|g(t) - \varphi(t)\|_H \cos\beta(t) \overset{(11),\ (13)}{\leqslant}$$
$$\leqslant (\varepsilon_0 + \varepsilon)^2 + \|h(t) - g(t)\|_H^2 - 2\|h(t) - g(t)\|_H(\varepsilon_0 - \varepsilon)(\cos\gamma(t_1) - \varepsilon).$$

Напомним, что $\|g(t_1) - p_f(t_1)\|_H > \varepsilon_0$.

В случае 1 (см. с. 102 и определение точки t_1) выполнено $\gamma(t_1) \geqslant \pi/4$. Значит, согласно (3), (5), (6), (10)

$$\|h(t) - \varphi(t)\|_H^2 \leqslant (\varepsilon_0 + \varepsilon)^2 + \varepsilon_0^2\cos^2\alpha_0 - 2(\varepsilon_0\cos\alpha_0 - \varepsilon)(\varepsilon_0 - \varepsilon)(\cos\gamma(t_1) - \varepsilon) =$$
$$= \varepsilon_0^2\bigl(1 + \cos^2\alpha_0 - 2\cos\alpha_0\cos\gamma(t_1)\bigr) + o(1) \quad (\varepsilon \to 0) \overset{(11)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \varepsilon_0^2(1 + \cos^2\alpha_0 - 2\cos^2\alpha_0) + o(1) \quad (\varepsilon \to 0) = \varepsilon_0^2\sin^2\alpha_0 + o(1) \quad (\varepsilon \to 0).$$

В случае 2 имеем $\gamma(t_1) < \pi/4$. Поэтому согласно (3), (5), (6), (10) получаем

$$\|h(t) - \varphi(t)\|_H^2 \leqslant \varepsilon_0^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon_0\varepsilon + \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\varepsilon_0}{2} - \varepsilon\right)(\varepsilon_0 - \varepsilon)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\right) =$$
$$= \varepsilon_0^2\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + o(1) \quad (\varepsilon \to 0).$$

Таким образом, существует $\mu \in (0,1)$, такое что $\|h(t) - \varphi(t)\|_H \leqslant \mu\varepsilon_0 + o(1)$ $(\varepsilon \to 0)$. Значит, для любой $t \in U(t_1)$

$$\|h(t) - \psi(t)\|_H \leqslant \lambda(t)\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} + \bigl(1 - \lambda(t)\bigr)\bigl(\mu\varepsilon_0 + o(1)\bigr) \leqslant \varepsilon_0\max\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \mu + o(1)\right\}.$$

Отсюда и из (16) получаем, что

$$\|h-\psi\|_{C(T,H)} \leqslant \varepsilon_0 \max\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \mu + o(1)\right\};$$

т. е. при достаточно малых ε

$$\|h-\psi\|_{C(T,H)} \leqslant c\varepsilon_0, \tag{17}$$

где $c \in (0,1)$.

С другой стороны, так как $t_1 \in O(t_0)$, то

$$\begin{aligned}&\|\psi(t_1)-\tilde h(t_1)\|_H \geqslant \\ &\geqslant \|\psi(t_1)-g(t_1)\|_H - \|g(t_1)-g(t_0)\|_H - \|g(t_0)-\tilde h(t_1)\|_H \overset{\substack{(8),\ (10),\ (12),\\ (14),\ (15)}}{\geqslant} \varepsilon_0 - 2\varepsilon > c\varepsilon_0\end{aligned}$$

при достаточно малых ε. Поэтому

$$\|h-\psi\|_{C(T,H)} \overset{(17)}{<} \|\tilde h-\psi\|_{C(T,H)}.$$

Так как $\psi \in S_F$, то $P_{S_F}(\psi) = \{\psi\}$. Значит, липшицевой с константой 1 выборки из метрического проектора не существует.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Каждой функции $f \in C(T,H)$ поставим в соответствие функцию $p_f \in S_F$. Так как в гильбертовом пространстве метрическая проекция на выпуклое замкнутое множество удовлетворяет условию Липшица с константой 1, то для любых $f, g \in C(T,H)$ выполнена оценка $\|p_f - p_g\|_{C(T,H)} \leqslant \|f-g\|_{C(T,H)}$.

Докажем эквивалентность 2) $\Longleftrightarrow$ 3). Достаточно проверить, что из условия 3) следует условие 2). Пусть функция $f \in C(T,H)$ такова, что $p_f(\cdot)$ разрывна в точке $t_0 \in T$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что для любой окрестности W точки t_0 существует $t \in W$, такая что $\|p_f(t) - p_f(t_0)\|_H > \varepsilon_0$. Так как метрическая проекция на выпуклое замкнутое множество в H липшицева с константой 1, то

$$\|p_{F(t)}\big(f(t_0)\big) - p_f(t)\|_H \leqslant \|f(t_0)-f(t)\|_H.$$

Значит,

$$\begin{aligned}&\big\|p_{F(t)}\big(f(t_0)\big) - p_{F(t_0)}\big(f(t_0)\big)\big\|_H \geqslant \\ &\qquad\geqslant \|p_f(t)-p_f(t_0)\|_H - \|f(t)-f(t_0)\|_H > \varepsilon_0 - \|f(t)-f(t_0)\|_H.\end{aligned}$$

Отсюда и из непрерывности функции f следует, что в любой окрестности точки t_0 найдётся точка t, такая что

$$\big\|p_{F(t)}\big(f(t_0)\big) - p_{F(t_0)}\big(f(t_0)\big)\big\|_H \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2};$$

т. е. отображение $t \mapsto p_{F(t)}\big(f(t_0)\big)$ разрывно в точке t_0. Теорема доказана. $\square$

3. Непрерывность функции p_f и свойства отображения F

Пусть X — банахово пространство, T — топологическое пространство,

$$F\colon T \to 2^X \text{ —}$$

полунепрерывное снизу отображение. Предположим, что для любой $t \in T$ множество $F(t)$ является чебышёвским (в частности, оно непусто и замкнуто). Тогда для любой функции $f \in C(T, X)$ однозначно определена функция p_f так, что $P_{F(t)}\big(f(t)\big) = \{p_f(t)\}$.

Для любых $x \in X$, $R > 0$ через $B_R(x)$ ($\mathring{B}_R(x)$) обозначим замкнутый (соответственно открытый) шар радиуса R с центром в точке x.

Пусть $M_1, M_2 \subset X$ — непустые замкнутые множества. Положим

$$E(M_1, M_2) = \sup_{x\in M_1} \inf_{y\in M_2} \|x - y\|_X, \quad h(M_1, M_2) = \max\{E(M_1, M_2), E(M_2, M_1)\}.$$

Величина $h(M_1, M_2)$ называется хаусдорфовым расстоянием между множествами M_1 и M_2.

Банахово пространство X называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для любых x_1, x_2, таких что $\|x_1\|_X = 1$, $\|x_2\|_X = 1$, $\|(x_1 + x_2)/2\|_X > 1 - \delta$, следует, что $\|x_1 - x_2\|_X < \varepsilon$.

Хорошо известно, что в равномерно выпуклом банаховом пространстве любое выпуклое замкнутое множество является чебышёвским (см., например, [6, предложение 2.6]).

Следующие утверждения доказаны В. И. Бердышевым [2, 3].

Теорема 1 [3, следствие 3]. *Пусть X — банахово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *отображение $M \mapsto P_M(0)$ равномерно непрерывно относительно хаусдорфовой метрики на классе выпуклых замкнутых множеств, таких что* $\inf\limits_{v\in M} \|v\| \leqslant 1$;
2) *пространство X равномерно выпукло.*

Теорема 2 [2, теорема 4]. *Пусть X — равномерно выпуклое пространство. Для непустого выпуклого замкнутого множества $M \subset X$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ обозначим*

$$\omega(t, M) = \sup\{\|p_M(x) - p_M(y)\|_X \colon \|x - y\|_X \leqslant t,\ \operatorname{dist}(y, M) \leqslant 1\}.$$

Пусть $\mathcal{M}$ — совокупность всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств в X, $\omega(t) = \sup\limits_{M\in\mathcal{M}} \omega(t, M)$. Тогда $\omega(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$.

Отсюда или из результата А. В. Маринова [8, теорема 2] легко выводится следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть X — равномерно выпуклое пространство, отображение $F\colon T \to 2^X$ полунепрерывно снизу и для любой $t \in T$ множество $F(t)$*

непусто, выпукло и замкнуто. Предположим, что для любых $t \in T$, $x \in F(t)$, $R > 0$ *отображение* $s \mapsto F(s) \cap B_R(x)$ *непрерывно относительно хаусдорфовой метрики в точке* t. *Тогда для любой функции* $f \in C(T, X)$ *функция* p_f *непрерывна.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in T$. Тогда существует окрестность U точки t_0, в которой функция f ограничена. В силу полунепрерывности снизу отображения F существует окрестность $V \subset U$ точки t_0, такая что $F(t) \cap B_1\big(p_f(t_0)\big) \neq \varnothing$ для любой $t \in V$. Отсюда следует, что функция p_f ограничена в V, и поэтому существует $R > 0$, такое что

$$p_f(t) \in F(t) \cap B_R\big(p_f(t_0)\big) =: F_R(t)$$

для любой $t \in V$. Тогда $p_f(t)$ является метрической проекцией точки $f(t)$ на множество $F(t) \cap B_R\big(p_f(t_0)\big)$. Значит,

$$\begin{aligned}\|p_f(t) - p_f(t_0)\|_X = \big\|p_{F_R(t)}\big(f(t)\big) - p_{F_R(t_0)}\big(f(t_0)\big)\big\|_X \leqslant \\ \leqslant \big\|p_{F_R(t)}\big(f(t)\big) - p_{F_R(t)}\big(f(t_0)\big)\big\|_X + \\ + \big\|p_{F_R(t)}\big(f(t_0)\big) - p_{F_R(t_0)}\big(f(t_0)\big)\big\|_X \to 0, \quad t \to t_0,\end{aligned}$$

по теоремам 1 и 2. □

Предложение 3. *Пусть* X *— банахово пространство,* $F\colon T \to 2^X$ *— полунепрерывное снизу отображение со следующими свойствами*:

1) *для любой* $t \in T$ *множество* $F(t)$ *чебышёвское*;
2) *для любых* $R > 0$, $t_0 \in T$, $x_0 \in F(t_0)$, $x \in B_R(x_0) \cap F(t_0)$, $\varepsilon > 0$ *существует окрестность* U *точки* t_0, *такая что*

$$F(t) \cap B_R(x_0) \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \neq \varnothing$$

для любой $t \in U$;

3) *для любой* $t \in T$ *существует окрестность* $V_{(t)}$ *точки* t, *такая что для любого замкнутого шара* $B \subset X$ *множество* $B \cap \Big(\bigcup\limits_{s \in V_{(t)}} F(s)\Big)$ *предкомпактно.*

Пусть для любой функции $f \in C(T, X)$ *функция*

$$t \mapsto p_f(t) := p_{F(t)}\big(f(t)\big)$$

непрерывна. Тогда для любых $t \in T$, $x \in F(t)$, $R > 0$ *отображение* $s \mapsto F(s) \cap B_R(x)$ *непрерывно в точке* t *относительно хаусдорфовой метрики.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in T$, $x_0 \in F(t_0)$, $R > 0$ и отображение $t \mapsto F(t) \cap B_R(x_0)$ разрывно в точке t_0, т. е.

$$h\big(F(t_0) \cap B_R(x_0), F(t) \cap B_R(x_0)\big) \not\to 0, \quad t \to t_0. \tag{18}$$

Покажем, что

$$E\big(F(t_0) \cap B_R(x_0), F(t) \cap B_R(x_0)\big) \to 0, \quad t \to t_0. \tag{19}$$

В самом деле, из свойства 2) следует, что для любых $x \in F(t_0) \cap B_R(x_0)$, $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U_{x,\varepsilon}$ точки t_0, такая что для любой $t \in U_{x,\varepsilon}$ выполнено $F(t) \cap B_R(x_0) \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \neq \varnothing$. Из свойства 3) отображения F и замкнутости $F(t)$ следует, что множество $F(t_0) \cap B_R(x_0)$ компактно. Значит, $F(t_0) \cap B_R(x_0) \subset$ $\subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} \mathring{B}_\varepsilon(x_j)$ для некоторого конечного подмножества $\{x_j\}_{j=1}^k \subset F(t_0) \cap B_R(x_0)$. Положим $U = \bigcap\limits_{j=1}^{k} U_{x_j,\varepsilon}$.

Пусть $t \in U$, $x \in F(t_0) \cap B_R(x_0)$. Тогда существует $j \in \{1, \dots, k\}$, такое что $\|x - x_j\|_X < \varepsilon$. Из определения U и $U_{x_j,\varepsilon}$ следует, что существует точка $y \in F(t) \cap B_R(x_0) \cap \mathring{B}_\varepsilon(x_j)$. Значит,

$$\operatorname{dist}\bigl(x, F(t) \cap B_R(x_0)\bigr) \leqslant \|x - y\|_X \leqslant \|x - x_j\|_X + \|x_j - y\|_X < 2\varepsilon.$$

Так как x произвольна,

$$E\bigl(F(t_0) \cap B_R(x_0), F(t) \cap B_R(x_0)\bigr) \leqslant 2\varepsilon$$

для любой $t \in U$, откуда следует (19).

Из (18) и (19) следует, что

$$E\bigl(F(t) \cap B_R(x_0), F(t_0) \cap B_R(x_0)\bigr) \not\to 0, \quad t \to t_0,$$

т. е. существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что для любой окрестности W точки t_0 существуют $t \in W$, $x \in F(t) \cap B_R(x_0)$, такие что

$$\operatorname{dist}\bigl(x, F(t_0) \cap B_R(x_0)\bigr) \geqslant \varepsilon_0.$$

Для каждой окрестности W точки t_0 положим

$$A_W = \bigl\{x \in X\colon \text{найдётся } t \in W, \text{ такая что} \\ x \in F(t) \cap B_R(x_0),\ \operatorname{dist}\bigl(x, F(t_0) \cap B_R(x_0)\bigr) \geqslant \varepsilon_0\bigr\}. \quad (20)$$

Если $W \subset V_{(t_0)}$, то A_W — непустое предкомпактное множество в силу свойства 3). Положим

$$A = \bigcap \{\overline{A_W}\colon W \text{ — окрестность } t_0\}.$$

Система

$$\{A_W\colon W \text{ — окрестность } t_0\}$$

является центрированной, так как для любых окрестностей $W_1, \dots, W_k$ точки t_0 выполнено включение

$$A_{W_1 \cap \ldots \cap W_k} \subset A_{W_1} \cap \ldots \cap A_{W_k}.$$

Значит, $A \neq \varnothing$; кроме того, $A \subset B_R(x_0)$.

Пусть $\hat{x} \in A$. Тогда

$$\text{для любых } \delta > 0,\ W = W(t_0) \text{ найдётся } x \in A_W, \text{ такая что } \|x - \hat{x}\|_X < \delta \quad (21)$$

($W(t_0)$ — окрестность точки t_0). Покажем, что $\hat{x} \notin F(t_0)$. В самом деле, пусть $\hat{x} \in F(t_0)$. Тогда

$$\hat{x} \in F(t_0) \cap B_R(x_0). \tag{22}$$

Пусть $0 < \delta < \varepsilon_0$, W — окрестность точки t_0, $x \in A_W$ такая, как в (21). В силу (22)

$$\operatorname{dist}\bigl(x, F(t_0) \cap B_R(x_0)\bigr) \leqslant \delta < \varepsilon_0 \text{ —}$$

противоречие с (20).

Рассмотрим функцию $f(t) \equiv \hat{x}$ и положим

$$\alpha := \|f(t_0) - p_f(t_0)\|_X > 0. \tag{23}$$

Для произвольной окрестности W точки t_0 выберем точку $x \in A_W$, такую что $\|x - \hat{x}\|_X < \alpha/2$ (см. (21) с $\delta = \alpha/2$). В силу (20) $x \in F(t) \cap B_R(t_0)$ для некоторого $t \in W$. Отсюда следует, что $\operatorname{dist}\bigl(\hat{x}, F(t)\bigr) \leqslant \alpha/2$. Значит, $\|f(t) - p_f(t)\|_X \leqslant \alpha/2$. По (23) функция p_f разрывна в точке t_0. □

Для выполнения условия 2) предложения 3 достаточно, чтобы для любой $t \in T$ множество $F(t)$ было выпуклым. В самом деле, пусть $x_0 \in F(t_0)$, $x \in B_R(x_0) \cap F(t_0)$, $\varepsilon > 0$. Выберем точку $y \in [x_0, x] \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \cap \mathring{B}_R(x_0)$. Тогда $y \in F(t_0) \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \cap \mathring{B}_R(x_0)$. Пусть $\delta > 0$ таково, что $\mathring{B}_\delta(y) \subset \mathring{B}_\varepsilon(x) \cap \mathring{B}_R(x_0)$. Так как отображение F полунепрерывно снизу, то существует окрестность U точки t_0, такая что для любой $t \in U$ выполнено $F(t) \cap \mathring{B}_\delta(y) \neq \varnothing$. Значит, $F(t) \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \cap B_R(x_0) \neq \varnothing$.

Из теоремы 1 и предложений 2, 3 получаем следствие.

Следствие 1. *Пусть T — хаусдорфово паракомпактное топологическое пространство, H — конечномерное гильбертово пространство, отображение*

$$F \colon T \to 2^H$$

полунепрерывно снизу, для любого $t \in T$ множество $F(t)$ непусто, выпукло и замкнуто, $S_F \neq \varnothing$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) *существует липшицева с константой 1 выборка из метрического проектора на множество S_F;*
2) *для любых $t \in T$, $x \in F(t)$, $R > 0$ отображение $s \mapsto F(s) \cap B_R(x)$ непрерывно в точке t относительно хаусдорфовой метрики.*

Если пространство H бесконечномерно, то утверждение следствия 1 неверно. В самом деле, рассмотрим $T = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$ с топологией, индуцированной стандартной метрикой на $\mathbb{R}$, $H = l_2$. Пусть e_n — стандартный базисный вектор. Положим $F(1/n) = [0, e_n]$, $F(0) = \{0\}$. Тогда отображение $t \mapsto F(t) \cap B_1(0)$ разрывно в $t = 0$, но для любой функции $f \in C(T, H)$ функция p_f непрерывна. По теореме 1 существует липшицева с константой 1 выборка из метрического проектора на S_F.

Литература

[1] Алимов А. Р., Царьков И. Г. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН. — 2016. — Т. 71, № 1 (427). — С. 3—84.

[2] Бердышев В. И. О модуле непрерывности оператора наилучшего приближения // Матем. заметки. — 1974. — Т. 15, № 5. — С. 797—808.

[3] Бердышев В. И. Непрерывная зависимость элемента, реализующего минимум выпуклого функционала, от множества допустимых элементов // Матем. заметки. — 1976. — Т. 19, № 4. — С. 501—512.

[4] Бердышев В. И. Непрерывность оператора метрического проектирования и его обобщений // Тр. конф. «Конструктивная теория функций '77». — София, 1980. — С. 29—34.

[5] Васильева А. А. Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. — 2004. — Т. 68, № 4. — С. 75—116.

[6] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. — 1973. — Т. 28, № 6 (174). — С. 3—66.

[7] Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1968.

[8] Маринов А. В. Оценки устойчивости непрерывной селекции для метрической почти-проекции // Матем. заметки. — 1994. — Т. 55, № 4. — С. 47—53.

[9] Хавинсон С. Я. Аппроксимативные свойства некоторых множеств в пространствах непрерывных функций // Analysis Math. — 2003. — Vol. 29. — P. 87—105.

[10] Daniel J. W. The continuity of metric projections as functions of the data // J. Approx. Theory. — 1974. — Vol. 12, no. 3. — P. 234—240.

[11] Michael E. Continuous selections // Ann. Math. Ser. 2. — 1956. — Vol. 63, no. 2. — P. 361—381.

[12] Repovš D., Semenov P. V. Continuous Selections of Multivalued Mappings. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.