Оценки наилучших приближений преобразованных рядов Фурье в L^p-норме и p-вариационной норме

С. С. ВОЛОСИВЕЦ
Саратовский государственный университет
e-mail: VolosivetsSS@mail.ru

А. А. ТЮЛЕНЕВА
Саратовский государственный университет
e-mail: anantuleneva@mail.ru

УДК 517.518.832

Ключевые слова: наилучшее приближение тригонометрическими полиномами, пространство L^p, p-вариационная норма, дробная производная.

Аннотация

Мы рассматриваем функции $F = F(\lambda, f)$ с преобразованным рядом Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n(x)$, где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n(x)$ является рядом Фурье функции f. Пусть C_p — пространство 2π-периодических p-абсолютно непрерывных функций с p-вариационной нормой. Приводятся оценки наилучших приближений функции F в L^p в терминах наилучших приближений f в C_p. Изучается также двойственная задача для F в C_p и f в L^p. В важном случае дробной производной устанавливается точность оценок.

Abstract

S. S. Volosivets, A. A. Tyuleneva, Estimates of best approximations of transformed Fourier series in L^p-norm and p-variational norm, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 1, pp. 111—126.

We consider functions $F = F(\lambda, f)$ with transformed Fourier series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n(x)$, where $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n(x)$ is the Fourier series of a function f. Let C_p be the space of 2π-periodic p-absolutely continuous functions with p-variational norm. The estimates of best approximations of F in L^p in terms of best approximations of f in C_p are given. Also the dual problem for F in C_p and f in L^p is treated. In the important case of fractional derivative, the sharpness of estimates is established.

1. Введение

Пусть f — 2π-периодическая действительная ограниченная функция,

$$\xi = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x_0 + 2\pi\} -$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2018, том 22, № 1, с. 111—126.

разбиение периода и

$$\varkappa_\xi^p(f) := \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Положим по определению для $1 < p < \infty$

$$\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup\Big\{\varkappa_\xi^p(f)\colon \lambda(\xi) := \max_i (x_i - x_{i-1}) \leqslant \delta\Big\}$$

и для $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$,

$$\omega_{k-1/p}(f,\delta) = \sup\{\omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1} f(x), |h|)\colon |h| \leqslant \delta\},$$

где

$$\Delta_h^k(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+ih), \quad k \in \mathbb{N},$$

является k-й разностью f с шагом h. Известно, что $\omega_{k-1/p}(f, n\delta) \leqslant n^{k-1/p}\omega_{k-1/p}(f,\delta)$ для $n \in \mathbb{N}$ и $\delta \in [0, 2\pi]$ (см. [16, лемма 1]), и это свойство объясняет «дробное» обозначение $\omega_{k-1/p}$.

Для $1 < p < \infty$ введём пространство V_p, состоящее из всех 2π-периодических ограниченных функций со свойством

$$\|f\|_{V_p} := \max\big(\|f\|_\infty, \omega_{1-1/p}(f, 2\pi)\big) < \infty,$$

и

$$C_p = \Big\{f \in V_p\colon \lim_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0\Big\}.$$

Здесь

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|.$$

Пространство V_p функций ограниченной p-вариации было введено в случае $p = 2$ Н. Винером [18], тогда как пространство p-абсолютно непрерывных функций C_p в другой, но эквивалентной форме было рассмотрено Л. С. Юнгом [19] (см. также статью Е. Лава [13]). Оба пространства V_p и C_p являются банаховыми относительно нормы $\|\cdot\|_{V_p}$.

Если T_n — пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n, то n-е наилучшее приближение в V_p вводится равенством

$$E_n(f)_{V_p} := \inf_{t_n\in T_n} \|f - t_n\|_{V_p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Величины $\omega_{k-1/p}(f,\delta)$ и $E_n(f)_{V_p}$ связаны прямой и обратной теоремами приближения в C_p: для $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C_p$ мы имеем

$$E_n(f)_{V_p} \leqslant C(k)\omega_{k-1/p}\left(f, \frac{1}{n+1}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1}$$

$$\omega_{k-1/p}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leqslant C(k) n^{-k+1/p} \sum_{k=0}^n (k+1)^{k-1/p-1} E_k(f)_{V_p}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Оба неравенства (1.1) и (1.2) принадлежат А. П. Терёхину, но (1.1) приведено в [7], а (1.2) можно найти в [16].

Пусть L^p, $1 \leqslant p < \infty$, — пространство 2π-периодических измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

и для $k \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0, 2\pi]$ по определению

$$\omega_k(f, \delta)_p := \sup\{\|\Delta_h^k f(x)\|_p \colon |h| \leqslant \delta\}.$$

Наилучшее приближение $E_n(f)_p$ в пространстве L^p вводится аналогично $E_n(f)_{V_p}$. Проблемы аппроксимации в C_p и L^p, $1 < p < \infty$, тесно связаны друг с другом (см. [7, 8] и [3]).

Мы говорим, что для $f \in L^p$ ($f \in C_p$) и $r > 0$ существует дробная производная $f^{(r)} = \varphi \in L^p$ ($f^{(r)} = \varphi \in C_p$), если ряд

$$\sigma(f, r) := \sum_{n=1}^{\infty} n^r \left(a_n \cos\left(nx + \frac{\pi r}{2}\right) + b_n \sin\left(nx + \frac{\pi r}{2}\right) \right)$$

является рядом Фурье φ. Здесь a_n, b_n — коэффициенты Фурье f. Для $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, это условие равносильно сходимости $\sigma(f, r)$ к φ в L^p ввиду теоремы М. Рисса (см. лемму 2.6).

Для обычной производной натурального порядка А. П. Терёхиным [7, теорема 3.8] доказана следующая теорема.

Теорема A. *Пусть $1 < p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\omega(t)$ является функцией типа модуля непрерывности, такой что*

$$\int\limits_0^{\delta} t^{-1} \omega(t) \, dt = O\big(\omega(\delta)\big), \quad \delta \in (0, \pi].$$

Тогда $f \in W_p^r$ (т. е. $f, f', \ldots, f^{(r-1)}$ являются 2π-периодическими абсолютно непрерывными функциями и $f^{(r)} \in L^p$) и $E_n\big(f^{(r)}\big)_p = O\big(\omega(1/n)\big)$, $n \in \mathbb{N}$, в том и только в том случае, когда $E_n(f)_{V_p} = O\big(n^{1/p-r}\omega(1/n)\big)$, $n \in \mathbb{N}$.

В. М. Кокилашвили [5] получена следующая теорема.

Теорема B. *Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma = \min(p, 2)$ и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — положительная неубывающая последовательность, такая что $\lambda_{2n} \leqslant C\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. Если $f \in L^p$ имеет ряд Фурье $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\gamma E_n^\gamma(f)_p/n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n A_n(x)$ сходится к некоторой функции F в L^p и*

$$\omega_k\left(F, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant C\left(n^{-k\gamma} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^\gamma \nu^{\gamma k - 1} E_{\nu-1}^\gamma(f)_p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu^\gamma E_\nu^\gamma(f)_p}{\nu} \right)^{1/\gamma}.$$

Аналогичные теореме B вопросы изучались также Б. В. Симоновым и С. Ю. Тихоновым [14].

Недавно С. Ю. Тихонов [15] ввёл новый класс обобщённо монотонных последовательностей: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{GM}$, если соотношение

$$\sum_{i=n}^{2n-1} |a_i - a_{i+1}| \leqslant C a_n$$

выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$. Этот класс содержит квази-монотонные последовательности (т. е. такие $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $a_n n^{-\tau}$ убывает для некоторого $\tau \geqslant 0$; см. [15]).

Цель настоящей статьи — получение оценок наилучших приближений функции F из теоремы B в пространстве L^p в терминах наилучших приближений f в V_p. Также изучается двойственная проблема оценки $E_n(F)_{V_p}$ в терминах $E_i(f)_p$. Также доказывается неравенство между модулем непрерывности $\omega_k(f, 1/n)_p$ и наилучшими приближениями f в V_p. В важном случае, когда F заменяется дробной производной $f^{(r)}$, мы показываем точность результатов.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — положительная монотонно убывающая последовательность. Следуя Н. К. Бари и С. Б. Стечкину [2], мы говорим, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{B}$, если

$$\sum_{i=n}^{\infty} i^{-1} \varphi_i = O(\varphi_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

и что $\{\varphi_n\} \in \mathrm{B}_\alpha$, $\alpha > 0$, если

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha-1} \varphi_i = O(n^\alpha \varphi_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если $\varphi_n \leqslant C\varphi_{2n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет Δ_2-условию ($\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Delta_2$).

Лемма 2.1.

1. *Если $t_n \in T_n$, $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, то $\|t_n\|_{V_p} = O(n^{1/p}\|t_n\|_p)$.*
2. *Если $1 < p < \infty$ и функция $f \in L^p$ такова, что*

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{1/p-1} E_i(f)_p < \infty,$$

то f эквивалентна $f_0 \in C_p$ (т. е. $f(x) = f_0(x)$ п. в. на $\mathbb{R}$) и

$$E_n(f_0)_{V_p} = O\left(n^{1/p} E_n(f)_p + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{1/p-1} E_i(f)_p\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Первое утверждение леммы 2.1 приводится в [8] без доказательства. Доказательства обоих утверждений могут быть найдены в [3].

Лемма 2.2 доказана в [15].

Лемма 2.2. *Если* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathrm{GM}$, *то* $a_k \leqslant (C+1)a_n$ *для* $n \leqslant k \leqslant 2n$. *Здесь* C — *та же константа, что в определении* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathrm{GM}$.

Как обычно, мы пишем $A(f) \asymp B(f)$, если существуют $C_1, C_2 > 0$, независимые от f из данного класса, такие что $C_1 A(f) \leqslant B(f) \leqslant C_2 A(f)$. Лемма 2.3 — это известная теорема Литтлвуда—Пэли (см. [4, т. 2, гл. XV, теорема 2.1]).

Лемма 2.3. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $f \in L^p$ *имеет ряд Фурье*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos jx + b_j \sin jx),$$

$$\Delta_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \Delta_j(x) = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j}(a_i \cos ix + b_i \sin ix),$$

где $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, $n_0 = 0$ *и* $1 < q_1 \leqslant n_{j+1}/n_j \leqslant q_2 < \infty$, $j \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\|f\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\Delta_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

Первое соотношение леммы 2.4 можно найти в [4, т. 1, гл. V, теорема 8.4]. Второе соотношение также хорошо известно и легко следует из первого.

Лемма 2.4. *Пусть* $f \in L^1$ *имеет ряд Фурье*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\big(a_j \cos(n_j x) + b_j \sin(n_j x)\big),$$

где $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, $n_{j+1}/n_j \geqslant q > 1$ *д ля* $j \in \mathbb{N}$ *и*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(a_j^2 + b_j^2) < \infty.$$

Тогда при $1 \leqslant p < \infty$ *мы имеем*

$$\|f\|_p \asymp \left(\sum_{j=1}^{\infty}(a_j^2 + b_j^2) \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad E_n(f)_p \asymp \left(\sum_{n_j > n}(a_j^2 + b_j^2) \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2.5. *Пусть* $f \in V_p$, $1 < p < \infty$. *Тогда* $E_n(f)_{V_p} \geqslant C n^{1/p} E_n(f)_p$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство леммы 2.5 можно найти в [17].

Для $f \in L^1$ с рядом Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

по определению

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n}(a_j \cos jx + b_j \sin jx).$$

Все утверждения леммы 2.6 называются теоремой М. Рисса (см. [1, гл. VIII, § 14, 20]).

Лемма 2.6. *Пусть $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, a_n, b_n — коэффициенты Фурье f. Тогда*

1) $\|S_n(f)\|_p \leqslant C\|f\|_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$;
2) $\|f - S_n(f)\|_p \leqslant CE_n(f)_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$;
3) *сопряжённый ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

сходится в L^p к сопряжённой функции $\tilde{f}$ и $\|\tilde{f}\| \leqslant C\|f\|_p$, где C не зависит от $f \in L^p$ (в 1) и 2) она также не зависит от $n \in \mathbb{Z}_+$).

В лемме 2.7 мы представляем уточнённую обратную теорему приближения в L^p, принадлежащую М. Ф. Тиману и О. В. Бесову [10].

Лемма 2.7. *Пусть $1 < p < \infty$, $\beta = \min(p, 2)$, $f \in L^p$. Тогда*

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant C\left(\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^{\beta k-1}E_i^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2.8 содержится в [17].

Лемма 2.8. *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{GM}$ и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

принадлежит C_p для всех $p \in (1, \infty)$ и

$$E_n(f)_{V_p} \geqslant C \sum_{i=2n}^{\infty} a_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Основные результаты

Мы используем для краткости обозначение $A_n(x) = (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, $n \in \mathbb{N}$, $A_0 = a_0/2$, где a_n и b_n — косинус- и синус-коэффициенты f.

Теорема 3.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\beta = \min(p, 2)$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathrm{GM}$. *Если* $f(x)$ *с рядом Фурье*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$$

принадлежит C_p *и*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{\beta} j^{-1-\beta/p} E_j^{\beta}(f)_{V_p} < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i A_i(x)$$

сходится в L^p *к функции* $F \in L^p$ *и при этом*

$$E_n(F)_p \leqslant C\Bigg((n+1)^{-\beta/p}\lambda_n^{\beta} E_n^{\beta}(f)_{V_p} + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-1-\beta/p}\lambda_j^{\beta} E_j^{\beta}(f)_{V_p}\Bigg)^{1/\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.1}$$

Доказательство. По лемме 2.3, неравенству Йенсена при $1 < p \leqslant 2$ и неравенству Минковского (см. [11, теорема 203]) при $p > 2$ мы имеем

$$\Bigg\|\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j A_j\Bigg\|_p \leqslant C_1 \Bigg\|\Bigg(\sum_{l=0}^{\infty}\Bigg|\sum_{j=2^l n+1}^{2^{l+1}n} \lambda_j A_j\Bigg|^2\Bigg)^{1/2}\Bigg\|_p \leqslant C_2\Bigg(\sum_{l=0}^{\infty}\Bigg\|\sum_{j=2^l n+1}^{2^{l+1}n} \lambda_j A_j\Bigg\|_p^{\beta}\Bigg)^{1/\beta}.$$

Используя преобразование Абеля, мы получаем

$$\sum_{j=2^l n+1}^{2^{l+1}n} \lambda_j A_j = \sum_{j=2^l n+1}^{2^{l+1}n-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1})\big(S_j(f) - S_{2^l n}(f)\big) + \lambda_{2^{l+1}n-1}\big(S_{2^{l+1}n}(f) - S_{2^l n}(f)\big).$$

По неравенству М. Рисса 2) из леммы 2.6, условию $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathrm{GM}$, леммам 2.2 и 2.5 мы получаем, что

$$\Bigg\|\sum_{j=2^l n+1}^{2^{l+1}n} \lambda_j A_j\Bigg\|_p \leqslant C_4 \lambda_{2^l n} E_{2^l n}(f)_p \leqslant C_5 \lambda_{2^l n}(2^l n)^{-1/p} E_{2^l n}(f)_{V_p}.$$

Возводя в степень β и складывая последние неравенства, с помощью леммы 2.2 мы легко получаем неравенство теоремы 3.1. □

Следствие 3.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\beta = \min(p, 2)$, $r > 0$. *Если* $f(x)$ *с рядом Фурье*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$$

принадлежит C_p *и*

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{\beta r - 1 - \beta/p} E_j^{\beta}(f)_{V_p} < \infty,$$

то существует $F \in L^p$ *с рядом Фурье*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r A_n(x)$$

и при этом

$$E_n(F)_p \leqslant C\left((n+1)^{\beta r-\beta/p} E_n^{\beta}(f)_{V_p} + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{\beta r-\beta/p-1} E_j^{\beta}(f)_{V_p}\right)^{1/\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.2}$$

Следствие 3.2. *При выполнении условий следствия* 3.1 *существует* $f^{(r)} \in L^p$ *и*

$$E_n(f^{(r)})_p \leqslant C\left((n+1)^{\beta r-\beta/p} E_n^{\beta}(f)_{V_p} + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{\beta r-\beta/p-1} E_j^{\beta}(f)_{V_p}\right)^{1/\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Отметим, что

$$n^r\left(a_n \cos\left(nx + \frac{\pi r}{2}\right) + b_n \sin\left(nx + \frac{\pi r}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) n^r (a_n \cos nx + b_n \sin nx) -$$
$$- \sin\left(\frac{\pi r}{2}\right) n^r (a_n \sin nx - b_n \cos nx) =: \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) A_n^{(r)}(x) - \sin\left(\frac{\pi r}{2}\right) B_n^{(r)}(x).$$

Благодаря следствию 3.1 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(r)}(x)$$

сходится в L^p к F_1, тогда как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(r)}(x)$$

также сходится к F_2 в L^p по лемме 2.6 и следствию 3.1. Кроме того, из леммы 2.6 вытекает оценка $E_n(F_2)_p \leqslant C_1 E_n(F_1)_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, неравенство (3.2) справедливо для $F = F_1$, $F = F_2$ и, следовательно, для $F = f^{(r)}$. Следствие доказано. □

Теперь мы покажем точность следствия 3.2.

Теорема 3.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\beta = \min(p, 2)$, $r > 0$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ *убывает к нулю и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta r-\beta/p-1} \varepsilon_n^{\beta} < \infty.$$

Если $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in B$ *и* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Delta_2$, *то мы можем найти* $f_0 \in C_p$, *такую что* $E_n(f_0)_{V_p} \leqslant C_1 \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, *и существует* $f_0^{(r)} \in L^p$, *для которой*

$$E_n\big(f_0^{(r)}\big)_p \geqslant C_2\left(n^{\beta r-\beta/p} \varepsilon_n^{\beta} + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{\beta r-\beta/p-1} \varepsilon_j^{\beta}\right)^{1/\beta}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Доказательство. 1. Пусть $1 < p \leqslant 2$ и $a_j = \varepsilon_j/j$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда по [6, теорема 5] и условию $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in B$ для функций

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

имеем

$$E_n(f_i)_p \leqslant C_3\Big(n^{1-1/p}a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-1/p}a_k\Big) \leqslant C_3\Big(n^{-1/p}\varepsilon_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-1/p-1}\varepsilon_k\Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_3 n^{-1/p}\Big(\varepsilon_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-1}\varepsilon_k\Big) \leqslant C_4 n^{-1/p}\varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2.$$

Используя лемму 2.1 и условие $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in B$, мы находим, что

$$E_n(f_i)_{V_p} \leqslant C_5\Big(n^{1/p}n^{-1/p}\varepsilon_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-1}\varepsilon_k\Big) \leqslant C_6\varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2. \tag{3.4}$$

Пусть

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\Big(nx - \frac{r\pi}{2}\Big) = \cos\Big(\frac{r\pi}{2}\Big) f_1(x) + \sin\Big(\frac{r\pi}{2}\Big) f_2(x).$$

Тогда $f_0^{(r)}$ существует по следствию 3.2 и имеет ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r a_n \cos nx.$$

По теореме Харди—Литтлвуда (см. [4, теорема 2, гл. XII, § 5, 6]) и лемме 2.6 мы получаем

$$E_n(f_0)_p \geqslant C_7\|f_0 - S_n(f_0)\|_p \geqslant C_8\Big(\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{rp}a_j^p j^{p-2}\Big)^{1/p} \geqslant C_9\Big(\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{rp-2}\varepsilon_j^p\Big)^{1/p}. \tag{3.5}$$

Из того, что $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Delta_2$, легко получить, что

$$\sum_{j=n+1}^{2n} j^{rp-2}\varepsilon_j^p \geqslant C_{10} n^{rp-1}\varepsilon_n^p. \tag{3.6}$$

Поскольку $\beta = p$ и $\beta r - \beta/p - 1 = pr - 2$, мы выводим (3.3) из (3.5) и (3.6).

2. В случае $p > 2$ мы рассмотрим

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\big[\big(\varepsilon_{2^j}2^{-j/p}\big)^2 - \big(\varepsilon_{2^{j+1}}2^{-(j+1)/p}\big)^2\big]^{1/2}\cos(2^j x - \pi r/2) =:$$
$$=: \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos\Big(2^j x - \frac{\pi r}{2}\Big).$$

Для $n \in (2^k, 2^{k+1}]$, $k \in \mathbb{Z}_+$, мы имеем по лемме 2.4, что

$$E_n(f_0)_p \leqslant \|f_0 - S_n(f_0)\|_p \leqslant C_{11}\Bigg(\sum_{j=k+1}^{\infty}\big[(\varepsilon_{2^j}2^{-j/p})^2 - \big(\varepsilon_{2^{j+1}}2^{-(j+1)/p}\big)^2\big]\Bigg)^{1/2} =$$
$$= C_{11}\varepsilon_{2^{k+1}}2^{-(k+1)/p} \leqslant C_{11}\varepsilon_n n^{-1/p}.$$

Используя условие $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in B$ и часть 2 леммы 2.1, так же, как в первой части настоящего доказательства, мы получаем, что $E_n(f_0)_{V_p} \leqslant C_{12}\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$. В силу леммы 2.4 существует $f_0^{(r)}$ с рядом Фурье $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j 2^{jr}\cos(2^j x)$ и для $n \in (2^k, 2^{k+1}]$ выполнена оценка

$$E_n\big(f_0^{(r)}\big)_p \geqslant C_{13}\Bigg(\sum_{j=k+1}^{\infty}\alpha_j^2 2^{2jr}\Bigg)^{1/2} \geqslant C_{14}\Bigg(\sum_{j=k+1}^{\infty}\varepsilon_{2^j}^2 2^{2jr-2j/p}\Bigg)^{1/2}. \tag{3.7}$$

Поскольку $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет Δ_2-условию, из неравенства (3.7) выводим (3.3) с помощью обычной процедуры. Теорема доказана. □

Теорема 3.3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta = \min(p, 2)$, $\beta(k - 1/p) > 1$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{GM}$. *Если* $f \in C_p$ *имеет ряд Фурье*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{\beta} j^{-1-\beta/p} E_j^{\beta}(f)_{V_p} < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i A_i(x)$$

сходится в L^p *к функции* $F \in L^p$ *и для* $n \in \mathbb{N}$

$$\omega_k\left(F, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant$$
$$\leqslant C\Bigg(n^{-k\beta}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^{\beta k-\beta/p-1}\lambda_j^{\beta}E_j^{\beta}(f)_{V_p} + \sum_{j=n}^{\infty}(j+1)^{-1-\beta/p}\lambda_j^{\beta}E_j^{\beta}(f)_{V_p}\Bigg)^{1/\beta}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы 3.3 установлено в теореме 3.1. По лемме 2.7

$$\omega_k\left(F, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant \omega_k\left(F - S_n(F), \frac{1}{n}\right)_p + \omega_k\left(S_n(F), \frac{1}{n}\right)_p \leqslant$$
$$\leqslant 2^k\|F - S_n(F)\|_p + C_1 n^{-k}\Bigg(\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^{\beta k-1}E_j^{\beta}\big(S_n(F)\big)_p\Bigg)^{1/\beta} =: I_1 + I_2. \tag{3.9}$$

По лемме 2.6 ясно, что $I_1 = O(E_n(F)_p)$, т. е. I_1 можно оценить с помощью теоремы 3.1. Отметим также, что

$$E_j\big(S_n(F)\big)_p \leqslant E_j(F)_p + E_j\big(F - S_n(F)\big)_p \leqslant E_j(F)_p + C_2 E_n(F)_p \leqslant (1+C_2)E_j(F)_p$$

для $0 \leqslant j \leqslant n$. Применяя теорему 3.1, мы находим, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^{\beta k-1}E_j^{\beta}\big(S_n(F)\big)_p \leqslant \\
&\quad\leqslant C_3\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^{\beta k-1}\left[\lambda_j^{\beta}(j+1)^{-\beta/p}E_j^{\beta}(f)_{V_p} + \sum_{i=j}^{\infty}\lambda_i^{\beta}(i+1)^{-1-\beta/p}E_i^{\beta}(f)_{V_p}\right] \leqslant \\
&\quad\leqslant C_3\Bigg(\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^{\beta k-\beta/p-1}\lambda_j^{\beta}E_j^{\beta}(f)_{V_p} + n^{\beta k}\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i^{\beta}(i+1)^{-1-\beta/p}E_i^{\beta}(f)_{V_p} + \\
&\quad+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}(j+1)^{\beta k-1}(i+1)^{-1-\beta/p}\lambda_i^{\beta}E_i^{\beta}(f)_{V_p}\Bigg) \leqslant \\
&\quad\leqslant C_4\Bigg(\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^{\beta k-\beta/p-1}\lambda_j^{\beta}E_j^{\beta}(f)_{V_p} + n^{\beta k}\sum_{j=n}^{\infty}\lambda_j^{\beta}(j+1)^{-1-\beta/p}E_j^{\beta}(f)_{V_p}\Bigg).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.9) и оценивая I_1 с помощью теоремы 3.1, мы получаем (3.8). Можно отметить, что выражение $(n+1)^{-\beta/p}\lambda_n^{\beta}E_n^{\beta}(f)_{V_p}$ из (3.1) мажорируется первым слагаемым из правой части (3.8) благодаря лемме 2.2. Теорема доказана. □

Теорема 3.4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L^p$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathrm{GM}$. *Если*

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{1/p-1}\lambda_j E_j(f)_p < \infty,$$

то существует функция $F \in C_p$ *с рядом Фурье*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i A_i(x)$$

и при этом

$$E_n(F)_{V_p} \leqslant C\left(n^{1/p}\lambda_n E_n(f)_p + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{1/p-1}\lambda_j E_j(f)_p\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. По лемме 2.1, используя преобразование Абеля, мы имеем

$$\Big\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i A_i(x)\Big\|_{V_p}\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\Big\|\sum_{i=2^jn+1}^{2^{j+1}n}\lambda_i A_i(x)\Big\|_{V_p}\leqslant$$
$$\leqslant C_1\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}n)^{1/p}\Big\|\sum_{i=2^jn+1}^{2^{j+1}n}\lambda_i A_i(x)\Big\|_p=$$
$$=C_1\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}n)^{1/p}\Big\|\sum_{i=2^jn+1}^{2^{j+1}n-1}(\lambda_i-\lambda_{i+1})\big(S_i(f)(x)-S_{2^jn}(f)(x)\big)+$$
$$+\lambda_{2^{j+1}n}\big(S_{2^{j+1}n}(f)(x)-S_{2^jn}(f)(x)\big)\Big\|_p.$$

Поскольку $1<p<\infty$ и для $i<j$ по лемме 2.6

$$\|S_j(f)-S_i(f)\|_p\leqslant\|f-S_j(f)\|_p+\|f-S_i(f)\|_p\leqslant 2C_2E_i(f)_p,$$

мы получаем в силу леммы 2.2 и определения GM

$$\Big\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i A_i(x)\Big\|_{V_p}\leqslant$$
$$\leqslant C_3\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}n)^{1/p}E_{2^jn}(f)_p\Big(\sum_{i=2^jn+1}^{2^{j+1}n-1}|\lambda_i-\lambda_{i+1}|+\lambda_{2^{j+1}n}\Big)\leqslant$$
$$\leqslant C_4\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}n)^{1/p}\lambda_{2^jn}E_{2^jn}(f)_p\leqslant C_4(2n)^{1/p}\lambda_nE_n(f)_p+$$
$$+C_5\sum_{j=1}^{\infty}(2^{j+1}n)^{1/p}\sum_{i=2^{j-1}n+1}^{2^jn}i^{-1}\lambda_iE_i(f)_p\leqslant$$
$$\leqslant C_6\Big(n^{1/p}\lambda_nE_n(f)_p+\sum_{i=n+1}^{\infty}i^{1/p-1}\lambda_iE_i(f)_p\Big).\tag{3.11}$$

Ясно, что правая часть (3.11) стремится к нулю при $n\to+\infty$, поэтому ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_iA_i(x)$$

сходится в V_p к функции $F\in C_p$. Также (3.11) влечёт неравенство теоремы. Теорема доказана. □

Следствие 3.3. *Пусть* $1<p<\infty$, $f\in L^p$, $r\geqslant 0$ *и*

$$\sum_{j=1}^{\infty}j^{r+1/p-1}E_j(f)_p<\infty.$$

Тогда существует функция $F \in C_p$ с рядом Фурье

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^r A_i(x)$$

и при этом

$$E_n(F)_{V_p} \leqslant C\Bigg(n^{r+1/p} E_n(f)_p + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r+1/p-1} E_j(f)_p\Bigg).$$

Следствие 3.4. *При выполнении условий следствия* 3.3 *функция f эквивалентна $f_0 \in C_p$, такой что существует $f_0^{(r)} \in C_p$ и*

$$E_n\big(f^{(r)}\big)_{V_p} \leqslant C\Bigg(n^{r+1/p} E_n(f)_p + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r+1/p-1} E_j(f)_p\Bigg).$$

Доказательство. Утверждение следствия 3.4 в случае $r = 0$ совпадает с частью 2 леммы 2.1. В случае $r > 0$ мы снова рассматриваем

$$\cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(r)}(x) - \sin\left(\frac{\pi r}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(r)}(x), \tag{3.12}$$

как в доказательстве следствия 3.2. Поскольку $E_n(\tilde{f})_p \leqslant C_1 E_n(f)_p$, $n \in \mathbb{N}$, по лемме 2.6 ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(r)}(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(r)}(x)$$

сходятся к $F_1 \in C_p$ и $F_2 \in C_p$ соответственно по норме V_p в силу следствия 3.3 и

$$E_n(F_2)_{V_p} \leqslant C_2\Bigg(n^{r+1/p} E_n(\tilde{f})_p + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r+1/p-1} E_j(\tilde{f})_p\Bigg) \leqslant$$
$$\leqslant C_3\Bigg(n^{r+1/p} E_n(f)_p + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r+1/p-1} E_j(f)_p\Bigg). \tag{3.13}$$

Таким образом, (3.12) сходится к $f^{(r)} \in C_p$, и неравенство следствия вытекает из этого факта, (3.13) и следствия 3.3. Следствие доказано. □

Следствие 3.5. *Если $1 < p < \infty$, $f \in L^p$ и интеграл*

$$\int_0^{\pi} t^{-1/p-1} \omega_2(f,t)_p \, dt$$

сходится, то f эквивалентна $f_0 \in C_p$.

Утверждение следствия 3.5 вытекает из следствия 3.4 в силу теоремы Джексона в L^p (см. [9, гл. 5]) и совпадает с теоремой 1 из [8].

Последняя теорема показывает неулучшаемость следствия 3.4.

Теорема 3.5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $r > 0$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ *убывает к нулю и удовлетворяет следующим условиям*:

1) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{r+1/p-1}\varepsilon_j < \infty$;
2) $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Delta_2$;
3) *для* $p \geqslant 2$ *также*

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r+1/p-1}\varepsilon_j \leqslant Cn^{r+1/p}\varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

Тогда существует функция $f_0 \in C_p$, *такая что* $f_0^{(r)} \in C_p$, $E_n(f_0)_p \leqslant C\varepsilon_n$, *где* C *не зависит от* $n \in \mathbb{N}$, *и*

$$E_n\big(f_0^{(r)}\big)_{V_p} \geqslant C_1\Big(n^{1/p+r}\varepsilon_n + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r+1/p-1}\varepsilon_j\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. 1. Пусть $1 < p \leqslant 2$. Аналогично теореме 3.2 мы доказываем, что

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+1/p}\varepsilon_n \cos\Big(nx - \frac{\pi r}{2}\Big)$$

удовлетворяет неравенству $E_n(f_0)_p \leqslant C_1\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, в то время как f_0 и $f_0^{(r)}$ принадлежат C_p по следствию 3.4. По леммам 2.5 и 2.6, условию 2) и теореме Харди—Литтлвуда мы имеем

$$\begin{aligned} &E_n\big(f_0^{(r)}\big)_{V_p} \geqslant C_2 n^{1/p} E_n\big(f_0^{(r)}\big)_p \geqslant \\ &\quad \geqslant C_3 n^{1/p}\Big\|\sum_{i=n+1}^{\infty} i^{r-1+1/p}\varepsilon_i \cos ix\Big\|_p \geqslant C_4\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} i^{pr-p+1}\varepsilon_i^p i^{p-2}\Big)^{1/p} = \\ &\quad = C_4 n^{1/p}\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} i^{pr-1}\varepsilon_i^p\Big)^{1/p} \geqslant C_5 n^{1/p}\Big(\sum_{i=n+1}^{2n} i^{pr-1}\Big)^{1/p}\varepsilon_n = C_6 n^{1/p+r}\varepsilon_n. \end{aligned} \tag{3.15}$$

С другой стороны, косинус-коэффициенты Фурье функции $f_0^{(r)}$ являются квазимонотонными и принадлежат классу GM (см. введение и [15]). По лемме 2.8 и условию $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Delta_2$ мы получаем

$$E_n\big(f_0^{(r)}\big)_{V_p} \geqslant C_7 \sum_{i=2n}^{\infty} i^{r-1+1/p}\varepsilon_i \geqslant C_8 \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{r-1+1/p}\varepsilon_i. \tag{3.16}$$

Объединяя (3.15) и (3.16), мы выводим неравенство теоремы в случае $1 < p \leqslant 2$.

2. Для $p > 2$ пусть

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty}(\varepsilon_{2^j}^2 - \varepsilon_{2^{j+1}}^2)^{1/2}\cos(2^j x - \pi r/2) =: \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j \cos\Big(2^j x - \frac{\pi r}{2}\Big).$$

Для $n \in \mathbb{N}$ аналогично доказательству теоремы 3.2 мы получаем, что $E_n(f_0)_p \leqslant \leqslant C_9\varepsilon_n$, тогда как $f_0^{(r)} \in C_p$ по следствию 3.4. Если $n \in [2^k, 2^{k+1})$, то по леммам 2.4—2.6 и условию $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Delta_2$ мы получаем

$$\begin{aligned}
&E_n\big(f_0^{(r)}\big)_{V_p} \geqslant C_2 n^{1/p} E_n\big(f_0^{(r)}\big)_p \geqslant C_{10} n^{1/p} \big\| f_0^{(r)} - S_{2^k}\big(f_0^{(r)}\big)\big\|_p \geqslant \\
&\quad \geqslant C_{11} n^{1/p} \Bigg(\sum_{2^j > n} 2^{2jr} \alpha_j^2 \Bigg)^{1/2} = C_{11} n^{1/p} \Bigg(\sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{2jr} (\varepsilon_{2^j}^2 - \varepsilon_{2^{j+1}}^2) \Bigg)^{1/2} \geqslant \\
&\quad \geqslant C_{11} n^{1/p} \Bigg(\sum_{j=k+1}^{\infty} (2^{2jr} - 2^{2(j-1)r}) \varepsilon_{2^j}^2 \Bigg)^{1/2} \geqslant C_{12} n^{1/p} \Bigg(\sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{2jr} \varepsilon_{2^j}^2 \Bigg)^{1/2} \geqslant \\
&\quad \geqslant C_{12} n^{1/p} 2^{(k+1)r} \varepsilon_{2^{k+1}} \geqslant C_{13} n^{r+1/p} \varepsilon_n.
\end{aligned}$$

Используя 3.14, мы завершаем доказательство. Теорема доказана. □

Литература

[1] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.

[2] Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряжённых функций // Тр. ММО. — 1956. — Т. 5. — С. 483—522.

[3] Волосивец С. С. Уточнённые теоремы теории приближения в пространстве p-абсолютно непрерывных функций // Матем. заметки. — 2006. — Т. 80, № 5. — С. 701—711.

[4] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1965.

[5] Кокилашвили В. М. Об обратной теореме конструктивной теории функций в пространстве L^p $(1 < p < \infty)$ // Тр. Тбилис. Матем. ин-та. — 1964. — Т. 29. — С. 183—189.

[6] Конюшков А. А. Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Матем. сб. — 1958. — Т. 44, № 1. — С. 53—84.

[7] Терёхин А. П. Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1965. — № 2. — С. 171—187.

[8] Терёхин А. П. Интегральные свойства гладкости периодических функций ограниченной p-вариации // Матем. заметки. — 1967. — Т. 2, №. 3. — С. 289—300.

[9] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960.

[10] Тиман М. Ф. Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p // Матем. сб. — 1958. — Т. 46, №. 1. — С. 125—132.

[11] Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г. Неравенства. — М.: Изд. иностр. лит., 1948.

[12] Aljančić S. On the integral moduli of continuity in L_p $(1 < p < \infty)$ of Fourier series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol. 17, no. 5. — P. 287—294.

[13] Love E. R. A generalization of absolute continuity // J. London Math. Soc. — 1951. — Vol. 26, no. 1. — P. 1—13.

[14] Simonov B. V., Tikhonov S. Yu. On embedding of function classes defined by constructive characteristics // Banach Center Publ. — 2006. — Vol. 72. — P. 285—307.

[15] Tikhonov S. Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 326, no. 1. — P. 721—735.

[16] Volosivets S. S. Convergence of series of Fourier coefficients of p-absolutely continuous functions // Anal. Math. — 2000. — Vol. 26, no. 1. — P. 63—80.

[17] Volosivets S. S., Tyuleneva A. A. Generalized monotonicity of sequences and functions of bounded p-variation // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2016. — Vol. 82, no. 1-2. — P. 111—124.

[18] Wiener N. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // J. Math. Phys. — 1924. — Vol. 3. — P. 72—94.

[19] Young L. C. An inequality of Hölder type connected with Stieltjes integration // Acta Math. — 1936. — Vol. 67. — P. 251—282.