Неподвижные точки и полнота в метрических и обобщённых метрических пространствах

С. КОБЗАШ
Университет Бабеша—Бойяи, Румыния
e-mail: scobzas@math.ubbcluj.ro

УДК 515.126.4

Ключевые слова: неподвижная точка, вариационный принцип, полнота, частично упорядоченное множество, топологическое пространство, многозначное отображение, метрическое пространство, обобщённая метрика, частная метрика, квазиметрика.

Аннотация

Известный принцип Банаха сжимающих отображений верен в полных метрических пространствах, однако полнота не является необходимым условием: известны примеры неполных метрических пространств, в которых каждое сжимающее отображение имеет неподвижную точку. В настоящей работе мы приводим ряд условий, при которых из существования неподвижной точки вытекает полнота. Для метрических пространств это вытекает из вариационного принципа Экланда или эквивалентной ему теоремы Каристи о неподвижной точке. Мы также представим другие теоремы о неподвижных точках с таким свойством как в случае метрических пространств, так и в квазиметрических и частных метрических пространствах. Обсуждается топология и порядок, неподвижные точки в упорядоченных структурах в связи с полнотой этих структур.

Abstract

S. Cobzaş, Fixed points and completeness in metric and generalized metric spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 1, pp. 127—215.

The famous Banach contraction principle holds in complete metric spaces, but completeness is not a necessary condition: there are incomplete metric spaces on which every contraction has a fixed point. The aim of this paper is to present various circumstances in which fixed point results imply completeness. For metric spaces, this is the case of Ekeland variational principle and of its equivalent, Caristi fixed point theorem. Other fixed point results having this property will be also presented in metric spaces, in quasi-metric spaces and in partial metric spaces. A discussion on topology and order and on fixed points in ordered structures and their completeness properties is included as well.

Фундаментальная и прикладная математика, 2018, том 22, № 1, с. 127—215.
© 2018 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Все дороги ведут в Рим.
Старая поговорка
Все топологии образуются из обобщённых метрик.
Ральф Копперман
Amer. Math. Mon. — 1988. — Vol. 95, no. 2. — P. 89—97

Введение

Широко известный принцип сжимающих отображений верен в полных метрических пространствах, однако полнота не является необходимым условием для выполнения этого утверждения: известны примеры неполных метрических пространств, в которых каждое сжимающее отображение имеет неподвижную точку (см., например, [54]). Цель настоящей работы — презентация ряда условий, при которых теорема о существовании неподвижной точки гарантирует полноту. Для метрических пространств это вытекает из вариационного принципа Экланда и эквивалентной ему теоремы Каристи о неподвижной точке (см., например, [30,112,171]); этот результат также верен в квазиметрических [39,90] и частных метрических пространствах [3, 151]. Мы также представим другие теоремы о неподвижных точках с таким свойством. Также обсуждаются порядковые условия полноты на упорядоченных структурах, вытекающие из теорем о неподвижных точках.

В ряде случаев утверждения приводятся с доказательствами, особенно для обратных результатов, где утверждения о полноте получаются из теорем о неподвижных точках. Полные доказательства приводятся в разделе3, где рассматривается связь топологии и порядка, а также в разделе 5, где изучаются свойства частных метрических пространств.

1. Принцип Банаха сжимающих отображений в метрических пространствах

Принцип сжимающих отображений был установлен С. Банахом в диссертации (1920 г.) и опубликован в 1922 г. [24]. Несмотря на то что идея последовательных приближений в ряде конкретных ситуаций (решение дифференциальных и интегральных уравнений, теория приближений) возникала ранее в работах П. Л. Чебышёва, Э. Пикара, Р. Каччопполи и др., С. Банах впервые привёл данный результат в правильной абстрактной форме, пригодной для применения в широком круге приложений (см. [100]).

1.1. Сжимающие отображения

Пусть (X,ρ) и (Y,d) — метрические пространства. Отображение $f\colon X\to Y$ называется *липшицевым*, если существует число $\alpha\geqslant 0$, такое что

$$d\big(f(x),f(y)\big)\leqslant \alpha\rho(x,y)\quad\text{для любых}\quad x,y\in X. \tag{1.1}$$

Число α называется *константой Липшица* для f; в этом случае иногда говорят, что отображение f является *α-липшицевым*. Если $\alpha = 0$, то отображение f постоянно: $f(x) = f(x_0)$ при некотором $x_0 \in X$. Если $\alpha = 1$, т. е.

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \rho(x, y) \quad \text{для любых} \quad x, y \in X, \tag{1.2}$$

то отображение f называется *нерастягивающим*. Если

$$d\big(f(x), f(y)\big) = \rho(x, y) \quad \text{для любых} \quad x, y \in X, \tag{1.3}$$

то f называется *изометрией*.

Пусть $Y = X$. α-липшицево отображение $f\colon X \to X$ с $0 \leqslant \alpha < 1$ называется *сжимающим отображением* или α-сжатием. Отображение $f\colon X \to X$, удовлетворяющее условию

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) < \rho(x, y) \quad \text{для любых} \quad x, y \in X,\ x \neq y, \tag{1.4}$$

называется *слабо сжимающим*.

Точка $x_0 \in X$, для которой $f(x_0) = x_0$, называется *неподвижной точкой* отображения $f\colon X \to X$. Изучение неподвижных точек является одним из ключевых вопросов математики, имеющим многочисленные приложения к решению различных типов уравнений (дифференциальных, интегральных, в частных производных, операторных), оптимизации, теории игр и т. п.

В теории неподвижных точек, по-видимому, наиболее известным является следующий результат.

Теорема 1.1 (принцип Банаха сжимающих отображений). *Сжимающее отображение на полном метрическом пространстве имеет неподвижную точку.*

Более точно, предположим, что при некотором α, $0 \leqslant \alpha < 1$, f — α-сжимающее отображение на полном метрическом пространстве (X, ρ). Тогда для произвольной точки $x_1 \in X$ последовательность (x_n), заданная рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.5}$$

сходится к неподвижной точке x_0 отображения f, при этом

а) *для каждого $n \in \mathbb{N}$*

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \alpha^{n-1} \rho(x_1, x_2);$$

б) *для любых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$*

$$\rho(x_n, x_{n+k}) \leqslant \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \alpha^{n-1} \rho(x_1, x_2);$$

в) *для каждого $n \in \mathbb{N}$*

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \rho(x_1, x_2).$$

При дополнительных условиях можно также гарантировать существование неподвижных точек для слабо сжимающих отображений.

Теорема 1.2 (М. Эдельстейн (1962 г.) [50, 51]). *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $f\colon X \to X$ — слабо сжимающее отображение. Если существует $x \in X$, такая что последовательность итераций $\big(f^n(x)\big)$ имеет предельную точку $\xi \in X$, то ξ — единственная неподвижная точка для f.*

Теорема 1.2 имеет важное следствие.

Следствие 1.3 (В. В. Немыцкий (1936 г.) [132]). *Если метрическое пространство (X, ρ) компактно, то каждое слабо сжимающее отображение $f\colon X \to X$ имеет единственную неподвижную точку из X. Более того, для любого $x_1 \in X$ последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к неподвижной точке отображения f.*

Ряд результатов о неподвижных точках изометрий получены М. Эдельстейном [52].

1.2. Обращения принципа Банаха сжимающих отображений

Предположим, что функция f, заданная на метрическом пространстве (X, ρ), имеет единственную неподвижную точку. Возникает вопрос: при каких условиях можно гарантировать существование метрики $\bar{\rho}$ на X, топологически эквивалентной ρ и такой, что f является сжимающим отображением на $(X, \bar{\rho})$. Первый результат такого рода получен Ч. Бессагой [32]. С различными аспектами теории неподвижных точек для сжимающих отображений и их обобщениями, а также обратными результатами можно ознакомиться в [74, 100, 108, 138, 155, 157, 160].

Метрика на d на множестве X называется *полной*, если (X, d) — полное метрическое пространство.

Теорема 1.4 (Ч. Бессага (1959 г.) [32]). *Пусть X — непустое множество, $f\colon X \to X$ и $\alpha \in (0, 1)$.*

1. *Если для каждого $n \in \mathbb{N}$ f^n имеет не более чем одну неподвижную точку, то существует метрика ρ на X, такая что f — α-сжимающее отображение по отношению к ρ.*
2. *Если дополнительно некоторое отображение f^n имеет неподвижную точку, то существует полная метрика ρ на X, такая что f — α-сжимающее отображение по отношению к ρ.*

Альтернативное доказательство теоремы 1.4 дано в [198], вариант его доказательства включён в [45, с. 191—192]. По поводу других доказательств и обобщений см. [23, 75, 79, 140, 141, 193] (ср. реферат в «Mathematical Reviews»). В. Ангелов [16, 17] получил обратный результат для равномерных пространств.

Следующий результат установлен Л. Яношем [85] для компактных метрических пространств.

Теорема 1.5. *Пусть* (X,ρ) *— компактное метрическое пространство и* $f\colon X \to X$ *— непрерывное отображение, такое что при некотором* $\xi \in X$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = \{\xi\}. \tag{1.6}$$

Тогда для каждого $\alpha \in (0,1)$ *существует метрика* ρ_α *на* X*, топологически эквивалентная* ρ*, такая что* f *—* α*-сжимающее отображение по отношению к* ρ_α *(*ξ *— единственная неподвижная точка).*

Отображение f, удовлетворяющее условию (1.6), называется *сдавливающим*.

М. Эдельстейн [53] предложил другое доказательство теоремы Яноша. С. Касахара [92] показал, что компактность является необходимым условием для выполнения заключения теоремы Яноша.

Теорема 1.6. *Пусть* (X,ρ) *— метрическое пространство. Если для каждого сдавливающего отображения* $f\colon X \to X$ *и каждого* $\alpha \in (0,1)$ *существует метрика* ρ_α *на* X*, топологически эквивалентная* ρ *и такая, что* f *—* α*-сжимающее отображение относительно* ρ_α*, то* X *компактно.*

В [86] Л. Янош обобщил этот результат на случай равномерных пространств (более точно, на случай вполне регулярных пространств с топологией, порождённой семейством полуметрик), см. также [15—18]. И. А. Рус [156] обобщил результат Л. Яноша на случай слабопикаровских отображений.

Напомним, что оператор f на метрическом пространстве (X,ρ) называется *слабопикаровским*, если для каждого $x \in X$ последовательность итераций $\big(f^n(x)\big)$ сходится к неподвижной точке f. Если дополнительно предел не зависит от x (т. е. f имеет единственную неподвижную точку), то f называется *оператором Пикара* (см. [158, 160]).

Другие обобщения теоремы Яноша можно найти в [109] (см. также [110, 111, 128—130]).

Рассмотрим следующие свойства для метрического пространства (X,ρ) и $\xi \in X$:

1) $f^n(x) \to \xi$ для каждого $x \in X$;

2) сходимость в 1) равномерна на некоторой окрестности $U \ni \xi$.

Условие 2) означает, что

$$\text{для каждого } \varepsilon > 0 \text{ найдётся } n_0 = n_0(\varepsilon), \\ \text{такое что } f^n(U) \subset B[\xi,\varepsilon] \text{ для каждого } n \geqslant n_0. \tag{1.7}$$

Равномерная сходимость на подмножестве $A \subset X$ последовательности (f^n) к точке ξ обозначается следующим образом: $f^n(A) \rightrightarrows \xi$.

С. Лидер [109] установил следующие результаты.

Теорема 1.7. *Пусть* (X,ρ) *— метрическое пространство и* $f\colon X \to X$.

1. *Для того чтобы существовала метрика* $\bar\rho$*, топологически эквивалентная* ρ *на* X*, такая что* f *— сжимающее отображение по отношению к* $\bar\rho$ *с непо-*

движной точкой ξ, необходимо и достаточно, чтобы f было непрерывно и выполнялись условия 1) *и* 2).

2. *Для того чтобы существовала ограниченная метрика $\bar{\rho}$, топологически эквивалентная ρ на X, такая что f — сжимающее отображение относительно $\bar{\rho}$ с неподвижной точкой ξ, необходимо и достаточно, чтобы f было непрерывно и $f^n(X) \to \xi$.*
3. *Для того чтобы существовала ограниченная метрика $\bar{\rho}$, равномерно эквивалентная ρ на X, такая что f — сжимающее отображение относительно $\bar{\rho}$, необходимо и достаточно, чтобы f было равномерно непрерывно и*

$$\operatorname{diam}_\rho\bigl(f^n(X)\bigr) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.8}$$

Ситуация оказывается более простой в случае ультраметрических пространств. Напомним, что *ультраметрическое пространство* — это метрическое пространство (X, ρ), такое что ρ удовлетворяет так называемому *строгому неравенству треугольника* (или *ультраметрическому неравенству*)

$$\rho(x, z) \leqslant \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\} \tag{1.9}$$

при всех $x, y, z \in X$. Приведём некоторые свойства таких пространств.

Предложение 1.8. *Пусть (X, ρ) — ультраметрическое пространство. Тогда при всех $x, y, z \in X$ и $r > 0$*

1) *если $\rho(x, y) \neq \rho(y, z)$, то $\rho(x, z) = \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$;*
2) *если $y \in B[x, r]$, то $B[x, r] = B[y, r]$;*
3) *если $r_1 \leqslant r_2$ и $B[x, r_1] \cap B[x, r_2] \neq \varnothing$, то $B[x, r_1] \subset B[x, r_2]$.*

Аналогичные утверждения выполнены для открытых шаров $B(x, r)$.

Ультраметрическое пространство (X, ρ) *сферически полно*, если каждый набор $B_i = B[x_i, r_i]$, $i \in I$, замкнутых попарно пересекающихся шаров из X имеет непустое пересечение: $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \varnothing$. Ясно, что сферически полное ультраметрическое пространство полно. Для метрических пространств такое свойство называется *свойством бинарного пересечения* (или свойством (2.∞.I.P.)).

С. Прис-Крамп [149] доказала следующее обращение теоремы Эдельстейна для слабо сжимающих отображений.

Теорема 1.9. *Ультраметрическое пространство (X, ρ) сферически полно, если и только если каждое слабо сжимающее отображение на X имеет (единственную) неподвижную точку.*

Замечание 1.10. В действительности С. Прис-Крамп [149] установила данный результат в более общем случае ультраметрики ρ со значениями во вполне упорядоченном множестве Γ с минимальным элементом 0, таким что $0 < \gamma$ при всех $\gamma \in \Gamma$.

Теоремы о неподвижных точках для слабо сжимающих и нерастягивающих отображений на сферически полных неархимедовых нормированных пространствах получены в [145].

Упомянем следующий результат для сжимающих отображений (см. [67]).

Теорема 1.11. *Пусть* (X, τ) — T_1*-топологическое пространство и* $f\colon X \to X$ — *функция на* X*. Следующие условия эквивалентны*:

1) а) *отображение* f *имеет единственную неподвижную точку* $\xi \in X$;
   б) *для каждого* $x \in X$ *последовательность* $\big(f^n(x)\big)$ *сходится к* ξ *относительно топологии* τ;
2) *существует полная ультраметрика* ρ *на* X*, такая что* $\rho\big(f(x), f(y)\big) \leqslant 2^{-1}d(x,y)$ *при всех* $x, y \in X$.

По поводу приложений данных теорем о неподвижных точках к логическому программированию см. [68].

Замечание 1.12. Неясно, порождает ли метрика ρ из пункта 2) топологию τ, однако для каждого $x \in X$ последовательность $\big(f^n(x)\big)$ сходится к ξ относительно топологии τ и метрики ρ.

1.3. Ни полнота ни компактность не являются необходимыми

В данном разделе мы приводим ряд примеров топологических пространств со свойством неподвижной точки для разных классов отображений. Пусть $\mathcal{F}$ — класс отображений множества X в себя. Скажем, что X обладает свойством неподвижной точки для класса $\mathcal{F}$, если каждое отображение $f \in \mathcal{F}$ имеет неподвижную точку в X.

Примеры 1.13 (М. Элекеш [54]).

1. Пространство $X = \big\{\big(x, \sin(1/x)\big)\colon x \in (0,1]\big\}$ является незамкнутым (и значит, неполным) подмножеством $\mathbb{R}^2$ со свойством неподвижной точки для сжимающих отображений.
2. При любом $n \in \mathbb{N}$ любое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, обладающее свойством неподвижной точки для сжатий, совпадает с $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, замкнуто.
3. Каждое подмножество $\mathbb{R}$, являющееся одновременно F_σ- и G_δ-подмножеством и обладающее свойством неподвижной точки для сжатий, замкнуто.
4. Существует незамкнутое G_δ-множество $X \subset \mathbb{R}$, обладающее свойством неподвижной точки для сжатий. Более того, известно, что $X \subset [0,1]$ и что каждое сжимающее отображение X в себя есть постоянное отображение.
5. Существует незамкнутое F_σ-подмножество $[0,1]$, обладающее свойством неподвижной точки для сжатий.
6. Существует ограниченное борелевское (и даже F_σ-) подмножество $\mathbb{R}$, обладающее свойством неподвижной точки для сжатий, которое неполно относительно любой эквивалентной метрики.
7. Для каждого целого $n > 0$ существует неизмеримое подмножество $\mathbb{R}^n$, обладающее свойством неподвижной точки для сжатий.

Мы докажем только пункт 1, при этом будут использованы рассуждения из [54]. Дж. М. Борвейн [34] дал альтернативное доказательство с использованием сходных рассуждений.

Доказательство пункта 1. Пусть

$$X = \{(x, \sin(1/x)) \colon x \in (0,1]\}$$

и $f \colon X \to X$ — сжимающее отображение с константой $0 < \alpha < 1$. Для $H \subset (0,1]$ мы полагаем

$$X_H := \{(x,y) \in X \colon x \in H\}.$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1$ таково, что $\alpha\sqrt{\varepsilon^2+4} < 2$. Тогда при всех $z = (x,y)$, $z' = (x', y')$ из X, $0 < x, x' < \varepsilon$, имеем

$$\|f(z) - f(z')\| \leqslant \alpha\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \alpha\sqrt{\varepsilon^2+4} < 2.$$

Как следствие, $X_{(0,\varepsilon)}$ не содержит одновременно локальный минимум и локальный максимум функции f. Так как множество $X_{(0,\varepsilon)}$ связно, то оно содержится в не более чем двух последовательных монотонных участках графика $\sin(1/x)$. Следовательно, существует $\delta_1 > 0$, такое что $f(X_{(0,\varepsilon)}) \subset X_{[\delta_1,1]}$ при некотором $\delta_1 > 0$. По компактности имеем $f(X_{[\varepsilon,1]}) \subset X_{[\delta_2,1]}$ при некотором $\delta_2 > 0$.

Полагая $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, мы находим, что $f(X) \subset X_{[\delta,1]}$, и значит, $f(X_{[\delta,1]}) \subset$ $\subset X_{[\delta,1]}$. Окончательно теорема Банаха о неподвижной точке, применённая к $X_{[\delta,1]}$, показывает, что f имеет неподвижную точку. □

Э. Х. Коннелл [42] привёл ряд примеров пространств со свойством неподвижной точки для непрерывных отображений. В них показывается, что «в общем случае компактность и свойство неподвижной точки связаны весьма опосредованно» [42].

Мы сначала упомянем один результат В. Л. Кли [102].

Теорема 1.14. *Локально связное локально компактное метрическое пространство со свойством неподвижной точки для непрерывных отображений компактно.*

Примеры 1.15 (Э. Х. Коннелл [42]).

1. Существует хаусдорфово топологическое пространство X со свойством неподвижной точки для непрерывных отображений, такое что компактные подмножества X — это в точности конечные множества.
2. Существует метрическое пространство X со свойством неподвижной точки для непрерывных отображений, такое что X^2 не обладает свойством неподвижной точки для непрерывных отображений.
3. Существует некомпактное сепарабельное локально стягиваемое метрическое пространство со свойством неподвижной точки для непрерывных отображений.

4. Существует компактное метрическое пространство X, не обладающее свойством неподвижной точки для непрерывных отображений, но содержащее всюду плотное подмножество Y, обладающее свойством неподвижной точки для непрерывных отображений.

1.4. Полнота и другие свойства, вытекающие из свойства неподвижной точки

В данном разделе мы приведём несколько теорем о неподвижных точках, которые обеспечивают полноту рассматриваемого пространства. С обзором результатов в этом направлении можно познакомиться в [30, 112, 171]. Хорошее изложение вопроса даётся также в диссертации А.-М. Николае [133].

Мы начнём с характеризации поля действительных чисел среди линейно упорядоченных полей.

Пусть R — упорядоченное поле. Непрерывное отображение $f\colon R \to R$ называется сжимающим, если существует $r < 1$ (из R), такое что $|f(x) - f(y)| \leqslant r|x - y|$ при всех $x, y \in R$ (где $|x| := \max\{x, -x\}$).

Следующий результат взят из `http://mathoverflow.net/questions/65874/converse-to-banach-s-fixed-point-theorem-for-ordered-fields`.

Отвечая на вопрос Дж. Проппа (см. `http://mathoverflow.net/questions/65874`), Дж. Лоутер доказал следующий результат.

Теорема 1.16. *Пусть R — упорядоченное поле, такое что любое сжимающее отображение на R имеет неподвижную точку. Тогда $R \cong \mathbb{R}$.*

Доказательство проходит в два этапа. Сначала показывается, что порядок R является архимедовым, а затем устанавливается, что любая последовательность Коши является сходящейся (полнота R). Известно, что эти два свойства характеризуют поле $\mathbb{R}$ в классе упорядоченных полей.

Т. К. Ху [71] первым получил характеризацию полноты в терминах сжимающих отображений.

Теорема 1.17. *Метрическое пространство (X, ρ) является полным, если и только если для каждого непустого замкнутого подмножества $Y \subset X$ каждое сжимающее отображение на Y имеет неподвижную точку из Y.*

Идея доказательства весьма проста. Пусть (x_n) — последовательность Коши в X. Если она обладает сходящейся подпоследовательностью, то она является сходящейся. Если это не так, то

$$\beta(x_n) := \inf\{\rho(x_n, x_m)\colon m > n\} > 0 \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

По заданному α, $0 < \alpha < 1$, можно по индукции построить подпоследовательность (x_{n_k}), такую что $\rho(x_i, x_j) \leqslant \alpha\beta(x_{n_{k-1}})$ при всех $i, j \geqslant n_k$. Тогда $Y = \{x_{n_k}\colon k \in \mathbb{N}\}$ — замкнутое подмножество X, а функция $f(x_{n_k}) = x_{n_{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$, — α-сжимающее отображение на Y, не имеющее неподвижных точек.

П. В. Субраманьям [169] предложил следующий результат о полноте.

Теорема 1.18. *Метрическое пространство (X, ρ) является полным, если любое отображение $f\colon X \to X$, удовлетворяющее условиям*

1) *существует $\alpha > 0$, такое что $\rho\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \alpha \max\big\{\rho\big(x, f(x)\big), \rho\big(y, f(y)\big)\big\}$ при всех $x, y \in X$,*
2) *$f(X)$ не более чем счётно,*

имеет неподвижную точку.

Условие 1) в этой теореме связано с условиям Каннана и Чаттерья: существует $\alpha \in (0, 1/2)$, такое что при всех $x, y \in X$,

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \alpha\big[\rho\big(x, f(x)\big) + \rho\big(y, f(y)\big)\big] \tag{K}$$

и, соответственно,

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \alpha\big[\rho\big(x, f(y)\big) + \rho\big(y, f(x)\big)\big]. \tag{Ch}$$

Р. Каннан и С. Чаттерья установили, что если f — отображение на полном метрическом пространстве, удовлетворяющее (K) или (Ch), то оно имеет неподвижную точку (см., к примеру, [160]). В [169] отмечается, что теорема 1.18 гарантирует полноту метрического пространства, на котором каждое отображение Каннана (или любое отображение Чаттерья) имеет неподвижную точку.

Дж. М. Борвейн [34] нашёл другой случай, когда свойство неподвижной точки для сжимающих отображений влечёт полноту.

Метрическое пространство (X, ρ) называется *равномерно липшицево связным*, если существует $L \geqslant 0$, такое что для любой пары x_0, x_1 точек из X существует отображение $g\colon [0,1] \to X$, такое что $g(0) = x_0$, $g(1) = x_1$ и

$$\rho\big(g(s), g(t)\big) \leqslant L|s-t|\rho\big(g(0), g(1)\big) \quad \text{при всех} \quad s, t \in [0,1]. \tag{1.10}$$

Ясно, что выпуклое подмножество C нормированного пространства X равномерно липшицево связно; отображение g, связывающее $x_0, x_1 \in C$, даётся формулой $g(t) = (1-t)x_0 + tx_1$, $t \in [0,1]$. В этом случае

$$\|g(s) - g(t)\| = |s-t|\,\|x_1 - x_0\| \quad \text{при всех} \quad s, t \in [0,1].$$

Из следующего результата вытекает, что выпуклое подмножество C линейного нормированного пространства X является полным, если и только если любое сжимающее отображение на C имеет неподвижную точку. В частности, это верно для нормированного пространства X.

Теорема 1.19. *Пусть C — равномерно липшицево связное подмножество полного метрическое пространство (X, ρ). Тогда следующие условия эквивалентны.*

1. *Множество C замкнуто.*
2. *Каждое сжимающее отображение на C имеет неподвижную точку.*

3. *Каждое сжимающее отображение на X, оставляющее C на месте, имеет неподвижную точку в C.*

Доказательство. Импликация $1 \Longrightarrow 2$ составляет теорему Банаха о неподвижной точке, импликация $2 \Longrightarrow 3$ очевидна.

Остаётся доказать импликацию $3 \Longrightarrow 1$. Если C не замкнуто, то существует точка $\bar{x} \in \bar{C} \setminus C$. Пусть $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ — последовательность попарно различных точек из C, такая что

$$\rho(x_k, \bar{x}) \leqslant \min\left\{\frac{1}{2^{k+4}}, \frac{L}{2^{k+4}}\right\} \tag{1.11}$$

при $k = 0, 1, \ldots$, где $L > 0$ — константа из условия равномерной липшицевой связности C. Мы имеем

$$\rho(x_k, x_{k+1}) \leqslant \min\left\{\frac{1}{2^{k+3}}, \frac{L}{2^{k+3}}\right\} \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.12}$$

Пусть $g_k \colon [0,1] \to C$ — функция, для которой $g_k(0) = x_k$, $g_k(1) = x_{k+1}$ и

$$\rho\big(g_k(s), g_k(t)\big) \leqslant L|s-t|\rho(x_k, x_{k+1}) \tag{1.13}$$

при всех $s, t \in [0,1]$. Определим $g \colon (0, \infty) \to C$ по формуле

$$g(t) = \begin{cases} x_0, & \text{если } 1 < t < \infty, \\ g_k(2^{k+1}t - 1), & \text{если } 1/2^{k+1} < t \leqslant 1/2^k. \end{cases} \tag{1.14}$$

Имеем $g(2^{-k}) = g_k(1) = x_{k+1}$.

Пусть $\Delta_k = (2^{-(k+1)}, 2^{-k}]$. Тогда с учётом (1.13), (1.12) мы получаем, что

$$\rho\big(g(s), g(t)\big) \leqslant L \cdot 2^{k+1}|s-t|\rho(x_k, x_{k+1}) \leqslant \\ \leqslant L \cdot 2^{k+1} \cdot |s-t| \cdot \frac{1}{2^{k+3}} = \frac{L}{4} \cdot |s-t| \leqslant L \cdot |s-t|, \quad s, t \in \Delta_k.$$

Так как $|s-t| < 1/2^{k+1}$, то

$$\rho\big(g(s), g(t)\big) \leqslant L \cdot 2^{k+1} \cdot \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{1}{2^{k+3}} = \frac{L}{2^{k+3}} \quad \text{при всех} \quad s, t \in \Delta_k.$$

Если $s \in \Delta_k$, $t \in \Delta_p$ и $k \leqslant p$, то из предыдущего неравенства и (1.11) получаем, что

$$\rho\big(g(s), g(2^{-k})\big) \leqslant \frac{L}{2^{k+3}},$$

$$\rho(x_{k+1}, x_{p+1}) \leqslant \rho(x_{k+1}, \bar{x}) + \rho(\bar{x}, x_{p+1}) \leqslant L\left(\frac{1}{2^{k+5}} + \frac{1}{2^{p+5}}\right),$$

$$\rho\big(g(2^{-p}), g(t)\big) \leqslant \frac{L}{2^{p+3}},$$

и значит,

$$\rho\big(g(s), g(t)\big) \leqslant \rho\big(g(s), g(2^{-k})\big) + \rho(x_{k+1}, x_{p+1}) + \rho\big(g(2^{-p}), g(t)\big) \leqslant$$
$$\leqslant L \cdot \left(\frac{1}{2^{k+3}} + \frac{1}{2^{k+5}} + \frac{1}{2^{p+5}} + \frac{1}{2^{p+3}}\right).$$

Отметим, что

$$s - t > \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{p+1}}.$$

Следовательно, если мы покажем, что

$$\frac{1}{2^{k+3}} + \frac{1}{2^{k+5}} + \frac{1}{2^{p+5}} + \frac{1}{2^{p+3}} \leqslant \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{p+1}}, \tag{1.15}$$

то будем иметь

$$\rho\big(g(s), g(t)\big) \leqslant L|s - t|. \tag{1.16}$$

Так как все дроби с p в знаменателе не превосходят соответствующих дробей с k в знаменателе, то

$$\frac{1}{2^{k+3}} + \frac{1}{2^{k+5}} + \frac{1}{2^{p+5}} + \frac{1}{2^{p+3}} + \frac{1}{2^{p+1}} \leqslant \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+4}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{13}{2^{k+4}} < \frac{1}{2^k},$$

что показывает, что (1.15) выполнено.

Теперь положим $g(0) = \bar{x}$. Если $t \in \Delta_k$, то

$$\rho\big(g(0), g(t)\big) \leqslant \rho(\bar{x}, x_{k+1}) + \rho\big(x_{k+1}, g(t)\big) \leqslant L\left(\frac{1}{2^{k+5}} + \frac{1}{2^{k+3}}\right) < L \cdot \frac{1}{2^{k+1}} < L \cdot t,$$

и значит, g удовлетворяет (1.16) при всех $s, t \in [0, \infty)$. Для $x \in X$ определим $h\colon X \to [0, \infty)$ и $f\colon X \to X$ соответственно как

$$h(x) := (2L)^{-1}\rho(x, \bar{x}) \quad \text{и} \quad f(x) := (g \circ h)(x).$$

Тогда при всех $x, x' \in X$

$$\rho\big(f(x), f(x')\big) = \rho\left(g\left(\frac{1}{2L}\rho(x, \bar{x})\right), g\left(\frac{1}{2L}\rho(x', \bar{x})\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant L \cdot \frac{1}{2L}\,|\rho(x, \bar{x}) - \rho(x', \bar{x})| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \rho(x, x'),$$

т. е. f — $(1/2)$-сжимающее отображение на X. Поскольку

$$f(C) = g\big(h(C)\big) \subset g\big((0, \infty)\big) \subset C,$$

то C инвариантно относительно f (т. е. $f(C) \subset C$). Так как

$$\bar{x} = g(0) = g\big(h(\bar{x})\big) = f(\bar{x}),$$

то единственной неподвижной точкой f является точка $\bar{x}$, которая не лежит в C, что противоречит условию. □

Отметим некоторые следствия.

Следствие 1.20.

1. *Равномерно липшицево связное метрическое пространство* (X, ρ) *является полным, если и только если оно обладает свойством неподвижной точки для сжимающих отображений.*
2. *Выпуклое подмножество* C *нормированного пространства* X *является полным, если и только если любое сжимающее отображение на* C *имеет неподвижную точку. Это верно, в частности, для самого нормированного пространства* X.

Доказательство. По пункту 1 достаточно рассмотреть в качестве X равномерно липшицево связное подмножество и его пополнение $\tilde{X}$. Результаты пункта 2 обсуждались перед теоремой 1.19. □

Пример 1.21 (Дж. М. Борвейн [34]). Существует звёздное незамкнутое подмножество $\mathbb{R}^2$ со свойством неподвижной точки для сжимающих отображений, но не для непрерывных функций. Действительно, рассмотрим множество

$$L_k = \mathrm{co}\left(\left\{(0,0), \left(1, \frac{1}{2^k}\right)\right\}\right), \quad k \in \mathbb{N},$$

и положим

$$C = \bigcup\{L_k \colon k \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда C звёздно по отношению к $(0,0)$ и незамкнуто, поскольку

$$\mathrm{co}(\{(0,0),(1,0)\}) \subset \bar{C} \setminus C.$$

Множество C обладает требуемыми свойствами (см. [34]).

С.-В. Сян [199] придал окончательную форму и обобщил результаты Дж. М. Борвейна. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Под дугой мы будем понимать непрерывную функцию $g \colon \Delta \to X$, где Δ — интервал из $\mathbb{R}$. Дуга $g \colon (0,1] \to X$ называется *полузамкнутой*, если

$$\text{для любого } \varepsilon > 0 \text{ найдётся } \delta > 0, \\ \text{такое что } \rho\big(g(s), g(t)\big) < \varepsilon \text{ при всех } s, t \in (0, \delta). \quad (1.17)$$

Дуга g называется *липшицево полузамкнутой*, если отображение g липшицево и удовлетворяет (1.17).

Метрическое пространство (X, ρ) называется *линейно полным*, если для каждой полузамкнутой дуги $g \colon (0,1] \to X$ существует предел $\lim\limits_{t \searrow 0} g(t)$. Если предел существует для каждой липшицевой полузамкнутой дуги $g \colon (0,1] \to X$, то X называется *липшицево полным*.

Имеются примеры [199], показывающие, что линейная полнота (а также липшицева полнота) слабее, чем обычная полнота, даже в случае линейно связного пространства. Из определения ясно, что липшицева полнота слабее линейной полноты.

Метрическое пространство (X,ρ) называется *локально линейно связным* (*локально липшицево связным*), если существует $\delta > 0$, такое что любые две точки из X x_0, x_1, такие что $\rho(x_0,x_1) \leqslant \delta$, могут быть соединены дугой (соответственно, липшицевой дугой).

Теорема 1.22 [199]. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство.*

1. *Если (X,ρ) имеет свойство неподвижной точки для сжимающих отображений, то X липшицево полно.*
2. *Если (X,ρ) локально липшицево связно, то X имеет свойство неподвижной точки для сжимающих отображений, если и только если оно липшицево полно.*

Метрическое пространство (X,ρ) обладает *свойством строгого сжатия*, если каждое отображение $f\colon X \to X$, являющееся сжимающим относительно некоторой метрики $\bar{\rho}$ на X, равномерно эквивалентной ρ, имеет неподвижную точку.

Теорема 1.23 [199]. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство.*

1. *Если (X,ρ) имеет свойство строгого сжатия, то X линейно полно.*
2. *Если (X,ρ) локально линейно связно, то X обладает свойством строгого сжатия, если и только если оно линейно полно.*

Т. Судзуки [177] доказал следующее обобщение принципа Банаха сжимающих отображений, обеспечивающее полноту. Пусть $\theta\colon [0,1) \to (1/2,1]$,

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant r \leqslant (\sqrt{5}-1)/2, \\ (1-r)r^{-2}, & \text{если } (\sqrt{5}-1)/2 \leqslant r \leqslant 2^{-1/2}, \\ (1+r)^{-1}, & \text{если } \quad 2^{-1/2} \leqslant r < 1. \end{cases} \tag{1.18}$$

Теорема 1.24. *Пусть (X,ρ) — полное метрическое пространство и $f\colon X \to X$.*

1. *Если существует $r \in [0,1)$, такое что*
$$\theta(r)\rho\bigl(x,f(x)\bigr) \leqslant \rho(x,y) \quad \text{влечёт} \quad \rho\bigl(f(x),f(y)\bigr) \leqslant r\rho(x,y) \tag{1.19}$$
при всех $x,y \in X$, то f имеет неподвижную точку $\bar{x}$ из X и $\lim\limits_n f^n(x) = \bar{x}$ для каждой точки $x \in X$.
2. *Более того, $\theta(r)$ является наилучшей константой из* (1.19)*, для которой данный результат выполнен в смысле, что для каждого $r \in [0,1)$ существуют полное метрическое пространство (X,ρ) и функция $f\colon X \to X$, не имеющая неподвижных точек и такая, что*
$$\theta(r)\rho\bigl(x,f(x)\bigr) < \rho(x,y) \quad \text{влечёт} \quad \rho\bigl(f(x),f(y)\bigr) \leqslant r\rho(x,y) \tag{1.20}$$
при всех $x,y \in X$.

Д. Паезано и П. Ветро [139] обобщили теорему Судзуки о неподвижной точке на случай частных метрических пространств и частично упорядоченных метрических пространств.

Имеет место следующий обратный результат.

Теорема 1.25 [177, следствие 1]. *Для метрического пространства (X, ρ) следующие условия эквивалентны.*

1. *Пространство (X, ρ) полно.*
2. *Существует $r \in (0,1)$, такое что каждое отображение $f\colon X \to X$, удовлетворяющее условию*
$$\frac{1}{10000}\,\rho\big(x, f(x)\big) \leqslant \rho(x,y) \ \text{ влечёт } \ \rho\big(f(x), f(y)\big) \leqslant r\rho(x,y), \tag{1.21}$$
при всех $x, y \in X$, имеет неподвижную точку.

Ясно, что функция $\theta(r)$ из (1.18) удовлетворяет равенству $\lim\limits_{r \nearrow 1} \theta(r) = 1/2$. Т. Судзуки [176] рассмотрел критический случай функций, заданных на подмножестве X банахова пространства E и удовлетворяющих условию
$$\frac{1}{2}\|x - f(x)\| \leqslant \|x - y\| \ \text{ влечёт } \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\| \tag{1.22}$$
при всех $x, y \in X$. В [176] условие (1.22) называется условием (C), а функции, удовлетворяющие этому условию, — *обобщённо нерастягивающими*.

Ясно, что каждое нерастягивающее отображение удовлетворяет (1.22), однако имеются разрывные функции, удовлетворяющие (1.22). Это показывает, что класс обобщённых нерастягивающих отображений строго шире, чем класс нерастягивающих отображений. Использование термина «обобщённо нерастягивающий» подтверждается тем фактом, что обобщённые нерастягивающие отображения имеют ряд общих свойств о неподвижных точках с нерастягивающими отображениями. К примеру, в некоторых банаховых пространствах E такие отображения имеют неподвижные точки на любом слабо компактном выпуклом подмножестве E и для каждого замкнутого ограниченного выпуклого подмножества $X \subset E$ и любого обобщённого нерастягивающего отображения f на X существует последовательность из почти неподвижных точек, т. е. такая последовательность (x_n) из X, что $\|x_n - f(x_n)\| \to 0$ при $n \to \infty$ (см. [176]). Аналогично обобщённое нерастягивающее отображение f является квазинерастягивающим в смысле, что $\|f(x) - y\| \leqslant \|x - y\|$ при всех $x \in X$ и $y \in \mathrm{Fix}(f)$ ($\mathrm{Fix}(f)$ — множество неподвижных точек f). Известно, что каждое нерастягивающее отображение с неподвижной точкой является квазинерастягивающим (по поводу неподвижных точек нерастягивающих отображений и других результатов о неподвижных точках см. [60, 65]).

По поводу дальнейших результатов и обобщений см. [47—49, 56, 117, 118].

П. Амато [11—13] предложил альтернативный поход к изучению взаимосвязей между неподвижными точками и полнотой в метрических пространствах. Для заданного метрического пространства (E, d) он рассмотрел пару (Y, Ψ), где Y — подмножество X, а Ψ — класс отображений на Y. Пара (Y, Ψ) называется пополняющим классом для E, если Ψ/ρ — пополнение (E, d), где ρ — (конкретная) полуметрика на Ψ и Ψ/ρ — фактор-пространство относительно отношения эквивалентности
$$f \equiv g \iff \rho(f, g) = 0.$$

Среди иных результатов П. Амато установил, что если E — бесконечномерное линейное нормированное пространство и K — компактное подмножество E, то можно взять $Y = E \setminus K$ и в качестве Ψ рассмотреть класс компактных сжимающих отображений на Y.

Мы также приведём характеризацию полноты в терминах неподвижных точек многозначных отображений. Через $\mathcal{P}_{\mathrm{cl}}(X)$ обозначим семейство всех непустых замкнутых подмножеств метрического пространства (X, ρ).

Для отображения $F\colon X \to \mathcal{P}_{\mathrm{cl}}(X)$ рассмотрим следующие два свойства:

(J1) $F\bigl(F(x)\bigr) \subset F(x)$ для каждого $x \in X$;

(J2) для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ найдётся точка $y \in F(x)$, такая что $\operatorname{diam} F(y) < \varepsilon$.

Для $F\colon X \to 2^X$ точка $\bar{x} \in X$ называется *неподвижной* точкой F, если $\bar{x} \in F(\bar{x})$, и *стационарной* точкой F, если $F(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$.

Теорема 1.26 [83, следствие 1]. *Для метрического пространства (X, ρ) следующие условия эквивалентны.*

1. *Пространство (X, ρ) полно.*
2. *Каждое многозначное отображение $F\colon X \to \mathcal{P}_{\mathrm{cl}}(X)$, удовлетворяющее* (J1) *и* (J2)*, имеет неподвижную точку.*
3. *Каждое многозначное отображение $F\colon X \to \mathcal{P}_{\mathrm{cl}}(X)$, удовлетворяющее* (J1) *и* (J2)*, имеет стационарную точку.*

Г.-Цз. Цзян [87] и Цз. Лю [116] нашли характеризации полноты метрического пространства в терминах существования неподвижных точек для различных классов многозначных отображений на этих пространствах.

Приведём ряд результатов из [87]. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Для ограниченного подмножества $Y \subset X$ через $\alpha(Y)$ обозначим меру Куратовского некомпактности множества Y:

$$\alpha(Y) := \inf\{\varepsilon > 0\colon Y \text{ покрывается конечным числом подмножеств } X \text{ диаметра не больше } \varepsilon\}. \tag{1.23}$$

Для многозначного отображения $F\colon X \to \mathcal{P}_{\mathrm{cl}}(X)$ рассмотрим следующие условия:

a) $F\bigl(F(x)\bigr) \subset F(x)$ для каждого $x \in X$;

b) существует последовательность (x_n) из X, такая что $x_{n+1} \in F(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_n \operatorname{diam}\bigl(F(x_n)\bigr) = 0$;

c) существует последовательность (x_n) из X, такая что $x_{n+1} \in F(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_n \alpha\bigl(F(x_n)\bigr) = 0$;

d) $\lim \rho(x_n, x_{n+1}) = 0$ для каждой последовательности (x_n) из X, такой что $x_{n+1} \in F(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 1.27. Условие a) эквивалентно (J1). Легко проверить, что (J2) влечёт b). Условие d) — это условие 4) из теоремы 2.12.

Рассмотрим следующие классы многозначных отображений $F\colon X \to \mathcal{P}_{\rm cl}(X)$:

$$AB(X) := \{F\colon F \text{ удовлетворяет a) и b)}\};$$
$$AC(X) := \{F\colon F \text{ удовлетворяет a) и c)}\};$$
$$AD(X) := \{F\colon F \text{ удовлетворяет a) и d)}\}.$$

Теорема 1.28 (Цзян [87]). *Для метрического пространства (X, ρ) следующие условия эквивалентны.*

1. *Метрическое пространство (X, ρ) полно.*
2. *Каждое F из $\mathrm{AB}(X)$ имеет неподвижную точку.*
3. *Каждое F из $\mathrm{AC}(X)$ имеет неподвижную точку.*
4. *Каждое F из $\mathrm{AD}(X)$ имеет неподвижную точку.*
5. *Каждое F из $\mathrm{AB}(X)$ имеет стационарную точку.*
6. *Каждое F из $\mathrm{AD}(X)$ имеет стационарную точку.*

2. Вариационный принцип Экланда и полнота

В данном разделе рассмотрим вариационный принцип Экланда в метрических и квазиметрических пространствах и изучим его связь с полнотой таких пространств.

2.1. Случай метрических пространств

В своей общей форме вариационный принцип Экланда формулируется следующим образом.

Теорема 2.1 (вариационный принцип Экланда). *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство и $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция. Пусть $\varepsilon > 0$ и $x_\varepsilon \in X$ таковы, что*

$$f(x_\varepsilon) \leqslant \inf f(X) + \varepsilon. \tag{2.1}$$

Тогда для любого $\lambda > 0$ существует точка $z = z_{\varepsilon,\lambda} \in X$, такая что

а) $f(z) + \dfrac{\varepsilon}{\lambda}\rho(z, x_\varepsilon) \leqslant f(x_\varepsilon)$;

б) $\rho(z, x_\varepsilon) \leqslant \lambda$;

в) $f(z) < f(x) + \dfrac{\varepsilon}{\lambda}\rho(z, x)$ *для всех* $x \in X,\ x \neq z$.

Данный результат имеет важное следствие при $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ в теореме 2.1.

Следствие 2.2. *В условиях теоремы 2.1 для каждого $\varepsilon > 0$ существует точка $y_\varepsilon \in X$, такая что* а) $f(y_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\rho(y_\varepsilon, x_\varepsilon) \leqslant f(x_\varepsilon)$;

б) $\rho(y_\varepsilon, x_\varepsilon) \leqslant \sqrt{\varepsilon}$;

в) $f(y_\varepsilon) < f(x) + \sqrt{\varepsilon}\rho(y_\varepsilon, x)$ *для всех* $x \in X,\ x \neq y_\varepsilon$.

Полагая $\lambda = 1$ в теореме 2.1, мы приходим к следующей форме вариационного принципа Экланда — *вариационному принципу Экланда в слабой форме.*

Следствие 2.3 (вариационный принцип Экланда — слабая форма). *Пусть* (X, ρ) — *полное метрическое пространство и* $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — *полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция. Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует точка* $y_\varepsilon \in X$*, такая что*

$$f(y_\varepsilon) \leqslant \inf f(X) + \varepsilon \tag{2.2}$$

и

$$f(y_\varepsilon) < f(y) + \varepsilon\rho(y, y_\varepsilon) \quad \text{для всех} \quad y \in X \setminus \{y_\varepsilon\}. \tag{2.3}$$

Отметим, что выполнение вариационного принципа Экланда (в слабой форме) влечёт полноту метрического пространства X. Этот факт был открыт Дж. Д. Вестоном [195] в 1977 г. и позднее переоткрыт Ф. Сулливаном [170] в 1981 г. (см. также обзор [171]). Более точно, имеет место следующий результат.

Предложение 2.4. *Пусть* (X, ρ) — *метрическое пространство. Тогда* X *является полным, если и только если для каждой полунепрерывной снизу функции* $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует точка* $y_\varepsilon \in X$*, такая что имеют место* (2.2) *и* (2.3) *из заключения следствия* 2.3.

Доказательство. Если X полно, до требуемое утверждение получается из следствия 2.3.

Доказательство обратного утверждения несложно. Для последовательности Коши (x_n) в X неравенство $|\rho(x, x_n) - \rho(x, x_{n+k})| \leqslant \rho(x_n, x_{n+k})$ показывает, что $\big(\rho(x, x_n)\big)$ — последовательность Коши в $\mathbb{R}$ для каждого $x \in X$. Как следствие, функция $f\colon X \to [0, \infty)$, заданная формулой $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x)$, $x \in X$, определена корректно. Пользуясь неравенствами $|\rho(x_n, x) - \rho(x_n, x')| \leqslant \rho(x, x')$, $n \in \mathbb{N}$, и устремляя n к ∞, имеем $|f(x) - f(x')| \leqslant \rho(x, x')$, что показывает, что f непрерывна. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что $\rho(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant n_0$ и $k \in \mathbb{N}$. При $k \to \infty$ мы получаем, что $f(x_n) \leqslant \varepsilon$ для каждого $n \geqslant n_0$. Как следствие, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, откуда вытекает $\inf f(X) = 0$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. По условию найдётся точка $y \in X$, такая что

$$f(y) \leqslant f(x) + \varepsilon\rho(x, y) \tag{2.4}$$

для каждого $x \in X$. Полагая $x = x_n$ в (2.4) и устремляя n к ∞, мы имеем $f(y) \leqslant \varepsilon f(y)$. Отсюда вытекает, что $f(y) = 0$, что эквивалентно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y) = 0$, т. е. (x_n) сходится к y. $\square$

Замечание 2.5. Из доказательства предложения 2.4 следует, что достаточно предположить, что заключение вариационного принципа Экланда в слабой форме выполнено только для липшицевых (даже для нерастягивающих) функций $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Вариационный принцип Экланда эквивалентен ряду теорем о неподвижных точках и геометрических результатов (свойство капли, теорема Каристи о неподвижной точке, теорема о цветочном лепестке и т. п., см. [144]). В данной работе мы остановимся только на теоремах Каристи о неподвижных точках для однозначных и для многозначных отображений.

Теорема 2.6 (теорема Каристи—Кирка о неподвижной точке). *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство и $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ — ограниченная снизу полунепрерывная снизу функция. Если отображение $f\colon X \to X$ удовлетворяет условию*

$$\rho\bigl(x, f(x)\bigr) \leqslant \varphi(x) - \varphi\bigl(f(x)\bigr), \quad x \in X, \tag{2.5}$$

то f имеет неподвижную точку в X.

В качестве ещё одного следствия из вариационного принципа Экланда получается многозначный вариант теоремы Каристи о неподвижной точке.

Теорема 2.7. *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция и $F\colon X \rightrightarrows X$ — многозначное отображение. Если отображение F удовлетворяет условию*

$$\rho(x, y) \leqslant \varphi(x) - \varphi(y) \qquad \text{для всех } \ x \in X \ \text{ и } \ y \in F(x), \tag{2.6}$$

то F имеет неподвижную точку, т. е. $x_0 \in F(x_0)$ для некоторого $x_0 \in X$.

Отсюда вытекает, что выполнение условий теоремы Каристи о неподвижной точки также влечёт полноту соответствующего метрического пространства.

Следствие 2.8. *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство. Если любая функция $f\colon X \to X$, удовлетворяющая условиям теоремы Каристи о неподвижной точке с некоторой полунепрерывной снизу функцией $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ имеет неподвижную точку в X, то метрическое пространство X полно.*

Замечание 2.9. После замены в теоремах 2.6, 2.7 и в следствии 2.8 функции φ на $\varphi - \inf \varphi(X)$ можно считать, не ограничивая общности, что φ полунепрерывная снизу и принимает значения из $\mathbb{R}_+$.

Замечание 2.10. Т. Судзуки [180] установил, что некоторые варианты сильного вариационного принципа Экланда (полученного П. Г. Георгиевым [57]) для банахова пространства X влекут рефлексивность X. В случае метрического пространства X это влечёт компактность каждого ограниченного замкнутого подмножества X (такое метрическое пространство X называется *ограниченно компактным*).

В [72] получена характеризация полноты метрического пространства в терминах существования слабого строгого минимума собственных ограниченных снизу полунепрерывных снизу функций, действующих на нём.

2.2. Другие принципы

В данном разделе мы представляем некоторые результаты, эквивалентные вариационному принципу Экланда. Первый из таких результатов установлен В. Такахаши [183] (см. также [88, 185]).

Теорема 2.11 (принцип Такахаши). *Пусть* (X, ρ) — *полное метрическое пространство и* $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ — *собственная полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция. Если для каждого* $x \in X$, *для которого* $\inf f(X) < f(x)$, *существует точка* $y_x \in X \setminus \{x\}$, *такая что*

$$f(y_x) + \rho(x, y_x) \leqslant f(x), \tag{2.7}$$

то существует точка $x_0 \in X$, *такая что* $f(x_0) = \inf f(X)$.

Другой результат, также эквивалентный вариационному принципу Экланда, был установлен в [43].

Теорема 2.12. *Пусть* (X, ρ) — *полное метрическое пространство и* $F\colon X \rightrightarrows X$ — *многозначная функция, удовлетворяющая следующим условиям*:

1) *образ* $F(x)$ *замкнут для каждой* $x \in X$;
2) $x \in F(x)$ *для каждой* $x \in X$;
3) *если* $x_2 \in F(x_1)$, *то* $F(x_2) \subset F(x_1)$ *при всех* $x_1, x_2 \in X$;
4) $\lim\limits_n \rho(x_n, x_{n+1}) = 0$ *для каждой последовательности* (x_n) *из* X, *такой что* $x_{n+1} \in F(x_n)$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Тогда существует $x_0 \in X$, *такая что* $F(x_0) = \{x_0\}$. *Более того, для каждой* $\bar{x} \in X$ *существует такая точка в* $F(\bar{x})$.

Данный результат можно переформулировать в терминах порядка на X.

Теорема 2.13. *Пусть* (X, ρ) — *полное метрическое пространство и* $\preceq$ — *непрерывный частичный порядок на* X. *Если* $\lim\limits_n \rho(x_n, x_{n+1}) = 0$ *для каждой возрастающей последовательности* $x_1 \preceq x_2 \preceq \ldots$ *в* X, *то в* X *имеется максимальный элемент. При этом для каждого* $\bar{x} \in X$ *существует максимальный элемент во множество* $\{x \in X\colon \bar{x} \preceq x\}$.

Замечание 2.14. Если $F\colon X \rightrightarrows X$ — многозначное отображение, то для каждой $x_0 \in X$ последовательность (x_n), такая что $x_n \in F(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, называется обобщённой последовательностью Пикара. По поводу свойств многозначных операторов Пикара, операторов, определяемых в терминах сходимости обобщённых последовательности Пикара, см. [146, 147].

Порядок $\preceq$ на метрическом пространстве называется *замкнутым*, если из того что $x_n \preceq y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, вытекает, что $\lim\limits_n x_n \preceq \lim\limits_n y_n$, при условии, что оба предела существуют. Это эквивалентно тому, что график

$$\mathrm{Graph}(\preceq) := \{(x, y) \in X \times X\colon x \preceq y\}$$

замкнут в $X \times X$ в топологии произведения.

Замечание 2.15. Поскольку каждый из этих результатов в метрическом пространстве (X,ρ) эквивалентен вариационному принципу Экланда, то выполнение каждого из них влечёт полноту рассматриваемого метрического пространства (X,ρ). Отметим, что свойство полноты упоминается в [43, теорема 3.3].

2.3. Вариационный принцип Экланда в квазиметрических пространствах

В данном разделе мы исследуем вариационный принцип Экланда и теорему Каристи о неподвижной точке в контексте квазиметрических пространств.

Квазиметрические пространства

Коротко опишем основные свойства квазиметрических пространств (детали и необходимые ссылки содержатся в монографии [41]).

Определение 2.16. *Квазиполуметрика* на произвольном множестве X — это отображение $\rho\colon X\times X\to[0;\infty)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\text{(QM1)}\quad \rho(x,y)\geqslant 0,\quad \rho(x,x)=0,$$
$$\text{(QM2)}\quad \rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$$

при всех $x,y,z\in X$. Если при этом

$$\text{(QM3)}\quad \rho(x,y)=\rho(y,x)=0 \ \text{ влечёт } \ x=y \ \text{ при всех } \ x,y\in X,$$

то ρ называется а *квазиметрикой*. Пара (X,ρ) называется *квазиполуметрическим пространством* (соответственно *квазиметрическим пространством*). Двойственной к квазиполуметрике ρ является квазиполуметрика $\bar\rho(x,y)=\rho(y,x)$, $x,y\in X$. Отображение $\rho^s(x,y)=\max\{\rho(x,y),\bar\rho(x,y)\}$, $x,y\in X$, является полуметрикой на X; оно является метрикой, если и только если ρ — квазиметрика.

Если (X,ρ) — квазиполуметрическое пространство, то для $x\in X$ и $r>0$ открытый и замкнутый шары в X определяются соответственно как

$$B_\rho(x,r)=\{y\in X\colon \rho(x,y)<r\},$$
$$B_\rho[x,r]=\{y\in X\colon \rho(x,y)\leqslant r\}.$$

Топология τ_ρ квазиполуметрического пространства (X,ρ) задаётся семейством $\mathcal{V}_\rho(x)$ окрестностей произвольной точки $x\in X$:

$$V\in\mathcal{V}_\rho(x)\iff \text{найдётся } r>0\text{, такое что } B_\rho(x,r)\subset V \iff$$
$$\iff \text{найдётся } r'>0\text{, такое что } B_\rho[x,r']\subset V.$$

Сходимость $x_n\xrightarrow{\rho}x$ последовательности (x_n) к x относительно τ_ρ называется ρ-сходимостью и характеризуется следующим образом:

$$x_n\xrightarrow{\rho}x \iff \rho(x,x_n)\to 0. \tag{2.8}$$

Аналогично
$$x_n \xrightarrow{\bar\rho} x \iff \bar\rho(x, x_n) \to 0 \iff \rho(x_n, x) \to 0. \qquad (2.9)$$

Будучи пространством, наделённым двумя топологиями τ_ρ и $\tau_{\bar\rho}$, квазиметрическое пространство может рассматриваться как битопологическое пространство в смысле Келли [96]. Вопрос квазиметризуемости топологий обсуждается в [107].

Приведём важный пример квазиметрического пространства.

Пример 2.17. Пусть $X = \mathbb{R}$ и $q(x, y) = (y - x)^+$, где α^+ — положительная часть действительного числа α. Тогда $\bar q(x, y) = (x = y)^+$ и $q^s(x, y) = |y - x|$. Шары задаются следующим образом:
$$B_q(x, r) = (-\infty, x + r) \quad \text{и} \quad B_{\bar q}(x, r) = (x - r, \infty).$$

Отметим следующие топологически свойства квазиполуметрических пространств.

Предложение 2.18 (см. [41]). *Если (X, ρ) — квазиполуметрическое пространство, то*

1) *шар $B_\rho(x, r)$ τ_ρ-открыт, шар $B_\rho[x, r]$ $\tau_{\bar\rho}$-замкнут. Шар $B_\rho[x, r]$ не обязан быть τ_ρ-замкнутым;*
2) *если ρ — квазиметрика, то топология τ_ρ удовлетворяет аксиоме T_0, но не обязательно удовлетворяет аксиоме T_1 (и значит, и T_2, как в случае метрических пространств). Топология τ_ρ удовлетворяет аксиоме T_1, если и только если $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$;*
3) *для каждого $x \in X$ отображение $\rho(x, \cdot)\colon X \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ τ_ρ-полунепрерывно сверху и $\tau_{\bar\rho}$-полунепрерывно снизу. Для каждого $y \in X$ отображение $\rho(\cdot, y)\colon X \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ τ_ρ-полунепрерывно снизу и $\tau_{\bar\rho}$-полунепрерывно сверху;*
4) *если отображение $\rho(x, \cdot)\colon X \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ τ_ρ-непрерывно в каждой точке $x \in X$, то топология τ_ρ регулярна. Если $\rho(x, \cdot)\colon X \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\tau_{\bar\rho}$-непрерывно для каждого $x \in X$, то топология $\tau_{\bar\rho}$ полуметризуема.*

Полнота в квазиметрических пространств

Отсутствие симметрии в определении квазиметрических и квазиравномерных пространств вызывает ряд сложностей, особенно в части полноты, компактности и вполне ограниченности таких пространств. Имеется целый ряд определений полноты квазиметрических и квазиравномерных пространств, они все согласуются со стандартным понятием полноты для метрических и равномерных пространств; каждое из таких определений имеет свои преимущества и недостатки.

Поскольку в дальнейшем мы будем работать только с одним из таких определений, то мы не будем определять другие виды полнот, отсылая заинтересованного читателя к монографии [41]) по поводу других определений последовательности Коши и их свойств.

Последовательность $(x_n) \subset (X,\rho)$ называется *левой ρ-K-последовательностью Коши*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое что для любых n, m, таких что $n_\varepsilon \leqslant n < m$, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда для любых $n \geqslant n_\varepsilon$ и $k \in \mathbb{N}$ $\rho(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon$. Аналогично последовательность $(x_n) \subset (X,\rho)$ называется *правой ρ-K-последовательностью Коши*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое что для любых n, m, таких что $n_\varepsilon \leqslant n < m$, $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда для любых $n \geqslant n_\varepsilon$ и $k \in \mathbb{N}$ $\rho(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon$.

Имеют место следующие результаты [41].

Замечания 2.19. Пусть (X,ρ) — квазисимметричное пространство.

1. Ясно, что последовательность является левой ρ-K-последовательность Коши, если и только если она правая $\bar{\rho}$-K-последовательность Коши.
2. Пусть (x_n) — левая ρ-K-последовательность Коши. Если (x_n) содержит подпоследовательность, которая $\tau(\rho)$- ($\tau(\bar{\rho})$-) сходится к некоторой $x \in X$, то последовательность (x_n) $\tau(\rho)$- (соответственно $\tau(\bar{\rho})$-) сходится к x.
3. Если $(x_n) \subset X$ такова, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \infty$ (соответственно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(x_{n+1}, x_n) < \infty$), то она является левой (правой) ρ-K-последовательностью Коши.
4. Имеются примеры, показывающие, что ρ-сходящаяся последовательность не обязана быть левой ρ-K-последовательностью Коши, т. е. в несимметричном случае ситуация гораздо более сложная, чем в симметричном.
5. Если каждая сходящаяся последовательность в регулярном квазиметрическом пространстве (X,ρ) содержит левую K-подпоследовательность Коши, то X метризуемо.

Квазиметрическое пространство (X,ρ) *лево-ρ-K-полно*, если каждая левая ρ-K-последовательность Коши ρ-сходится; *правая ρ-K-полнота* определяется аналогично. Квазиметрическое пространство (X,ρ) называется *лево- (право-) полным по Смиту*, если каждая левая (правая) ρ-K-последовательность Коши является ρ^s-сходящейся; пространство *биполно*, если ассоциированное метрическое пространство (X,ρ^s) полно.

Замечание 2.20. Несмотря на понятный факт, что свойство быть левой ρ-K-последовательностью Коши эквивалентно свойству быть правой $\bar{\rho}$-K-последовательностью Коши, оказывается, что левая ρ-K-полнота и правая $\bar{\rho}$-K-полнота не равны из-за того, что правая $\bar{\rho}$-полнота означает, что каждая левая ρ-последовательность Коши сходится в $(X,\bar{\rho})$, в то время как левая ρ-полнота означает сходимость такой последовательности в пространстве (X,ρ). Также легко проверить, что полнота по Смиту (левая или правая) квазиметрического пространства (X,ρ) влечёт полноту ассоциированного метрического пространства (X,ρ^s) (т. е. биполноту квазиметрического пространства (X,ρ)).

Пример 2.21. Пространства $(\mathbb{R}, q)$ и $(\mathbb{R}, \bar{q})$ из примера 2.17 не являются право-q-K-полными. Последовательность $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, является правой

q-K-последовательностью Коши, не сходящейся в $(\mathbb{R}, q)$, а $y_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$, — правая $\bar{q}$-K-последовательность Коши, не сходящаяся в $(\mathbb{R}, \bar{q})$. В самом деле, $q(x_{n+k}, x_n) = (n - n - k)^+ = 0$ при всех $n, k \in \mathbb{N}$. Для $x \in \mathbb{R}$ пусть $n_x \in \mathbb{N}$ таково, что $n_x > x$. Тогда $q(x, x_n) = n - x \geqslant n_x - x > 0$ при всех $n \geqslant n_x$. Случай пространства $(\mathbb{R}, \bar{q})$ и последовательности $y_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$, аналогичен.

Следующий вариант вариационного принципа Экланда в квазиметрических пространствах был предложен в [39].

Теорема 2.22 (вариационный принцип Экланда). *Предположим, что (X, ρ) — T_1-квазиметрическое пространство и $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ — собственная ограниченная снизу функция. Для $\varepsilon > 0$ пусть $x_\varepsilon \in X$ таково, что*

$$f(x_\varepsilon) \leqslant \inf f(X) + \varepsilon. \tag{2.10}$$

1. *Если (X, ρ) право-ρ-K-полно и f ρ-полунепрерывна снизу, то для каждого $\lambda > 0$ существует точка $z = z_{\varepsilon,\lambda} \in X$, такая что*
   а) $f(z) + (\varepsilon/\lambda)\rho(z, x_\varepsilon) \leqslant f(x_\varepsilon)$;
   б) $\rho(z, x_\varepsilon) \leqslant \lambda$;
   в) $f(z) < f(x) + (\varepsilon/\lambda)\rho(x, z)$ *для всех* $x \in X \setminus \{z\}$.
2. *Если (X, ρ) право-$\bar{\rho}$-K-полно и f $\bar{\rho}$-полунепрерывна снизу, то для каждого $\lambda > 0$ существует точка $z = z_{\varepsilon,\lambda} \in X$, такая что*
   а′) $f(z) + (\varepsilon/\lambda)\rho(x_\varepsilon, z) \leqslant f(x_\varepsilon)$;
   б′) $\rho(x_\varepsilon, z) \leqslant \lambda$;
   в′) $f(z) < f(x) + (\varepsilon/\lambda)\rho(z, x)$ *для всех* $x \in X \setminus \{z\}$.

Как и выше, полагая $\lambda = 1$ в теореме 2.22, мы приходим к вариационному принципу Экланда в слабой форме для квазиметрических пространств.

Следствие 2.23 (вариационный принцип Экланда — слабая форма). *Предположим, что (X, ρ) — T_1-квазиметрическое пространство и $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \cup \{\infty\}$ — собственная ограниченная снизу функция.*

1. *Если X право-ρ-K-полно и f ρ-полунепрерывна снизу, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует точка $y_\varepsilon \in X$, такая что*
   а) $f(y_\varepsilon) \leqslant \inf f(X) + \varepsilon$;
   б) $f(y_\varepsilon) < f(x) + \varepsilon\rho(x, y_\varepsilon)$ *для всех* $x \in X \setminus \{y_\varepsilon\}$.
2. *Если X право-$\bar{\rho}$-K-полно и f $\bar{\rho}$-полунепрерывна снизу, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует точка $y_\varepsilon \in X$, такая что*
   а) $f(y_\varepsilon) \leqslant \inf f(X) + \varepsilon$;
   б) $f(y_\varepsilon) < f(x) + \varepsilon\rho(y_\varepsilon, x)$ *для всех* $x \in X \setminus \{y_\varepsilon\}$.

Следующий результат — вариант теоремы Каристи о неподвижной точке для квазиметрических пространств.

Теорема 2.24 (теорема Каристи—Кирка о неподвижной точке [39])). *Пусть (X, ρ) — T_1-квазиметрическое пространство, $f\colon X \to X$ и $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$.*

1. *Если* X *право-*ρ*-*K*-полно,* φ *ограничена снизу и* ρ*-полунепрерывна снизу, а отображение* f *удовлетворяет условию*

$$\rho(f(x),x) \leqslant \varphi(x) - \varphi\big(f(x)\big), \quad x \in X, \tag{2.11}$$

то f *имеет неподвижную точку в* X.

2. *Если* X *право-*$\bar{\rho}$*-*K*-полно,* φ *ограничена снизу и* $\bar{\rho}$*-полунепрерывна снизу, а отображение* f *удовлетворяет условию*

$$\rho\big(x,f(x)\big) \leqslant \varphi(x) - \varphi\big(f(x)\big), \quad x \in X, \tag{2.12}$$

то f *имеет неподвижную точку в* X.

Также имеется многозначный вариант этой теоремы [39].

Теорема 2.25 (теорема Каристи—Кирка о неподвижной точке — многозначный вариант). *Пусть* (X,ρ) — T_1*-квазиметрическое пространство,* $F\colon X \rightrightarrows X$ — *многозначное отображение, такое что* $F(x) \neq \varnothing$ *для каждого* $x \in X$, *и* $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$.

1. *Если* X *право-*ρ*-*K*-полно,* φ *ограничена снизу и* ρ*-полунепрерывна снизу, а отображение* F *удовлетворяет условию*

$$\rho(y,x) \leqslant \varphi(x) - \varphi(y) \ \text{ для любых } \ x \in X,\ y \in F(x), \tag{2.13}$$

то F *имеет неподвижную точку в* X.

2. *Если* X *право-*$\bar{\rho}$*-*K*-полно,* φ *ограничена снизу и* $\bar{\rho}$*-полунепрерывна снизу, а отображение* F *удовлетворяет условию*

$$\rho(x,y) \leqslant \varphi(x) - \varphi(y) \ \text{ для любых } \ x \in X,\ y \in F(x), \tag{2.14}$$

то F *имеет неподвижную точку в* X.

Как и в симметричном случае, слабая форма вариационного принципа Экланда эквивалентна теореме Каристи о неподвижной точке [39].

Предложение 2.26. *Пусть* (X,ρ) — T_1*-квазиметрическое пространство. Следующие два утверждения эквивалентны.*

(wEk) *Для любого* ρ*-замкнутого* $Y \subset X$, *любой собственной ограниченой снизу* ρ*-полунепрерывной снизу функции* $f\colon Y \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует точка* $x_\varepsilon \in Y$, *такая что*

$$f(x_\varepsilon) < f(y) + \varepsilon\rho(y,x_\varepsilon) \ \text{ для всех } \ y \in Y \setminus \{x_\varepsilon\}. \tag{2.15}$$

(C) *Для любого* ρ*-замкнутого* $Y \subset X$ *и любой* ρ*-полунепрерывной снизу функции* $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}$ *любая функция* $g\colon Y \to Y$, *удовлетворяющая* (2.11), *на* Y *имеет неподвижную точку.*

Как мы уже видели, в случае метрического пространства X слабая форма вариационного принципа Экланда влечёт полноту X (предложение 2.4). Следующий результат [39] содержит частично обратные утверждения в квазиметрическом случае.

Предложение 2.27. *Пусть (X, ρ) — T_1-квазиметрическое пространство.*

1. *Если для каждой ρ-полунепрерывной снизу функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует точка $y_\varepsilon \in X$, такая что*
$$f(y_\varepsilon) \leqslant f(x) + \varepsilon\rho(y_\varepsilon, x) \quad \text{для всех} \quad x \in X, \tag{2.16}$$
то квазиметрическое пространство X лево-ρ-K-полно.
2. *Если для каждой $\bar{\rho}$-полунепрерывной снизу функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует точка $y_\varepsilon \in X$, такая что*
$$f(y_\varepsilon) \leqslant f(x) + \varepsilon\rho(x, y_\varepsilon) \quad \text{для всех} \quad x \in X, \tag{2.17}$$
то квазиметрическое пространство X лево-$\bar{\rho}$-K-полно.

Доказательство. Мы рассуждаем аналогично доказательству предложения 2.4 с учётом того, что квазиметрика удовлетворяет более слабым свойствам непрерывности, чем метрика (см. предложение 2.18).

Чтобы доказать пункт 1, предположим, что (x_n) — левая ρ-K-последовательность Коши в X. Мы сначала покажем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность $\big(\rho(x, x_n)\big)$ ограничена. В самом деле, если $n_1 \in \mathbb{N}$ таково, что $\rho(x_{n_1}, x_{n_1+k}) \leqslant 1$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то при всех $k \in \mathbb{N}$
$$\rho(x, x_{n_1+k}) \leqslant \rho(x, x_{n_1}) + \rho(x_{n_1}, x_{n_1+k}) \leqslant \rho(x, x_{n_1} + 1,$$
что доказывает ограниченность последовательности $\big(\rho(x, x_n)\big)$. Это показывает корректность определения функции $f\colon X \to [0, \infty)$, задаваемой формулой
$$f(x) = \limsup_{n\to\infty} \rho(x, x_n), \quad x \in X.$$

Для $x, x' \in X$ при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем
$$\rho(x, x_n) \leqslant \rho(x, x') + \rho(x', x_n).$$
Переходя к верхнему пределу в обеих частях неравенства, мы видим, что
$$f(x') \geqslant f(x) - \rho(x, x').$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ неравенство $\rho(x, x') < \varepsilon$ влечёт $f(x') > f(x) - \varepsilon$, а значит, f ρ-полунепрерывна снизу в каждой $x \in X$.

Аналогичные рассуждения показывают, что из неравенства $\rho(x', x_n) \leqslant \rho(x', x) + \rho(x, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, следует, что $f(x') \leqslant f(x) + \rho(x', x)$, что показывает, что функция f $\bar{\rho}$-полунепрерывна сверху в каждой x. Теперь мы покажем, что
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0. \tag{2.18}$$

В самом деле, для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое что
$$\rho(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_\varepsilon, \quad k \in \mathbb{N},$$
что даёт
$$0 \leqslant f(x_n) = \limsup_{k} \rho(x_n, x_{n+k}) \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_\varepsilon,$$

т. е. $\lim_n f(x_n) = 0$. Пусть теперь $y \in X$ удовлетворяет (2.16) при $\varepsilon = 1/2$. Полагая $x = x_n$, имеем

$$f(y) \leqslant f(x_n) + \frac{1}{2}\,\rho(y, x_n) \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Переходя к верхнему пределу и учитывая (2.18), получаем

$$f(y) = \frac{1}{2}\,f(y),$$

что даёт $f(y) = 0$. Так как

$$f(y) = 0 \iff \limsup_n \rho(y, x_n) = 0 \iff \lim_n \rho(y, x_n) = 0,$$

то последовательность (x_n) ρ-сходится к y, что доказывает левую ρ-K-полноту квазиметрического пространства X.

Доказательство пункта 2 аналогично, при этом используется $\bar{\rho}$-полунепрерывность снизу и ρ-полунепрерывность сверху функции $g\colon X \to [0, \infty)$, заданной формулой

$$g(x) = \limsup_n \rho(x_n, x), \quad x \in X. \qquad \square$$

Замечание 2.28. Отметим, что предложение 2.27 не является собственно обращением (в смысле полноты) слабой формы принципа Экланда. В действительности мы имеем «перекрёстное» обращение, что будет объяснено ниже.

Из пункта 2 следствия 2.23 вытекает, что если квазиметрическое пространство (X, ρ) право-$\bar{\rho}$-K-полно, то для каждой $\bar{\rho}$-полунепрерывной снизу функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует точка $y_\varepsilon \in X$, удовлетворяющая (2.16).

С другой стороны, выполнение (2.16) для любой ρ-полунепрерывной снизу функции влечёт левую ρ-K-полноту квазиметрического пространства (X, ρ). Понятно, что в метрическом случае каждое из этих условий сводится к полноте X.

С учётом того что последовательность (x_n) из X является правой $\bar{\rho}$-K-последовательностью Коши, если и только если она является левой ρ-K-последовательностью Коши, мы имеем следующие результаты о полноте:

(X, ρ) право-$\bar{\rho}$-K-полно $\iff$

$\iff$ для каждой левой ρ-K-последовательности Коши (x_n) из X найдётся $x \in X$, такая что $x_n \xrightarrow{\bar{\rho}} x$.

Следовательно,

(X, ρ)лево-ρ-K-полно $\iff$

$\iff$ для каждой левой ρ-K-последовательности Коши (x_n) из X найдётся $x \in X$, такая что $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Правильный обратный результат был предложен Э. Карапинаром и С. Ромагуерой [90]. Для этого им пришлось немного модифицировать определение полунепрерывной снизу функции.

Пусть (X,ρ) — квазиметрическое пространство. Собственная функция $f\colon X\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ называется *почти* ρ-полунепрерывной снизу в точке $x\in X$, если $f(x)\leqslant\liminf_n f(x_n)$ для каждой ρ-сходящейся к x последовательности (x_n) различных точек из X. Ясно, что ρ-полунепрерывная снизу функция необходимо почти ρ-полунепрерывная снизу. Обратное утверждение имеет место, если топология τ_ρ удовлетворяет аксиоме T_1 (эквивалентной тому, что $\rho(x,y)>0$ при любых различных $x,y\in X$).

Следующий простой пример показывает, что эти понятия различны в T_0-квазиметрических пространствах.

Пример 2.29. Пусть $X=\{0,1\}$, $\rho(0,0)=\rho(0,1)=\rho(1,1)=0$ и $\rho(1,0)=1$. Тогда каждая функция $f\colon X\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ почти ρ-полунепрерывна снизу (нет последовательностей из различных точек), но функция $f(0)=1$, $f(1)=0$ не является ρ-полунепрерывной снизу в $x=0$. В самом деле, для $x_n=1$ выполнено $\rho(0,x_n)=0\to 0$, $f(x_n)=0$ и $f(0)=1>0=\liminf_n f(x_n)$.

Теорема 2.30. *Для квазиполуметрического пространства (X,ρ) следующие условия эквивалентны.*

1. *(X,ρ) право-K-секвенциально полно.*
2. *Для каждого отображения T пространства X в себя и любой собственной ограниченной снизу почти ρ-полунепрерывной снизу функции $\varphi\colon X\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, удовлетворяющей неравенству*
$$\rho(T(x),x)+\varphi\big(T(x)\big)\leqslant\varphi(x) \tag{2.19}$$
при всех $x\in X$, существует точка $z=z_{T,\varphi}\in X$, такая что $\varphi(z)=\varphi\big(T(z)\big)$.
3. *Для каждой собственной ограниченной снизу почти ρ-полунепрерывной снизу функции $f\colon X\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ и каждого $\varepsilon>0$ существует точка $y_\varepsilon\in X$, такая что*
   а) $f(y_\varepsilon)\leqslant\inf f(X)+\varepsilon$;
   б) $f(y_\varepsilon)<f(x)+\varepsilon\rho(x,y_\varepsilon)$ *при всех* $x\in X\setminus\overline{\{y_\varepsilon\}}$;
   в) $f(y_\varepsilon)\leqslant f(x)$ *при всех* $x\in\overline{\{y_\varepsilon\}}$.

Доказательство. Мы дадим доказательство только для импликации $3\Longrightarrow 1$.

Рассуждая от противного, предположим, что пространство (X,ρ) не является право-K-полным. Тогда существует правая K-последовательность Коши (x_n) из X, не имеющая предела. Это влечёт, что (x_n) не имеет сходящихся подпоследовательностей (см. замечание 2.19).

Рассмотрим два случая.

Предположим, что
$$\text{существует } m, \text{ такое что для каждого } k\geqslant m \text{ найдётся } n_k>k, \text{ такое что } \rho(x_{n_k},x_k)>0. \tag{2.20}$$

Тогда при $n_1 = m$ существует $n_2 > n_1$, такое что $\rho(x_{n_2}, x_{n_1}) > 0$. Полагая $k = n_2$, мы получаем $n_3 > n_2$, такое что $\rho(x_{n_3}, x_{n_2}) > 0$. Продолжая аналогично, мы получаем последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$, такую что $\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Переходя при необходимости к подпоследовательностям и при необходимости перенумеровывая, мы можем далее предполагать, что

$$0 < \rho(x_{n+1}, x_n) < \frac{1}{2^{n+1}} \tag{2.21}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$.

Если (2.20) не выполнено, то

$$\text{для каждого } m \text{ существует } k \geqslant m, \text{ такое что} \\ \text{для всех } n > k \text{ выполнено } \rho(x_n, x_k) = 0. \tag{2.22}$$

При $m = 1$ пусть $k = n_1 \geqslant 1$ таково, что $\rho(x_n, x_{n_1}) = 0$ при всех $n > n_1$. Теперь при $m = 1+n_1$ пусть $n_2 > n_1$ таково, что $\rho(x_n, x_{n_2}) = 0$ при всех $n > n_2$. Отсюда следует, что $\rho(x_{n_2}, x_{n_1}) = 0$.

Продолжая аналогично, мы получаем последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$, такую что $\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Произведя перенумерацию, если это необходимо, можно считать, что (x_n) такова, что

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = 0 \tag{2.23}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$.

Положим

$$B := \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$$

и определим $f \colon X \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2^{n-1}, & \text{если } x = x_n \text{ при некотором } n \in \mathbb{N}, \\ 2, & \text{если } x \in X \setminus B. \end{cases} \tag{2.24}$$

Функция f является почти ρ-полунепрерывной снизу. Действительно, пусть $x \in X$ и пусть (y_n) — последовательность различных точек из X, сходящаяся к x. Если бы множество $\{n \in \mathbb{N} \colon y_n \in B\}$ было бесконечным, то нашлись бы натуральные $m_1 < m_2 < \ldots$ и $n_1 < n_2 < \ldots$, такие что $y_{m_k} = x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда бы следовало, что в (x_n) имеется подпоследовательность (x_{n_k}), сходящаяся к x, что противоречит условию. Как следствие, (y_n) лежит при больших n в $X \setminus B$, откуда следует, что $f(x) \leqslant 2 = \lim\limits_n f(y_n)$.

Пусть $\varepsilon = 1$, и пусть $y \in X$ удовлетворяет условиям а)—в). Так как

$$\{x \in X \colon f(x) \leqslant \inf f(X) + 1\} = \{x \in X \colon f(x) \leqslant 1\} = B,$$

то $y = x_m \in B$ при некотором $m \in \mathbb{N}$.

Если (2.21) выполнено, то

$$f(x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_m) < \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{3}{2^{m+1}} < \frac{1}{2^{m-1}} = f(x_m), \tag{2.25}$$

что показывает, что условие б) из пункта 3 не выполнено, т. е. пункт 3 не имеет места.

Если выполнено (2.23), то по неравенству треугольника

$$\rho(x_{m+k}, x_m) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \rho(x_{m+i}, x_{m+i-1}) = 0,$$

т. е. $x_n \in \overline{\{x_m\}}$ при всех $n \geqslant m$. По в)

$$f(x_m) \leqslant f(x_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

при всех $n \geqslant m$, что даёт $f(x_m) = 0$, а такое значение не может приниматься f. □

Замечание 2.31. В доказательстве теоремы 2 в [90] не рассматривался возможный случай $\rho(x_{n+1}, x_n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ (в этом случае из рассмотрения x_{m+1} нельзя получить противоречие из (2.25)). Приведённое выше доказательство закрывает эту дыру.

Полнота по Смиту

В данном разделе мы представим некоторые результаты по теореме Каристи о неподвижной точке и полноте по Смиту для квазиметрических пространств, полученные С. Ромагуерой и П. Тирадо [152].

Пусть (X, ρ) — квазиметрическое пространство, $\varphi\colon X \to [0, \infty)$ и $T\colon X \to X$ такие, что при всех $x \in X$

$$\rho(x, Tx) \leqslant \varphi(x) - \varphi(Tx). \tag{2.26}$$

Отображение T называется *$\bar{\rho}$-отображением Каристи*, если φ $\bar{\rho}$-полунепрерывна снизу. Отображение T называется *ρ^s-отображением Каристи*, если φ ρ^s-полунепрерывна снизу.

Теорема 2.32 (С. Ромагуера и П. Тирадо [152]). *Пусть (X, ρ) — квазиметрическое пространство.*

1. *Если (X, ρ) право-$\bar{\rho}$-K-полно, то каждое $\bar{\rho}$-отображение Каристи на X имеет неподвижную точку.*
2. *Если (X, ρ) право-ρ-K-полно, то каждое ρ-отображение Каристи на X имеет неподвижную точку.*
3. *Квазиметрическое пространство (X, ρ) право-$\bar{\rho}$-полно по Смиту, если и только если каждое ρ^s-отображение Каристи имеет неподвижную точку.*

Замечание 2.33. Некоторые варианты вариационного принципа Экланда в несимметричных локально выпуклых пространствах получены в [40]. Другие характеризации полноты квазиметрических пространств даются в [153].

2.3.1. Некоторые результаты Т. К. Бао и А. Субейрана

Вдохновлённые результатами работы [43] (см. теорему 2.12), Т. К. Бао, С. Кобзаш, А. Субейран [25], Т. К. Бао и А. Субейран [28], а также Т. К. Бао и М. А. Тера [29] доказали варианты принципа Экланда в квазиполуметрических пространствах и нашли характеризации полноты. В их работах, как и в следующем предложении, рассматривалось многозначное отображение, связанное с функцией φ и $\lambda > 0$.

Предложение 2.34. *Пусть (X, ρ) — квазиполуметрическое пространство, $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная функция и $S_\lambda\colon X \rightrightarrows X$ — многозначное отображение, заданное формулой*

$$S_\lambda(x) = \{y \in X\colon \lambda\rho(x, y) \leqslant \varphi(x) - \varphi(y)\}. \tag{2.27}$$

Тогда S_λ имеет следующие свойства:

а) *(непустота) $x \in S_\lambda(x)$ при всех $x \in \operatorname{dom}(\varphi)$;*

б) *(монотонность) $y \in S_\lambda(x) \Longrightarrow \varphi(y) \leqslant \varphi(x)$ и $S_\lambda(y) \subset S_\lambda(x)$.*

Напомним, что обобщённая последовательность Пикара, соответствующая многозначному отображению $F\colon X \rightrightarrows X$, — это последовательность (x_n) из X, такая что $x_{n+1} \in F(x_n)$ при всех n.

Теорема 2.35. *Пусть (X, ρ) — квазиполуметрическое пространство, и пусть $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная функция. Для заданных $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$ и $\lambda > 0$ рассмотрим многозначное отображение $S_\lambda\colon X \rightrightarrows X$, заданное формулой (2.27). Предположим, что*

(C1) *(ограниченность снизу) φ ограничена снизу на $S_\lambda(x_0)$;*

(C2) *(непустота пересечения) для каждой обобщённой последовательности Пикара $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ из S_λ (начинающейся с x_0), такой что $\varphi(x_n) > \varphi(x_{n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \infty$, существует точка $y \in X$, такая что $S_\lambda(y) \subset S_\lambda(x_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Тогда существует обобщённая последовательность Пикара $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (т. е. $x_{n+1} \in S_\lambda(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$), $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \infty$, $\bar\rho$-сходящаяся к некоторому $\bar x \in X$, такому что для каждого $\bar y \in S_\lambda(\bar x)$ выполнены следующие условия:

а) $\lambda\rho(x_0, \bar y) \leqslant \varphi(x_0) - \varphi(\bar y)$;

б) *$\varphi(\bar y) < \varphi(x) + \lambda\rho(\bar y, x)$ для каждого $x \in X \setminus S_\lambda(\bar y)$;*

в) *$\rho(\bar x, \bar y) = 0$, $\varphi(\bar y) = \varphi(\bar x)$ и $S_\lambda(\bar y) \subset \overline{\{\bar y\}}^{\bar\rho}$.*

Замечание 2.36. Ясно, что из теоремы 2.35 следует, что

б$'$) $\varphi(\bar y) < \varphi(x) + \lambda\rho(\bar y, x)$ при всех $x \in X \setminus \overline{\{\bar y\}}^{\bar\rho}$;

в$'$) $\varphi(\bar y) \leqslant \varphi(x)$ при всех $x \in \overline{\{\bar y\}}^{\bar\rho}$.

Аналогичное условие также содержится в теореме 2.30.

Для получения характеризации полноты нам потребуется более слабое понятие полунепрерывности снизу.

Определение 2.37. Функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, заданная на квазиполуметрическом пространстве (X, ρ), называется *строго убывающе ρ-полунепрерывной снизу*, если для каждой ρ-сходящейся последовательности (x_n) из X, такой что последовательность $\big(\varphi(x_n)\big)$ строго убывает, выполнено

$$\varphi(y) \leqslant \lim_n \varphi(x_n)$$

для каждого ρ-предела y последовательности (x_n). Последовательность (x_n), для которой $\big(\varphi(x_n)\big)$ строго убывает, называется *строго φ-убывающей*.

Замечание 2.38. В [25] приведён пример, показывающий, что это понятие строго слабее, чем понятие ρ-полунепрерывности снизу, т. е. существует функция, которая строго убывающе ρ-полунепрерывна снизу, но не ρ-полунепрерывна снизу. В действительности всюду разрывная функция $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{Q}$, и $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, на $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ является строго убывающе полунепрерывной снизу (так как не существует последовательности (x_n) из $\mathbb{R}$, такой что $\big(\varphi(x_n)\big)$ строго убывает). Функция f не полунепрерывна снизу, так как $f(x) = 1 > 0 = \liminf_{x'\to x} \varphi(x)$ для каждого $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Также она не полунепрерывна сверху в каждой точке $x \in \mathbb{Q}$.

Замечание 2.39. Понятие функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, такой что $\varphi(x) \leqslant \lim_n \varphi(x_n)$ для каждой последовательности (x_n) из X, сходящейся к x и такой, что $\varphi(x_{n+1}) \leqslant \varphi(x_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, также появляется в [101] в связи с вариационным принципом Экланда и теоремой Каристи о неподвижной точке, где такая функция называется *полунепрерывной снизу вниз*.

Замечание 2.40. В [25] было дано следующее достаточное условие для выполнения условия (C2) из теоремы 2.35.

(1) Пусть (X, ρ) — квазиполуметрическое пространство и $\varphi\colon X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ — собственная функция. Если любая последовательность (x_n) из (X, ρ), такая что $\varphi(x_{n+1}) < \varphi(x_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\sum_{n+1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \infty,$$

является $\bar\rho$-сходящейся к некоторому $x \in X$ и функция φ строго убывающе $\bar\rho$-полунепрерывна снизу на $\operatorname{dom}\varphi$, то условие (C2) выполнено.

Отметим следующие результаты, связывающие сходимость рядов и полноту в квазиметрических пространствах [25, предложение 3.10].

Предложение 2.41. *Пусть (X, ρ) — квазиполуметрическое пространство.*

1. *Если для последовательности $(x_n) \subset X$ выполнено $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \infty$, то она является левой ρ-K-последовательностью Коши (или, что эквивалентно, правой $\bar\rho$-K-последовательностью Коши).*

2. *Пространство X лево-ρ-K-полно, если и только если любая последовательность $(x_n) \subset X$, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \infty$, ρ-сходится к некоторому $x \in X$.*
3. *Пространство X право-$\bar{\rho}$-K-полно, если и только если любая последовательность $(x_n) \subset X$, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \infty$, $\bar{\rho}$-сходится к некоторому $x \in X$.*

Доказательство (набросок). Первое утверждение вытекает из неравенства треугольника и критерия Коши сходимости, применённого к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1})$:

$$\rho(x_n, x_{n+k}) \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \rho(x_{n+i}, x_{n+i+1}) < \varepsilon.$$

Докажем утверждения 2 и 3. Если (x_n) — левая ρ-K-последовательность Коши, то существуют числа $n_1 < n_2 < \ldots$, такие что $\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \infty$, и значит, по предположению существует точка $x \in X$, такая что $\lim\limits_k \rho(x, x_{n_k}) = 0$ ($\lim\limits_k \bar{\rho}(x, x_{n_k}) = 0$). По второму утверждению замечания 2.19 выполнено $\lim\limits_n \rho(x, x_n) = 0$ (соответственно $\lim\limits_n \bar{\rho}(x, x_n) = 0$). □

Мы теперь дадим характеризацию полноты в квазиполуметрических пространствах через вариационный принцип Экланда (теорема 2.35).

Теорема 2.42 (характеризация полноты). *Для квазиполуметрического пространства (X, ρ) следующие условия эквивалентны.*

1. *Пространство X право-$\bar{\rho}$-K-полно.*
2. *Для каждой собственной ограниченной снизу строго убывающе $\bar{\rho}$-полунепрерывной снизу функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и для любой точки $x_0 \in \operatorname{dom}(\varphi)$ существует точка $\bar{x} \in X$, такая что для каждого $\bar{y} \in S_1(\bar{x})$*
   i) $\rho(x_0, \bar{y}) \leqslant \varphi(x_0) - \varphi(\bar{y})$;
   ii) $\varphi(\bar{y}) < \varphi(x) + \rho(\bar{y}, x)$ *для всех* $x \in X \setminus \overline{\{\bar{y}\}}^{\bar{\rho}}$;
   iii) $\varphi(\bar{y}) \leqslant \varphi(x)$ *for all* $x \in \overline{\{\bar{y}\}}^{\bar{\rho}}$.

Доказательство. Импликация $1 \Longrightarrow 2$ вытекает из теоремы 2.35 (см. также предложение 2.41 и замечания 2.36, 2.40).

Доказательство импликации $2 \Longrightarrow 1$ аналогично рассуждениям при доказательстве импликации $3 \Longrightarrow 1$ в теореме 2.30 с заменой метрики ρ на сопряжённую $\bar{\rho}$. □

Следующий пример показывает, что полнота не имеет места, если мы потребуем выполнения только условий i) и ii) из теоремы 2.42.

Пример 2.43. Пусть $x_n = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$. На $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ зададим метрику следующим образом: $q(x_n, x_m) = (x_m - x_n)^+ = (-m+n)^+ = n - m$ при $n > m$ и $q(x_n, x_m) = 0$ при $n \leqslant m$ (см. пример 2.17). Тогда $q(x_n, x_{n+1}) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$ и пространство X не право-$\bar{q}$-K-полно (см. пример 2.21). Пусть $\varphi\colon X \to [0, \infty)$ — произвольная функция. Для $\bar{x} = x_0$ имеем

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_0) \leqslant \varphi(x_0) = \varphi(x_0) + q(\bar{x}, x_0).$$

Так как $q(x_0, x_n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$, очевидно выполняется

$$\varphi(x_0) < \varphi(x_n) + q(x_0, x_n) \text{ при всех } n \in \mathbb{N}_0, \text{ таких что } q(x_0, x_n) > 0.$$

Замечание 2.44. Т. К. Бао и А. Субейран использовали понятия сходимости вперёд и назад в квазиполуметрических пространствах (X, ρ), где «вперёд» относится к $\bar{\rho}$, а «назад» — к ρ.

К примеру, последовательность (x_n) из X

— сходится вперёд к x, если $\bar{\rho}(x, x_n) = \rho(x_n, x) \to 0$, т. е. (x_n) $\bar{\rho}$-сходится к x;
— называется последовательностью Коши вперёд, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое что $\rho(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $k \in \mathbb{N}$, т. е. (x_n) — левая ρ-K-последовательность Коши, или, что эквивалентно, правая $\bar{\rho}$-K-последовательность Коши;
— сходится назад к x, если $\rho(x, x_n) \to 0$, т. е. (x_n) ρ-сходится к x;
— называется последовательностью Коши назад, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое что $\rho(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $k \in \mathbb{N}$, т. е. (x_n) — правая ρ-K-последовательность Коши, или, что эквивалентно, левая $\bar{\rho}$-K-последовательность Коши.

Пространство X называется вперёд-вперёд полным, если каждая последовательность Коши вперёд сходится вперёд, т. е. является право-$\bar{\rho}$-K-полной.

Понятие полноты назад определяется аналогично: квазиметрическое пространство (X, ρ) назад-назад полно, если каждая последовательность Коши назад сходится назад, т. е. является право-ρ-K-полным. Можно определять и сочетания полнот: полнота назад-вперёд (что означает левую $\bar{\rho}$-K-полноту) и полнота вперёд-назад (т. е. левая ρ-K-полнота).

Т. К. Бао, А. Субейран и Б. С. Мордухович систематически применяли вариационные принципы в квазиметрических пространствах в таких областях знания, как психология [26], самочувствие и рациональность [27] и динамика групп [28].

3. Топология и порядок

В этом разделе мы рассмотрим некоторые результаты, связывающие топологию и порядок.

3.1. Частично упорядоченные множества

Пусть X — непустое множество. *Предпорядок* на X — это рефлексивное и транзитивное отношение $\leqslant\, \subset X^2$. Пара $(X, \leqslant)$ называется *частично предупорядоченным множеством*. Антисимметричный предпорядок называется *порядком* на X. Пара $(X, \leqslant)$ называется *частично упорядоченным множеством*.

Пусть $(X, \leqslant)$ — частично предупорядоченное множество. Для непустого подмножества A частично предупорядоченного множества $(X, \leqslant)$ мы полагаем

$$\begin{aligned} \uparrow\! A &:= \{y \in X : \text{найдётся } x \in A, \text{ такой что } x \leqslant y\}, \\ \downarrow\! A &:= \{y \in X : \text{найдётся } x \in A, \text{ такой что } y \leqslant x\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

В частности, для $x \in X$ имеем

$$\uparrow\! x := \uparrow\!\{x\}, \quad \downarrow\! x = \downarrow\!\{x\}.$$

Множество A называется *замкнутым вверх* (*замкнутым вниз*, если $A = \uparrow\! A$ (соответственно $A = \downarrow\! A$).

Непустое подмножество $A \subset X$ называется *вполне упорядоченным* (или *цепью*), если любые два элемента из A сравнимы.

Непустое подмножество $D \subset X$ называется *направленным*, если для любых $x, y \in A$ существует элемент $z \in A$, такой что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$.

Пусть $A \subset X$. Тогда

— *верхняя грань* для A — это элемент $z \in X$, такой что $x \leqslant z$ для всех $x \in A$;
— если z — верхняя грань для A и $z \in A$, то z — *максимальный элемент* для A;
— множество A *ограничено сверху*, если у него есть хотя бы одна верхняя грань;
— наименьшая верхняя грань для A обозначается $\sup A$ (или $\bigvee A$);
— наименьшая верхняя грань двух элементов $x, y \in X$ обозначается как $x \vee y := \bigvee\{x, y\}$;
— максимальный элемент X называется *единицей* и обозначается как $\top$ (или 1); минимальный элемент X называется *нулём* и обозначается как $\perp$ (или 0).

Также можно определить двойственные понятия для верхней грани, наибольшей нижней грани и т. п. Наибольшая нижняя грань обозначается через $\inf A$ (или $\bigwedge A$). Аналогично определяется $x \wedge y := \bigwedge\{x, y\}$.

Определение 3.1. Частично упорядоченное множество $(X, \leqslant)$ называется

— *верхней полурешёткой*, если каждые два элемента $x, y \in X$ имеют $\sup x \vee y$;
— *нижней полурешёткой*, если каждые два элемента $x, y \in X$ имеют $\inf x \wedge y$;
— *решёткой*, если $(X, \leqslant)$ — полурешётка, являющаяся одновременно верхней и нижней (т. е. для каждого $x, y \in X$ существует $x \wedge y$ и $x \vee y$).

Решётка $(X,\leqslant)$ называется *полной*, если для каждого $A\subset X$ существует $\sup A$ и $\inf A$.

Частично упорядоченное множество $(X,\leqslant)$ называется *направленным* (*цепно*, *ограниченно*) *полным*, если каждое направленное (вполне упорядоченное, ограниченное сверху) подмножество из X имеет наименьшую верхнюю грань.

Замечание 3.2. Пусть $(X,\leqslant)$ — частично упорядоченное множество.

1. Если X имеет максимальный элемент $\top$, то $\top=\sup X$. Если X — минимальный элемент $\perp$, то $\perp=\inf\varnothing$.
2. В определении полной решётки $(X,\leqslant)$ достаточно потребовать, чтобы каждое подмножество X имело точную верхнюю грань, потому что в X имеется наименьший элемент $\perp=\sup\varnothing$, а наибольшая нижняя грань подмножества $A\subset X$ является наименьшей верхней гранью множества L_A всех нижних граней для A (это множество непусто, потому что $\perp\in A$).

Отображения между частично предупорядоченными множествами

Пусть $(X,\leqslant)$, $(Y,\preceq)$ — два частично предупорядоченных множества. Отображение $f\colon X\to Y$ называется

— *возрастающим*, если для всех $x,y\in X$ $x\leqslant y$ влечёт $f(x)\preceq f(y)$;
— *убывающим*, если для всех $x,y\in X$ $x\leqslant y$ влечёт $f(y)\preceq f(x)$;
— *монотонным*, если оно возрастает или убывает.

Мы говорим, что f *сохраняет*

— *точные верхние грани*, если для каждого $A\subset X$ существование $\sup A$ влечёт существование $\sup f(A)$ и равенство $\sup f(A)=f(\sup A)$;
— *конечные* (*направленные*, *цепные*) *точные верхние грани*, если указанное условие выполнено для каждой конечного (соответственно направленного, вполне ограниченного) $A\subset X$.

Аналогичные определения даются и для наибольших нижних граней.

Замечание 3.3. Отображение, сохраняющее конечные точные верхние грани, является возрастающим.

В самом деле, если $x\leqslant y$ в X, то $y=\sup\{x,y\}$, и значит, $f(y)=\sup\{f(x),f(y)\}$, что даёт $f(x)\preceq f(y)$.

3.2. Отношения порядка на топологических пространствах

Порядок специализации на топологическом пространстве (X,τ) — это частичный порядок, задаваемый как

$$x\leqslant_\tau y \iff x\in\overline{\{y\}}, \tag{3.2}$$

т. е. y лежит в каждом открытом множестве, содержащем x.

Предложение 3.4. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда отношение* (3.2) *является частичным предпорядком. Оно является порядком, если и только если X удовлетворяет аксиоме T_0.*

Если X удовлетворяет аксиоме T_1, то $\leqslant_\tau$ — отношение равенства в X.

Доказательство. Так как $x \in \overline{\{x\}}$, то $x \leqslant_\tau x$. Транзитивность следует из импликации

$$x \in \overline{\{y\}} \text{ и } \{y\} \subset \overline{\{z\}} \implies x \in \overline{\{y\}} \subset \overline{\overline{\{z\}}} = \overline{\{z\}},$$

т. е.

$$x \leqslant_\tau y \text{ и } y \leqslant_\tau z \implies x \leqslant_\tau z.$$

Предположим, что X удовлетворяет аксиоме T_0 и что x, y — две различные точки в X. Тогда существует открытое множество V, содержащее в точности одну из этих точек. Если $x \in V$ и $y \notin V$, то $x \notin \overline{\{y\}}$, т. е. отношение $x \leqslant_\tau y$ не выполняется. Если $y \in V$ и $x \notin V$, то $y \notin \overline{\{x\}}$, т. е. $y \leqslant_\tau x$ не выполнено. Это означает, что для пары различных элементов в X отношения $x \leqslant_\tau y$ и $y \leqslant_\tau$ не могут выполняться одновременно.

Аналогичные рассуждения показывают, что X удовлетворяет аксиоме T_0, если отношение $\leqslant_\tau$ — частичный порядок (антисимметрично).

Топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме T_1, если и только если $\overline{\{x\}} = \{x\}$ для каждого $x \in X$. Как следствие,

$$x \leqslant_\tau y \iff x \in \overline{\{y\}} = \{y\} \iff x = y.$$

Также можно показать, что если порядковое отношение $\leqslant_\tau$ — равенство, то X удовлетворяет аксиоме T_1. □

В следующих результатах порядок понимается как порядок $\leqslant_\tau$.

Предложение 3.5. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство и $A \subset X$.*

1. *Если множество A открыто, то оно замкнуто вверх, т. е. $\uparrow A = A$.*
2. *Если множество A замкнуто, то оно замкнуто вниз, т. е. $\downarrow A = A$.*

Доказательство. Первое утверждение является прямым следствием определений. Пусть $x \in A$ и $y \in X$, $x \leqslant_\tau y$. Так как A открыто, то это неравенство влечёт, что $y \in A$.

Докажем второе утверждение. Пусть $x \in A$ и $y \in X$, $y \leqslant_\tau x$. Тогда $y \in \overline{\{x\}} \subset \overline{A} = A$. □

По определению *насыщение* подмножества $A \subset X$ — это пересечение всех открытых подмножеств X, содержащих A. Множество A называется *насыщенным*, если оно совпадает со своим насыщением.

Предложение 3.6. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство.*

1. *Для каждого $x \in X$ $\downarrow x = \overline{\{x\}}$.*
2. *Для любого подмножества $A \subset X$ насыщение A совпадает с $\uparrow A$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из эквивалентности

$$y \leqslant_\tau x \iff y \in \overline{\{x\}}.$$

Докажем второе утверждение. Так как каждое открытое множество замкнуто вверх, то условия $U \in \tau$ и $U \supset A$ влекут, что $U \supset \uparrow A$, т. е.

$$\uparrow A \subset \bigcap \{U \in \tau \colon A \subset U\}.$$

Если $y \notin \uparrow A$, то для каждого $x \in A$ существует окрестность $U_x \in \tau$, такая что $x \in U_x$ и $y \notin U_x$. Отсюда следует, что $y \notin V := \bigcup \{U_x \colon x \in A\} \in \tau$ и $A \subset V$, и значит, $y \notin \bigcap \{U \in \tau \colon A \subset U\}$. □

Компактность

Нам потребуется следующий результат о компактности [61, с. 69].

Предложение 3.7. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Если подмножество $K \subset X$ компактно, то его насыщение $\uparrow K$ также компактно. Если $\uparrow K$ компактно, то K также компактно.*

Доказательство. Учитывая, что каждое открытое множество замкнуто вверх, то для любого семейства $\{U_i \colon i \in I\} \subset \tau$

$$K \subset \bigcup \{U_i \colon i \in I\} \iff \uparrow K \subset \bigcup \{U_i \colon i \in I\},$$

откуда следует эквивалентность компактности K и $\uparrow K$. □

Порядок $\preceq$ на топологическое пространство (X, τ) называется *замкнутым*, если график

$$\mathrm{Graph}(\preceq) := \{(x, y) \in X \times X \colon x \preceq y\}$$

замкнут в $X \times X$ относительно топологии произведения.

Существование замкнутого порядка на топологическом пространстве влечёт хаусдорфовость топологии [61, предложение 3.9.12].

Предложение 3.8. *Если на топологическом пространстве (X, τ) существует замкнутый порядок $\preceq$, то топология τ является хаусдорфовой.*

Доказательство. Пусть x, y — различные точки из X. Тогда отношения $x \preceq y$ и $y \preceq x$ не могут быть выполнены одновременно. Без ограничения общности предположим, что $x \preceq y$ не выполнено, т. е. $(x, y) \notin \mathrm{Graph}(\preceq)$. Тогда существуют открытые окрестности U и V соответственно точек x и y, такие что $(U \times V) \cap \mathrm{Graph}(\preceq) = \varnothing$. Для доказательства нам достаточно показать, что $U \cap V = \varnothing$. Действительно, предположив, что существует $z \in W := U \cap V$, мы приходим к противоречию

$$(z, z) \in (W \times W) \cap \mathrm{Graph}(\preceq) \subset (U \times V) \cap \mathrm{Graph}(\preceq) = \varnothing. \qquad \square$$

Другие свойства топологических пространств с замкнутым порядком (например, компактность) можно найти в [61, § 9.1.1].

3.3. Топологии на упорядоченных множествах: топология Александрова, верхняя топология, топология Скотта, интервальная топология

Рассмотрим частично предупорядоченное множество $(X, \leqslant)$. Мы хотим определить на X топологию τ, такую что предпорядок специализации $\leqslant_\tau$ совпадает с $\leqslant$. В общем случае это невозможно. К примеру, на $\mathbb{R}$ с обычным отношением порядка рассмотрим разные топологии (стандартную, дискретную и т. п.) — это такие топологии, что для каждой из них отношение равенства является предпорядком специализации.

Пусть $(X, \leqslant)$ — частично предупорядоченное множество. На X рассмотрим три топологии, такие что соответствующие предпорядки специализации совпадают с $\leqslant$ (как в случае интервальной топологии и порядковой топологии Мура—Смита).

Топология Александрова — самая сильная

Топология Александрова является самой сильной из рассматриваемых топологий.

Предложение 3.9 (топология Александрова). *Пусть $(X, \leqslant)$ — частично предупорядоченное множество. Тогда на X существует самая сильная топология τ_a, называемая топологией Александрова, такая что предпорядок специализации $\leqslant_{\tau_\mathrm{a}}$ совпадает с $\leqslant$. Эта топология характеризуется условием*

i) *открытые множества — это в точности замкнутые вверх множества*

или, что эквивалентно,

ii) *замкнутые множества — это в точности замкнутые вниз множества.*

Доказательство. Ясно, что замкнутые вверх подмножества пространства X образуют топологию τ_a. Пусть $\leqslant_\mathrm{a}$ — порядок специализации, задаваемый этой топологией. Если $x \leqslant y$ и $Z \in \tau_\mathrm{a}$ содержат x, то $y \in Z$, потому что Z замкнуто вверх, что показывает, что $x \leqslant_\mathrm{a} y$. Пусть $x \leqslant_\mathrm{a} y$. Тогда из $\uparrow x \in \tau_\mathrm{a}$ и $x \in \uparrow x$ следует, что $y \in \uparrow x$, поэтому $x \leqslant y$. Как следствие, $x \leqslant_\mathrm{a} y$ совпадает с $x \leqslant y$.

Если τ — такая топология на X, что порядок специализации $\leqslant_\tau$ совпадает с $\leqslant$, то по предложению 3.5 множества в τ замкнуты вверх, что показывает, что $\tau \subset \tau_\mathrm{a}$. □

Для краткости мы записываем X_a вместо (X, τ_a).

Замечание 3.10. Так как для каждого замкнутого вверх подмножества $Z \subset X$ выполнено $Z = \bigcup\{\uparrow z \colon z \in Z\}$, то топология Александрова τ_a порождается семейством множеств $\{\uparrow x \colon x \in X\}$.

Верхняя топология — наиболее слабая топология

Предложение 3.11. *Пусть* $(X, \leqslant)$ — *частично предупорядоченное множество. Тогда существует самая слабая топология* τ_{u} *на* X, *такая что предпорядок специализации* $\leqslant_{\tau_{\mathrm{u}}}$ *совпадает с* $\leqslant$. *Предбаза топологии* τ_{u} *задаётся дополнениями множеств* $\downarrow x$, $x \in X$. *База топологии* τ_{u} *задаётся дополнениями множеств* $\downarrow E$, *где* $E \subset X$, E *конечно.*

Доказательство. Легко проверить, что множества $\downarrow E$, $E \subset X$, E конечно, образуют базу топологии τ_{u} на X. Обозначим через $\leqslant_{\mathrm{u}}$ порядок специализации, задаваемый этой топологией.

Пусть $x \leqslant_{\mathrm{u}} y$. По определению это эквивалентно тому, что $x \in \overline{\{y\}}$. Имеем

$$\begin{aligned} x \in \overline{\{y\}} &\iff \forall\, z\, [x \in X \setminus \downarrow z \implies y \in X \setminus \downarrow z] \iff \\ &\iff \forall\, z\, [y \in \downarrow z \implies x \in \downarrow z] \implies \\ &\underset{(z=y)}{\implies} x \in \downarrow y \iff x \leqslant y. \end{aligned}$$

Обратно, предположим, что $x \leqslant y$. Если $y \in \downarrow z$ при некотором $z \in X$, то $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, что даёт $x \leqslant z$, т. е. $x \in \downarrow z$. Как следствие,

$$x \in X \setminus \downarrow z \implies y \in X \setminus \downarrow z$$

при всех $z \in X$, что эквивалентно тому, что $x \leqslant_{\mathrm{u}} y$. □

Топология Скотта

Топология Скотта является промежуточной между τ_{u} и τ_{a}. Она определяется следующим образом.

Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Подмножество $U \subset X$ называется *открытым по Скотту*, если и только если выполнены следующие два условия:

i) U замкнуто вверх,

ii) для каждого непустого направленного подмножества $D \subset X$, такого что $\sup D$ существует (в X) и лежит в U, существует $d \in D$, такое что $d \in U$.

Предложение 3.12. *Пусть* $(X, \leqslant)$ — *частично упорядоченное множество.*

1. *Семейство открытых по Скотту подмножеств пространства* X *образует топологию, обозначаемую* τ_σ.
2. *Подмножество* $F \subset X$ *замкнуто по Скотту, если и только если выполнены следующие два условия:*

   i) F *замкнуто вниз,*

   ii) *для каждого непустого направленного подмножества* $D \subset F$ *если* $\sup D$ *существует (в* X*), то* $\sup D \in F$.
3. *Порядок специализации, соответствующий* τ_σ, *совпадает с* $\leqslant$, *при этом*

$$\tau_{\mathrm{u}} \leqslant \tau_\sigma \leqslant \tau.$$

4. *Пусть (X,τ) — топологическое пространство, $\leqslant_\tau$ — порядок специализации, соответствующий τ, и $\sigma = \sigma(\leqslant_\tau)$ — топология Скотта, соответствующая порядку $\leqslant_\tau$. Тогда множество $\overline{\{x\}}^\tau$ замкнуто по Скотту (т. е. σ-замкнуто) для каждого $x \in X$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть U_i, $i = 1,\ldots,n$, — открытые по Скотту множества. Тогда $U := \bigcap\{U_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ замкнуто вверх. Предположим, что D — направленное множество в X, такое что $\sup D$ существует и лежит в U. Тогда $\sup D \in U_i$ влечёт существование $x_i \in D \cap U_i$, $i = 1,\ldots,n$. Так как D направленное, то существует $x \in D$, для которого $x_i \leqslant x$, $i = 1,\ldots,n$. Так каждое U_i замкнуто вверх, то $x \in U_i$, $i = 1,\ldots,n$, т. е. $x \in U$, что показывает, что U также открыто по Скотту. Легко проверяется, что объединение произвольного семейства открытых по Скотту множеств также открыто по Скотту.

Доказательство утверждения 2 следует из того факта, что множество F замкнуто, если и только если $X \setminus F$ открыто.

Докажем утверждение 3. Через $\leqslant_\sigma$ обозначим порядок специализации, соответствующий τ_σ, и предположим, что $x \leqslant y$. Если U открыто по Скотту и $x \in U$, то $y \in U$, так как U замкнуто вверх. Как следствие, $x \leqslant_\sigma y$.

Теперь предположим, что $x \leqslant_\sigma y$. Множество $\downarrow y$ замкнуто по Скотту. Если $x \in X \setminus \downarrow y$, то $y \in X \setminus \downarrow y$ — противоречие. Значит, $x \in \downarrow y$, т. е. $x \leqslant y$.

Докажем утверждение 4. Доказательство основано на утверждении 2. Вместо $\bar{Z}^\tau$ мы будем писать $\bar{Z}$. Далее символ $\leqslant$ будет обозначать отношение $\leqslant_\tau = \leqslant_\sigma$.

Сначала покажем, что множество $\overline{\{x\}}$ замкнуто вниз. В самом деле, пусть $y \in \overline{\{x\}}$ и $y' \leqslant y$. Тогда $y \leqslant x$ и $y' \leqslant y$, что даёт $y' \leqslant x$, т. е. $y' \in \overline{\{x\}}$.

Проверим условие ii) второго утверждения. Если $\{x_i : i \in I\}$ — направленное множество из $\overline{\{x\}}$, то $x_i \leqslant x$ при всех $i \in I$, и значит, $\sup\limits_i x_i \leqslant x$, что эквивалентно тому, что $\sup\limits_i x_i \in \overline{\{x\}}$. □

В следующем результате даётся характеризация непрерывности относительно топологии Скотта. Для краткости мы записываем X_σ вместо (X,τ_σ).

Предложение 3.13. *Пусть X, Y — частично упорядоченные множества и $f : X \to Y$. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Функция f непрерывна относительно топологий Скотта на X и Y.*
2. *Функция f удовлетворяет следующим условиям:*
   i) *f возрастает,*
   ii) *f сохраняет точные верхние грани направленных множеств.*

Доказательство. В доказательстве все замыкания будут пониматься относительно топологии Скотта.

Докажем импликацию $2 \Longrightarrow 1$. Непрерывность f эквивалентна каждому из следующих условий:

i) $f^{-1}(Z)$ замкнуто для каждого замкнутого подмножества $Z \subset Y$;
ii) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ для каждого подмножества $A \subset X$.

Пусть $Z \subset Y$ замкнуто по Скотту. Используя утверждение 2 предложения 3.12, мы покажем, что $f^{-1}(Z)$ замкнуто по Скотту.

Если $x \in f^{-1}(Z)$ и $x' \leqslant x$, то $f(x) \in Z$ и $f(x') \leqslant f(x)$. Так как Z замкнуто вниз, то $f(x') \in Z$, что эквивалентно тому, что $x' \in f^{-1}(Z)$. Как следствие, $f^{-1}(Z)$ замкнуто вниз.

Пусть теперь $(x_i)_{i\in I}$ — направленное множество, содержащееся в $f^{-1}(Z)$ и такое, что существует $x = \sup\limits_i x_i$. Тогда $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ — направленное множество в Y, содержащееся в Z. По предположению $f(x) = \sup\limits_i f(x_i)$ и поскольку Z замкнуто по Скотту, то $f(x) \in Z$, что эквивалентно тому, что $x \in f^{-1}(Z)$.

Докажем импликацию $1 \Longrightarrow 2$. Предположим, что f непрерывна относительно топологии Скотта на X и Y.

Пусть $x' \leqslant x$ в X. Учитывая непрерывность f, имеем

$$x' \leqslant x \iff x' \in \overline{\{x\}} \implies f(x') \in f\big(\overline{\{x\}}\big) \subset \overline{f(x)},$$

что показывает, что $f(x') \leqslant f(x)$ в Y.

Пусть теперь $(x_i)_{i\in I}$ — направленное множество в X, такое что существует $x = \sup\limits_i x_i$. Так как f является возрастающей, то $f(x_i) \leqslant f(x)$ при всех $i \in I$. Пусть $y \in Y$ таков, что $f(x_i) \leqslant y$ при всех $i \in I$. Тогда

$$\forall\, i\ f(x_i) \leqslant y \iff \forall\, i\ f(x_i) \in \overline{\{y\}} \iff \forall\, i\ x_i \in f^{-1}\big(\overline{\{y\}}\big).$$

Так как $f^{-1}\big(\overline{\{y\}}\big)$ замкнуто по Скотту, то $x = \sup\limits_i x_i \in f^{-1}\big(\overline{\{y\}}\big)$, поэтому $f(x) \in \overline{\{y\}}$, т. е. $f(x) \leqslant y$. Как следствие, $f(x)$ является наименьшей верхней гранью для $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$. $\square$

Замечание 3.14. Отображение, удовлетворяющее условиям i), ii) предложения 3.13, называется *непрерывным по Скотту*. В свете замечания 3.3 достаточно предположить, что f удовлетворяет только условию ii).

Пример 3.15 [61]. Подмножество из $\mathbb{R}$ является компактным и насыщенным относительно топологии Скотта, если и только если оно пусто или имеет вид $[\alpha, \infty)$ при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$.

Интервальная топология и порядковая топология Мура—Смита

Эти топологии были введены О. Фринком [55]. Замкнутый интервал в частично упорядоченном множестве $(X, \leqslant)$ — это множество вида

$$\begin{gathered}\uparrow a = \{x \in X \colon a \leqslant x\}, \quad \downarrow b = \{y \in X \colon y \leqslant b\} \\ \text{или } [a,b] = \{x \in X \colon a \leqslant x \leqslant b\} = \uparrow a \cap \downarrow b,\end{gathered} \tag{3.3}$$

где $a, b \in X$. По определению подмножество $Y \subset X$ замкнуто относительно интервальной топологии, если его можно представить как пересечение пересечение конечных объединений множеств типа (3.3). В [55] показано, что семейство $\mathcal{F}_{\leqslant}$ определённых выше замкнутых множеств удовлетворяет аксиомам замкнутых множеств

i) $\varnothing, X \in \mathcal{F}_{\leqslant}$;

ii) если $F_i \in \mathcal{F}_{\leqslant}$, $i \in I$, то $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}_{\leqslant}$;

iii) если $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{\leqslant}$, то $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_{\leqslant}$.

Если множество X полностью упорядочено (т. е. является цепью), то определённая выше интервальная топология совпадает с *внутренней топологией*, имеющей в качестве базиса из открытых множеств интервалы

$$(a, b) := \{x \in X : a < x < b\},$$

где $a, b \in X$ (см. [55, теорема 3]). (Напомним, что $x < y$, если $x \leqslant y$ и $x \neq y$.)

Замечание 3.16. По аналогии с верхней топологией можно определить *нижнюю топологию* τ_{l}, порождаемую базисом из дополнений до множеств $\uparrow E$, где $E \subset X$, E конечно. Интервальная топология $\tau_{\leqslant}$ является супремумом этих двух топологий: $\tau_{\leqslant} = \tau_{\mathrm{u}} \vee \tau_{\mathrm{l}}$.

Имеет место следующий результат [55, теорема 9].

Теорема 3.17. *Каждая полная решётка компактна в интервальной топологии.*

Доказательство. Мы дадим простое доказательство этого результата. Пусть $(X, \leqslant)$ — полная решётка, в которой 0 — наименьший, а 1 — наибольший элемент. Тогда $\uparrow a = [a, 1]$ и $\downarrow b = [0, b]$, и значит, интервалы $[a, b]$, $a, b \in X$, образуют предбазу интервальной топологии. По теореме Александера о предбазе (см., например, [95, с. 139]) нам достаточно показать, что каждое семейство $[a_i, b_i]$, $i \in I$, интервалов из X с непустым конечным пересечением имеет непустое пересечение. Так как $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $a_i \vee a_j \leqslant b_i \wedge b_j$, то $a_i \leqslant b_j$ при всех $i, j \in I$. Следовательно,

$$a := \sup_{i\in I} a_i \leqslant \inf_{j\in I} b_j =: b,$$

и $\varnothing \neq [a, b] \subset \bigcap\limits_{i\in I} [a_i, b_i]$. □

О. Фринк [55] также рассмотрел порядковую топологию Мура—Смита, определяемую следующим образом. Сеть $(x_i : i \in I)$ в частично упорядоченном множестве $(X, \leqslant)$ называется сходящейся к $x \in X$, если существуют возрастающая сеть $(u_i : i \in I)$ и убывающая сеть $(v_i : i \in I)$, такие что $u_i \leqslant x_i \leqslant v_i$ при всех $i \in I$ и $\sup\limits_i u_i = x = \inf\limits_i v_i$. По определению элемент $x \in X$ лежит в замыкании $\bar{Y}$ подмножества $Y \subset X$, если существует сеть в Y, сходящаяся к x. Операция замыкания удовлетворяет следующим условиям:

a) $\bar{\varnothing} = \varnothing$,

b) $Y \subset \bar{Y}$,

c) $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \bar{Y}_1 \cup \bar{Y}_2$

при всех $Y, Y_1, Y_2 \subset X$. Однако условие $\bar{\bar{Y}} = \bar{Y}$ не выполнено, так что мы не получаем в этом случае топологию (см. [95, с. 43]). Несмотря на это, мы называем такую структуру *порядковой топологией Мура—Смита*. Если $(X, \leqslant)$ — цепь, то она согласуется с интервальной топологией [55, теорема 3]. Если $(X, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка, то решёточные операции $\vee$ и $\wedge$ непрерывны относительно порядковой топологии Мура—Смита [55].

Замечание 3.18. С целью приложений к теоретической информатике, в особенности к денотационной семантике языков функционального программирования, были разработаны топологические и категорные методы для частично упорядоченных множеств. Часть такой области исследований известна под названием непрерывных решёток, изучение которых начал Д. Скотт [162] в 1971 г. Грубо говоря, такими решётками являются полные решётки $(X, \leqslant)$ с непрерывными по Скотту операциями объединения и пересечения. Это означает, что

$$x \wedge \sup D = \sup\{x \wedge d\colon d \in D\}, \quad x \vee \inf D = \inf\{x \vee d\colon d \in D\}$$

для каждого непустого направленного подмножества $D \subset X$.

Другим приложением является так называемая теория доменов. Фактически в ней изучаются решётки, или направленные полные частично упорядоченные множества (см. определение 3.1), наделённые T_0-топологией, совместимой с порядком. В качестве хорошего введения в эту область мы можем порекомендовать книгу [61] (которой мы частично следовали в нашем изложении), а также работу [2]. За более подробным изложением мы отсылаем читателя к монографии [59] (см. также [168]). Отметим, что недавно стали изучаться вопросы функционального анализа для T_0-топологий (см., например, [93, 94]). Оказалось, что многие результаты из хаусдорфова функционального анализа (хаусдорфов топологический вектор, хаусдорфовы локально выпуклые пространства и банаховы пространства) имеют свои аналоги среди алгебраических структур (векторные пространства, конусы, универсальные алгебры и т. п.), наделённых согласованной T_0-топологией.

4. Неподвижные точки в частично упорядоченных множествах

В этом разделе мы приводим несколько теорем о неподвижных точках для частично упорядоченных множеств и исследуем их связь с полнотой рассматриваемого упорядоченного множества.

4.1. Теоремы о неподвижных точках

В разных публикациях приводимые ниже теоремы о неподвижных точках именуются по-разному, поскольку их окончательный вид является заслугой разных исследователей, что отражается в наименовании теоремы в зависимости от воли автора или авторов конкретного исследования.

Напомним, что частично упорядоченное множество иногда называет посетом.

Теорема 4.1 (Э. Цермело). *Пусть $(X, \leqslant)$ — цепочно полное частично упорядоченное множество и $f\colon X \to X$ — отображение, такое что $x \leqslant f(x)$ при всех $x \in X$. Тогда f имеет неподвижную точку. Более точно, для каждого $x \in X$ отображение f имеет неподвижную точку y, $\leqslant$-предшествующую x (т. е. $f(y) = y$ и $x \leqslant y$). Если вдобавок f — возрастающее отображение, то для каждого $x \in X$ f имеет по крайней мере одну неподвижную точку, $\leqslant$-предшествующую x.*

Отображение $f\colon X \to X$, удовлетворяющее $x \leqslant f(x)$ при всех $x \in X$ называется *прогрессивным* в [80], *инфляционным* в [61] и *экстенсивным* в [105].

Данный результат приписывается в [61] Н. Бурбаки и Э. Витту (со ссылкой на работы Н. Бурбаки [35] и Э. Витта [196]), а в [200] — Н. Бурбаки и А. Кнезеру. В обзорной работе Я. Яхимского [80] (именно он предложил называть этот результат теоремой Цермело о неподвижной точке) отмечается, что данная теорема о неподвижной точке появляется только неявно в работах Э. Цермело по полному упорядочению (в период с 1904 г. по 1908 г.), что и послужило основанием для такого наименования данного результата. Доказательство сразу получается после принятия принципа полного упорядочения (эквивалентного аксиоме выбора), хотя имеются и доказательства, не зависящие от аксиомы выбора (см. [80]). Краткий исторический обзор даётся в [33]. В настоящей работе мы не планируем останавливаться на данном деликатном вопросе о зависимости того или иного результата от аксиомы выбора, отсылая заинтересованного читателя за подробным изложением данного вопроса к монографиям [70, 154]. По поводу актуальности этого вопроса для задач, связанных с неподвижными точками, мы рекомендуем статьи М. Р. Тасковича [187—189] и Р. Маньки [119—121]. Помимо прочего, Р. Манька нашёл доказательство теоремы Каристи о неподвижной точке, не зависящее от аксиомы выбора.

Замечание 4.2. В [35] теорема Цермело о неподвижной точке формулируется для частичного порядка, для которого каждое вполне упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю грань, что является более сильным утверждением. Однако в этой связи Г. Марковски [123] показал, что эти условия эквивалентны: частичный порядок на X цепочно полон, если и только если каждое вполне упорядоченное подмножество X имеет точную верхнюю грань. В действительности согласно замечаниям перед леммой 1.4 в [166] данный результат можно отнести к фольклору: основной момент в доказательстве (тот факт, что каждая цепь содержит вполне упорядоченное кофинальное подмножество) содержится в качестве упражнения в монографиях П. Халмоша «Наивная теория множеств» и Г. Биркгофа «Теория решёток».

Сформулируем ещё один важный результат.

Теорема 4.3 (Б. Кнастер, А. Тарский). *Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество и $f\colon X \to X$ — возрастающая функция. Тогда если*

i) *существует $z \in X$, такое что $z \leqslant f(z)$,*
ii) *каждая цепь из $\uparrow z$ имеет точную верхнюю грань,*

то f имеет неподвижную точку, $\leqslant$-предшествующую z. Более того, f имеет максимальную неподвижную точку.

Для полных решёток теорема 4.3 принимает следующий вид.

Теорема 4.4 (Г. Биркгоф, А. Тарский). *Пусть $(X, \leqslant)$ — полная решётка, $f\colon X \to X$ — возрастающее отображение. Тогда f имеет наименьшую неподвижную точку $\underline{x}$ и наибольшую неподвижную точку $\bar{x}$, определяемые как $\underline{x} = \inf\{f^n(\top)\colon n \in \mathbb{N}\}$ и $\bar{x} = \sup\{f^n(\bot)\colon n \in \mathbb{N}\}$, где $\bot$ — наименьший элемент в X, $\top$ — наибольший элемент. При этом множество неподвижных точек отображения f образует полную решётку.*

Доказательство. Так как $\underline{x} \leqslant \top$, то $f(\underline{x}) \leqslant f(\top)$. Далее, $\underline{x} \leqslant f^n(\top)$ влечёт, что $f(\underline{x}) \leqslant f^{n+1}(\top)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Как следствие, $f(\underline{x}) \leqslant \underline{x}$. По определению $\underline{x}$ имеем $\underline{x} \leqslant f(\top)$, поэтому $f(\underline{x}) = \underline{x}$. Случай $\bar{x}$ рассматривается аналогично. $\square$

В следующей теореме исследуется вопрос о непрерывности типа Скотта для отображения f.

Теорема 4.5 (А. Тарский, Л. В. Канторович). *Пусть $(X, \leqslant)$ — частичный порядок, для которого каждая счётная цепь в X имеет точную верхнюю грань, и $f\colon X \to X$ — отображение, сохраняющее точные верхние грани счётных цепей. Тогда если существует $z \in X$, такое что $z \leqslant f(z)$, то f имеет неподвижную точку. Более того, $z_0 := \sup\{f^n(z)\colon n \in \mathbb{N}\}$ является наименьшей неподвижной точкой для f из $\uparrow z$.*

Доказательство. Следуя [63], дадим несложное доказательство. Так как f сохраняет точные верхние грани счётных цепей, то оно является возрастающим. Из $z \leqslant f(z)$ следует, что $f(z) \leqslant f^2(z)$, откуда по индукции получаем, что $f^{n-1}(z) \leqslant f^n(z)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, что показывает, что $\{f^n(z)\colon n \in \mathbb{N}\}$ является цепью из $\uparrow z$. Если $x_0 := \sup\{f^n(z)\colon n \in \mathbb{N}\}$, то по предположению $f(x_0) = \sup\{f^{n+1}(z)\colon n \in \mathbb{N}\} = x_0$.

Пусть $x_1 \geqslant z$ — неподвижная точка f. Тогда $f(z) \leqslant f(x_1) = x_1$, откуда по индукции получаем, что $f^n(z) \leqslant x_1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. x_1 — верхняя грань для $\{f^n(z)\colon n \in \mathbb{N}\}$, и значит, $x_0 \leqslant x_1$. $\square$

Замечание 4.6. В теореме 4.5 достаточно предположить, что каждая счётная цепь из $\uparrow z$ имеет точную верхнюю грань и что f сохраняет такие точные верхние грани.

4.2. Обратные результаты

По-видимому, первый обратный результат в данном направлении был получен Э. Дэвис [44].

Теорема 4.7. *Решётка $(X, \leqslant)$ является полной, если и только если каждое возрастающее отображение $f\colon X \to X$ имеет неподвижную точку.*

Согласно одному результату О. Фринка [55] (см. теорему 3.17), решётка $(X, \leqslant)$ является полной, если и только если она компактна по отношению к интервальной топологии. Как следствие, теорема 4.7 допускает следующую переформулировку.

Теорема 4.8. *Решётка $(X, \leqslant)$ является компактной в своей интервальной топологии, если и только если каждое возрастающее отображение $f\colon X \to X$ имеет неподвижную точку.*

Обобщение этого результата на случай нижних полурешёток, а также теоремы Биргхофа—Тарского о неподвижной точке (теорема 4.4) были получены Л. Вардом [194]. Напомним, что нижняя полурешётка (полурешётка для краткости) является частично упорядоченным множеством $(X, \leqslant)$, таким что $x \wedge y$ существует для каждого $x, y \in X$. Полурешётка называется полной, если каждое непустое подмножество X имеет точную нижнюю грань.

Теорема 4.9 [194].

1. *Полурешётка $(X, \leqslant)$ является полной, если и только если для любого $x \in X$ множество $\downarrow x$ компактно в интервальной топологии.*
2. *Полурешётка $(X, \leqslant)$ является компактной в интервальной топологии, если и только если каждое возрастающее отображение $f\colon X \to X$ имеет неподвижную точку.*

Р. Смитсон [167] обобщил результаты Э. Дэвис на случай многозначных отображений. Э. Волк [197] получил характеризацию направленной полноты частично упорядоченных множеств (которую он назвал полнотой по Дедекинду) в терминах неподвижных точек монотонных отображений, действующих на них.

Мы также упомянем следующий результат Я. Яхимского [81], связывающий различные свойства эквивалентных теорем о неподвижных точках.

Периодической точкой отображения $f\colon X \to X$ называется точка $x_0 \in X$, такая что $f^k(x_0) = x_0$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathrm{Per}(f)$ — множество периодических точек, $\mathrm{Fix}(f)$ — множество неподвижных точек. Ясно, что неподвижная точка является периодической с $k = 1$.

Теорема 4.10. *Пусть X — непустое абстрактное множество и f — отображение из X в себя. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$.
2. *Существует частичный порядок $\preceq$, такой что любая цепь из $(X, \preceq)$ имеет точную верхнюю грань и f прогрессивно по отношению к $\preceq$ (т. е. $x \preceq f(x)$, $x \in X$) (Э. Цермело).*
3. *Существует полная метрика d и полунепрерывная снизу функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, такая что f удовлетворяет условию (2.5) (К. Каристи).*
4. *Существует полная метрика d и d-липшицева функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, такая что f удовлетворяет условию (2.5) и является нерастягивающей относительно d, т. е.*

$$d\bigl(f(x), f(y)\bigr) \leqslant d(x, y) \quad \text{при всех} \quad x, y \in X.$$

.

5. *Для каждого $\alpha \in (0,1)$ существует полная метрика d, такая что f является нерастягивающим относительно d и*
$$d\big(f(x), f^2(x)\big) \leqslant \alpha\, d\big(x, f(x)\big) \quad \text{при всех} \quad x \in X$$
(Т. Хикс, Б. Роадес).
6. *Существует полная метрика d, такая что f непрерывно по отношению к d и для каждого $x \in X$ последовательность $\big(f^n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ сходится (предел может зависеть от x).*

Для заданных непустых множеств A, B через B^A обозначим семейство всех отображений из A в B,
$$B^A := \{f\colon f\colon A \to B\}.$$

Пусть $(X, (\rho_i)_{i\in I})$ — равномерное пространство, где $\{\rho_i\colon i \in I\}$ — семейство полуметрик, определяющих равномерность на X. Определим частичный порядок $\preceq$ на $X \times \mathbb{R}_+^I$ по следующей формуле, где $x, y \in X$, $\varphi, \psi \in \mathbb{R}_+^I$:
$$(x,\varphi) \leqslant (y,\psi) \iff \rho_i(x,y) \leqslant \varphi(i) - \psi(i) \quad \text{для каждого} \quad i \in I. \tag{4.1}$$

Если (X,ρ) — метрическое пространство (т. е. I одноточечно и $\rho_1 = \rho$ — метрика), то отношение порядка (4.1) принимает вид
$$(x,\alpha) \leqslant (y,\beta) \iff \rho(x,y) \leqslant \alpha - \beta, \tag{4.2}$$
где $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$; именно такое отношение рассматривал И. Экланд в связи со своим вариационным принципом.

Я. Яхимский [78] установил следующие результаты, связывающие введённые выше порядки.

Теорема 4.11. *Пусть $(X, (\rho_i)_{i\in I})$ — равномерное пространство, $\preceq$ — порядок на $X \times \mathbb{R}_+^I$, заданный (4.1). Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Каждая последовательность (x_n) из X, такая что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_i(x_n, x_{n+1}) < \infty$ при всех $i \in I$, сходится.*
2. *Каждая счётная цепь в $(X \times \mathbb{R}_+^I, \preceq)$ имеет точную верхнюю грань.*
3. *Каждая возрастающая последовательность в $(X \times \mathbb{R}_+^I, \preceq)$ имеет точную верхнюю грань.*

В частности, любое из этих утверждений выполнено, если пространство X секвенциально полно.

В случае метрического пространства (X,ρ) мы получаем характеризацию полноты.

Теорема 4.12. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство и $\preceq$ — порядок на $X \times \mathbb{R}_+$, заданный (4.2). Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Метрическое пространство X полно.*
2. *Каждая цепь в $(X \times \mathbb{R}_+, \preceq)$ имеет точную верхнюю грань.*

3. *Каждая счётная цепь в* $(X \times \mathbb{R}_+, \preceq)$ *имеет точную верхнюю грань.*
4. *Каждая возрастающая последовательность в*$(X \times \mathbb{R}_+, \preceq)$ *имеет точную верхнюю грань.*

Я. Яхимский применил данные результаты для доказательства теорем о неподвижных точках для отображений на частично упорядоченных множествах. В свою очередь, эти теоремы о неподвижных точках оказались полезными при получении более простых доказательств и обобщений различных теорем о неподвижных точках для метрических и равномерных пространств (см., например, статьи Я. Яхимского [76—78, 80] и содержащиеся там ссылки).

Ю. Климеш [105] нашёл общее расширение теорем 4.1 и 4.3. Пусть $(X, \leqslant)$ — частичное упорядоченное множество. Отображение $f\colon X \to X$ называется *частично изотонным*, если при всех $x, y \in X$

$$(x \leqslant y \wedge x \leqslant f(y) \wedge f(x) \leqslant y) \implies f(x) \leqslant f(y). \tag{4.3}$$

Ясно, что возрастающие отображения, «прогрессивные» отображения (такие, что $x \leqslant f(x)$) и «регрессивные» отображения (такие, что $f(x) \leqslant x$) являются частично изотонными.

Отображение f называется *сравнимым*, если x сравнимо с $f(x)$ для каждого $x \in X$. Частично упорядоченное множество X называется индуктивным, если каждая цепь в X имеет верхнюю грань; отображение называется *полуравномерным*, если для каждой цепи C из X множество верхних граней для C направлено вниз.

И. Климеш [105] установил, что

— каждое относительно изотонное отображение полной решётки в себя имеет неподвижную точку;
— если частично упорядоченное множество X цепочно полно (т. е. каждая цепь в X, включая пустую, имеет точную верхнюю грань), то каждое относительно изотонное отображение X в себя имеет неподвижную точку;
— решётка X является полной, если и только если каждое сравнимое отображение X в себя имеет неподвижную точку;
— полуравномерно частично упорядоченное множество X цепочно полно, если и только если каждое относительно изотонное отображение X в себя имеет неподвижную точку.

В [106] И. Климеш рассмотрел *поднимающие* отображения $f\colon X \to X$, т. е. такие, что из $f(x) \leqslant y$ следует, что $f(x) \leqslant f(y)$ при всех $x, y \in X$. Он доказал, что частично упорядоченное множество X индуктивно, если и только если каждое поднимающее отображение X в себя имеет неподвижную точку. По поводу других результатов см. [103, 104]. К примеру, в [104] рассмотрены отображения $f\colon X \to X$ на частично упорядоченном множестве, для которых $f(x) \leqslant f(y)$ при $x \leqslant y$ и $x \leqslant f(x)$; такие отображение названы И. Климешем экстенсивно изотонными.

4.3. Неподвижные точки в упорядоченных метрических пространствах

Название данного раздела немного запутывающее: в отличие от упорядоченных банаховых пространств или банаховых решёток, здесь мы рассматриваем метрическое пространство (X,ρ), наделённое отношением порядка $\leqslant$, не имеющим априори никакой связи с метрической структурой. Устанавливается существование неподвижных точек для отображений $f\colon X\to X$, монотонных (возрастающих или убывающих) относительно порядка и сжимающих относительно метрики, но в более узком смысле: существует $0\leqslant\alpha<1$, такое что

$$\rho\big(f(x),f(y)\big)\leqslant\alpha\rho(x,y),\ \text{ если } x,y\in X \text{ сравнимы (т. е. } x\leqslant y \text{ или } y\leqslant x). \quad (4.4)$$

Теорема 4.13. *Пусть (X,ρ) — полное метрическое пространство, наделённое частичным порядком $\leqslant$, и $f\colon X\to X$ — отображение, удовлетворяющее* (4.4). *Тогда верны следующие утверждения.*

1. *Если отображение f возрастает и непрерывно и существует $x_0\in X$, такое что $x_0\leqslant f(x_0)$, то f имеет неподвижную точку* [135].
2. *Предположим, что $x_n\leqslant x$ при всех $n\in\mathbb{N}$ для каждой возрастающей последовательности (x_n) из X, сходящейся к некоторому $x\in X$. Если f возрастает и существует $x_0\in X$, такое что $x_0\leqslant f(x_0)$, то f имеет неподвижную точку* [135].
3. *Предположим, что любая пара x, y элементов из X имеет верхнюю или нижнюю грань. Если f непрерывно и монотонно* (*т. е. возрастает или убывает*) *и существует $x_0\in X$, такое что $x_0\leqslant f(x_0)$ или $f(x_0)\leqslant x_0$, то f имеет единственную неподвижную точку $\bar{x}$ и $\big(f^n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к $\bar{x}$ для каждого $x\in X$* [150].
4. *Предположим, что упорядоченное множество $(X,\leqslant)$ имеет наименьший элемент x_0. Тогда утверждение пункта 3 выполнено для каждой непрерывной возрастающей функции $f\colon X\to X$, удовлетворяющей* (4.4) [97].

Доказательство. Доказательство утверждения 1 несложно. Так как f возрастает, то

$$x_0\leqslant f(x_0)\implies f(x_0)\leqslant f^2(x_0)\implies f^2(x_0)\leqslant f^3(x_0)\implies\ldots,$$

т. е. последовательность $\big(f^n(x_0)\big)$ является возрастающей. Из (4.4) имеем

$$\rho\big(f^n(x_0),f^{n+1}(x_0)\big)\leqslant\alpha\rho\big(f^{n-1}(x_0),f^n(x_0)\big)\leqslant\ldots\leqslant\alpha^n\rho\big(x_0,f(x_0)\big)$$

при всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда по неравенству треугольника

$$\rho\big(f^n(x_0),f^{n+k}(x_0)\big)\leqslant(\alpha^n+\alpha^{n+1}+\ldots+\alpha^{n+k-1})d\big(x_0,f(x_0)\big)\to0$$

при $n\to\infty$ равномерно по $k\in\mathbb{N}$, что показывает, что $\big(f^n(x_0)\big)$ — последовательность Коши, и значит, вследствие полноты метрического пространства X она сходится к некоторому $\bar{x}\in X$. По непрерывности f имеем

$$f(\bar{x})=f\Big(\lim_n f^n(x_0)\Big)=\lim_n f^{n+1}(x_0)=\bar{x}.$$

Докажем утверждение 2. Как и в доказательстве утверждения 1, последовательность $\big(f^n(x_0)\big)$ возрастает и сходится к некоторому $\bar{x} \in X$. По условию это влечёт, что $f^n(x_0) \leqslant \bar{x}$, $n \in \mathbb{N}$, и значит,

$$\rho\big(f^{n+1}(x_0), f(\bar{x})\big) \leqslant \alpha\rho(f^n(x_0), \bar{x}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует, что $\rho\big(\bar{x}, f(\bar{x})\big) = 0$, т. е. $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Докажем утверждение 3. Предположим, что f возрастает и существует $x_0 \in X$, такое что $x_0 \leqslant f(x_0)$. Тогда $\big(f^n(x_0)\big)$ — возрастающая последовательность, сходящаяся к некоторому $\bar{x} \in X$, являющемуся неподвижной точкой для f. Доказательство будет завершено, если мы покажем, что $\big(f^n(x)\big)$ сходится к $\bar{x}$ для каждого $x \in X$.

Пусть $x \in X$. Если $x \leqslant x_0$, то $f^n(x) \leqslant f^n(x_0)$, откуда по (4.4) имеем

$$\rho\big(f^n(x), f^n(x_0)\big) \leqslant \alpha\rho\big(f^{n-1}(x), f^{n-1}(x_0)\big) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n\rho(x, x_0) \to 0.$$

Как следствие,

$$\lim_n f^n(x) = \lim_n f^n(x_0) = \bar{x}.$$

Ситуация аналогична при $x \geqslant x_0$.

Если $x \in X$ не сравнимо с x_0, то по предположению x и x_0 имеют нижнюю и верхнюю грани в $(X, \leqslant)$. Если x_1 — нижняя грань для них, то $x_1 \leqslant x_0$ и $x_1 \leqslant x$, тогда из первой части доказательства

$$\bar{x} = \lim_n f^n(x_0) = \lim_n f^n(x_1) = \lim_n f^n(x).$$

Ситуация аналогична, если x и x_0 имеют верхнюю грань x_2 в X.

В случае 4 $x_0 \leqslant f(x_0)$ и для каждого $x \in X$, $x_0 \leqslant x$, мы рассуждаем, как в доказательстве утверждения 3. □

Замечание 4.14. Обычно результаты типа приведённых в теореме 4.13 называются теоремами о неподвижных точках типа Рана—Рёринг [150].

Уточнения теоремы 4.13 содержатся в [82, 134, 136, 148].

5. Частные метрические пространства

Частные метрические пространства были введены С. Мэтьюсом [124—127] при рассмотрении задач из теоретической информатики. Такие пространства удовлетворяют только аксиоме отделимости T_0, что, однако, достаточно для нужд денотационной семантики сетей данных. В этом разделе мы приводим основные понятия и результаты по таким пространствам, опираясь на [37, 124, 126, 127] (а также [99, 160]). Несмотря на то, что все упоминаемые ниже результаты о частных метрических пространств могут быть найдены в работах С. Мэтьюса или иных источниках по неподвижным точкам в таких пространствах, мы для удобства читателя приводим полные доказательства. В то же самое время мы уточняем и другие подходы к изучению вопросов о сходимости последовательностей и полноты в частных метрических пространствах, принадлежащие разным авторам.

5.1. Определение и топологические свойства

Пусть X — непустое множество.

Определение 5.1. Отображение $p\colon X\times X\to\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{PM1}) \quad x=y \iff p(x,x)=p(y,y)=p(x,y),\\
&(\mathrm{PM2}) \quad 0\leqslant p(x,x)\leqslant p(x,y),\\
&(\mathrm{PM3}) \quad p(x,y)=p(y,x),\\
&(\mathrm{PM4}) \quad p(x,z)\leqslant p(x,y)+p(y,z)-p(y,y)
\end{aligned}$$

при всех $x,y,z\in Z$, называется *частной метрикой* на X. Пара (X,p) называется *частным метрическим пространством*.

Данное определение означает следующее: в отличие от метрического случая мы допускаем возможность, что $d(x,x)>0$ при некотором $x\in X$.

Точка $x\in X$ называется *полной*, если $p(x,x)=0$, *частной*, если $p(x,x)>0$. Это соглашение объясняет термин «частный», введённый С. Мэтьюсом.

Приводимое ниже свойство вытекает из (PM2) и (PM1):

$$p(x,y)=0 \implies x=y. \tag{5.1}$$

Следующая характеризация частных метрических пространств была получена М. и В. Анисиу [19].

Теорема 5.2. *Функция $p\colon X\times X\to[0,\infty)$ является частной метрикой на X, если и только если существуют метрика d и функция $\varphi\colon X\to[0,\infty)$, нерастягивающая относительно d, такие что*

$$p(x,y)=d(x,y)+\varphi(x)+\varphi(y) \quad \textit{при всех} \quad x,y\in X.$$

При этом d и φ однозначно определяются p.

Следующие два примера частных метрических пространств возникли в связи с вопросами из теоретической информатики.

Пример 5.3. Пусть $X=2^{\mathbb{N}}$. Функция $p\colon X\times X\to[0,\infty)$, задаваемая формулой

$$p(x,y)=1-\sum_{n\in x\cap y}2^{-n},$$

является частной метрикой на X (при соглашении, что сумма по пустому множеству есть 0).

Пример 5.4. Пусть S — непустое множество, и пусть $X=S^*\cup S^{\mathbb{N}}$ — множество всех конечных (из S^*) или бесконечных последовательностей (из $S^{\mathbb{N}}$). Длина $\ell(x)$ конечной последовательности $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ равна n, а длина бесконечной последовательности $x\colon\mathbb{N}\to S$ есть ∞. Если

$$i(x,y)=\sup\{n\in\mathbb{N}\colon n\leqslant\ell(x)\wedge\ell(y),\ x_j=y_j \text{ для всех } j\leqslant n\},$$

то

$$p(x,y)=2^{-i(x,y)},\quad x,y\in X,$$

есть частная метрика на X, где мы полагаем $2^{-\infty}=0$.

Функция p является метрикой на $S^{\mathbb{N}}$, называемой метрикой Бэра, и является частной метрикой на $S^* \cup S^{\mathbb{N}}$, так как $p(x,x) = 2^{-n} > 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^*$.

Открытые шары определяются как в метрическом случае:

$$B_p(x,\varepsilon) := \{y \in X : p(x,y) < \varepsilon\}, \quad x \in X, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.2}$$

Отметим, что этом случае не исключается возможность $B_p(x,\varepsilon) = \varnothing$.

Замечание 5.5. Если $p(x,x) > 0$, то $B_p(x,\varepsilon) = \varnothing$ для каждого $0 < \varepsilon \leqslant p(x,x)$.

Если $B_p(x,\varepsilon) \neq \varnothing$, то $x \in B_p(x,\varepsilon)$.

В самом деле, по (PM2) $p(x,y) \geqslant p(x,x) \geqslant \varepsilon$ для каждого $y \in X$, что даёт $B_p(x,\varepsilon) = \varnothing$. Далее, если $y \in B_p(x,\varepsilon)$, то снова по (PM2) имеем $p(x,x) \leqslant p(x,y) < \varepsilon$, т. е. $x \in B_p(x,\varepsilon)$.

Мы также рассмотрим шары

$$B'_p(x,\varepsilon) := \{y \in X : p(x,y) < \varepsilon + p(x,x)\}, \quad x \in X, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.3}$$

В следующем предложении раскрываются некоторые свойства таких шаров.

Предложение 5.6. *Пусть (X,p) — частное метрическое пространство.*

1. *Если $y \in B_p(x,\varepsilon)$, то*
$$y \in B_p(y,\delta) \subset B_p(x,\varepsilon),$$
где $\delta := \varepsilon - p(x,y) + p(y,y) > 0$.
2. *Шары B_p и B'_p связаны следующими соотношениями:*
$$B'_p(x,\varepsilon) = B_p\big(x, \varepsilon + p(x,x)\big), \tag{5.4}$$
$$B_p(x,\varepsilon) = \begin{cases} B'_p\big(x, \varepsilon - p(x,x)\big), & \text{если } \varepsilon > p(x,x), \\ \varnothing, & \text{если } 0 < \varepsilon \leqslant p(x,x). \end{cases}$$

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $\delta := \varepsilon - p(x,y) + p(y,y)$. Тогда $\delta > 0$ (так как $p(x,y) < \varepsilon$) и $p(y,y) < \delta$, откуда получаем, что $y \in B_p(y,\delta)$.

Если $z \in B_p(y,\delta)$, то, складывая неравенства

$$p(y,z) < \varepsilon - p(x,y) + p(y,y) \quad \text{и} \quad p(x,z) \leqslant p(x,y) + p(y,z) - p(y,y),$$

мы получаем $p(x,z) < \varepsilon$, т. е. $z \in B_p(x,\varepsilon)$, и значит, $B_p(y,\delta) \subset B_p(x,\varepsilon)$.

Равенства в утверждении 2 очевидно вытекают из определений шаров (см. также замечание 5.5). □

Нашей следующей целью является введение топологии на частном метрическом пространстве и установление ряда её свойств.

Теорема 5.7. *Пусть (X,p) — частное метрическое пространство.*

1. *Семейство открытых шаров*
$$\mathcal{B} := \{B_p(x,\varepsilon),\ x \in X,\ \varepsilon > 0\} \tag{5.5}$$
является базой топологии на X, обозначаемой τ_p (иногда $\tau(p)$).

2. *Семейство $\mathcal{B}'$ множеств*

$$B'_p(x,\varepsilon) := \{y \in X \colon p(x,y) < \varepsilon + p(x,x)\}, \quad x \in X, \quad \varepsilon > 0, \tag{5.6}$$

также образует базу топологии τ_p.

3. *Любой шар $B_p(x,\varepsilon)$ является открытым множеством; для каждого $x \in X$ семейство $\mathcal{V}_p(x)$ окрестностей x задаётся как*

$$\mathcal{V}_p(x) = \{V \subset X \colon \text{найдётся } \delta > 0, \text{ такое что } x \in B_p(x,\delta) \subset V\}. \tag{5.7}$$

4. *Топология τ_p удовлетворяет аксиоме T_0.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Так как $x \in B_p\big(x, 1 + p(x,x)\big)$, то

$$X = \bigcup\{B_p\big(x, 1 + p(x,x)\big) \colon x \in X\}.$$

По предложению 5.6 имеем $B_p(z,\eta_z) \subset B_p(x,\varepsilon) \cap B_p(y,\delta)$ для $z \in B_p(x,\varepsilon) \cap \cap B_p(y,\delta)$, где

$$\eta_z := p(z,z) + \min\{\varepsilon - p(x,z), \varepsilon - p(y,z)\},$$

и значит,

$$B_p(x,\varepsilon) \cap B_p(y,\delta) = \bigcup\{B_p(z,\eta_z) \colon z \in B_p(x,\varepsilon) \cap B_p(y,\delta)\}.$$

Эти два свойства показывают, что семейство (5.5) образует базу топологии τ_p на X, т. е. каждое множество из τ_p можно представить как объединение открытых шаров вида $B_p(x,\varepsilon)$.

Тот факт, что $\mathcal{B}'$ также образует базу τ_p следует из равенств в утверждении 2 предложения 5.6.

Докажем утверждение 3. По предложению 5.6 любой шар из (X,p) представляется как

$$B_p(x,\varepsilon) = \bigcup\{B_p(y,\delta_y) \colon y \in B_p(x,\varepsilon)\} \in \tau_p,$$

где $\delta_y = \varepsilon - p(x,y) + p(y,y)$, $y \in B_p(x,\varepsilon)$.

Так как открытые шары образуют базу топологии τ_p, то $V \in \mathcal{V}_p(x)$, если и только если существуют $y \in X$ и $\varepsilon > 0$, такие что $x \in B_p(y,\varepsilon) \subset V$. Снова воспользовавшись предложением 5.6, получаем, что $x \in B_p(x,\delta) \subset B_p(y,\varepsilon) \subset V$, где $\delta = \varepsilon - p(x,y) + p(x,x)$.

Для доказательства утверждения 4 нам нужно показать, что для любой пары x, y различных точек из X существует τ_p-открытое множество, содержащее в точности одну из этих точек.

Пусть $x \neq y$ — две точки из X. По (PM1), (PM2) выполнено либо $p(x,x) < p(x,y)$, либо $p(y,y) < p(x,y)$. Предположив, что $p(x,x) < p(x,y)$, мы определим $\varepsilon := \big(p(x,x) + p(x,y)\big)/2$. Тогда

$$2p(x,x) < p(x,x) + p(x,y) = 2\varepsilon \implies p(x,x) < \varepsilon \iff x \in B_p(x,\varepsilon).$$

С другой стороны,

$$p(x,y) > p(x,x) = 2\varepsilon - p(x,y) \implies p(x,y) > \varepsilon \implies y \notin B_p(x,\varepsilon).$$

Случай $p(y,y) < p(x,y)$ рассматривается аналогично. $\square$

Замечание 5.8. Мы будем использовать соглашение, что

$$\bigcup\{A_i\colon i \in \varnothing\} = \varnothing$$

(это влечёт с учётом законов де Моргана, что $\bigcap\{A_i\colon i \in \varnothing\} = X$), и значит, $\varnothing$ лежит в семействе произвольных объединений множеств из $\mathcal{B}$. Если рассмотреть объединения только по непустым индексам, то в этом случае семейство $\mathcal{B}$ и пустое множество задают топологию τ_p.

5.2. Сходящиеся последовательности, полнота и принцип сжимающих отображений

Сходимость последовательности относительно τ_p может быть охарактеризована следующим образом.

Предложение 5.9. *Пусть (X, p) — частное метрическое пространство. Последовательность (x_n) из X τ_p-сходится к $x \in X$, если и только если*

$$\lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = p(x, x). \tag{5.8}$$

Доказательство. Предположим, что $x_n \xrightarrow{\tau_p} x$. Для $\varepsilon > 0$ пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ таково, что

$$x_n \in B_p\big(x, \varepsilon + p(x,x)\big) \iff p(x, x_n) < \varepsilon + p(x,x)$$

при всех $n \geqslant n_0$. С учётом (PM2) имеем

$$0 \leqslant p(x, x_n) - p(x,x) < \varepsilon$$

при всех $n \geqslant n_0$, что доказывает (5.8).

Обратно, предположим, что имеет место (5.8), и пусть $V \in \mathcal{V}_p(x)$. Так как по утверждению 2 теоремы 5.7 $\mathcal{B}'$ образует базу топологии τ_p, то существует $\varepsilon > 0$, такое что $B'_p(x, \varepsilon) \subset V$. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ таково, что $0 \leqslant p(x, x_n) - p(x,x) < \varepsilon$, $n \geqslant n_0$. Тогда

$$0 \leqslant p(x, x_n) - p(x,x) < \varepsilon \iff p(x, x_n) < \varepsilon + p(x,x) \iff x_n \in B'_p(x, \varepsilon) \subset V$$

при всех $n \geqslant n_0$, что доказывает, что $x_n \xrightarrow{\tau_p} x$. □

Замечание 5.10. Так как топология τ_p частного метрического пространства удовлетворяет только аксиоме T_0, то сходящаяся последовательность может иметь много пределов. Действительно, если $x_n \xrightarrow{\tau_p} x$, то $x_n \xrightarrow{\tau_p} y$ для любого $y \in X$, для которого $p(x, y) = p(y, y)$, так как

$$0 \leqslant p(y, x_n) - p(y,y) \leqslant p(y,x) + p(x,x_n) - p(x,x) - p(y,y) = p(x,x_n) - p(x,x) \to 0.$$

Для обеспечения единственности и определения разумного понятия полноты нам потребуется более сильное понятие сходимости.

Определение 5.11. Мы говорим, что последовательность (x_n) в частном метрическом пространстве *собственно сходится* к $x \in X$, если

$$\lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n). \tag{5.9}$$

Иными словами, (x_n) собственно сходится к x, если и только если (x_n) сходится к x относительно τ_p и при этом

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = p(x, x). \tag{5.10}$$

Предложение 5.12. *Пусть (X, p) — частное метрическое пространство и последовательность (x_n) из X собственно сходится к $x \in X$. Тогда*

i) *предел единственен*;

ii) $\lim\limits_{m,n\to\infty} p(x_m, x_n) = p(x, x)$.

Доказательство. Предположим, что $x, y \in X$ таковы, что (x_n) собственно сходится к x и к y. Тогда

$$p(x, y) \leqslant p(x, x_n) + p(x_n, y) - p(x_n, x_n) \to p(y, y) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что даёт $p(x, y) \leqslant p(y, y)$. Но $p(y, y) \leqslant p(x, y)$ по (PM2), откуда следует, что

$$p(x, y) = p(y, y) = p(x, x), \tag{5.11}$$

что ввиду (PM1) даёт $x = y$.

Для доказательств ii) заметим, что

$$p(x_m, x_n) \leqslant p(x_m, x) + p(x, x_n) - p(x, x),$$

и значит,

$$p(x_m, x_n) - p(x, x) \leqslant p(x_m, x) - p(x, x_n) - 2p(x, x) \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty.$$

Далее,

$$\begin{aligned} p(x, x) \leqslant p(x, x_m) + p(x_m, x) - p(x_m, x_m) \leqslant \\ \leqslant p(x, x_m) + p(x_m, x_n) + p(x_n, x) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m), \end{aligned}$$

что даёт

$$p(x, x) - p(x_m, x_n) \leqslant p(x, x_m) + p(x_n, x) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty.$$

Как следствие, $\lim\limits_{m,n\to\infty} p(x_m, x_n) = p(x, x)$. □

Замечание 5.13. Некоторые авторы помещают условие ii) из предложения 5.12 в определение собственно сходящейся последовательности. Как было показано выше, это условие эквивалентно условию из определения 5.11

Последовательность Коши в частных метрических пространств определяется следующим образом.

Определение 5.14. Последовательность (x_n) в частном метрическом пространстве (X,p) называется *последовательностью Коши*, если существует $a \geqslant 0$ из $\mathbb{R}$, такое что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, для которого

$$|p(x_n, x_m) - a| < \varepsilon$$

при всех $m, n \geqslant n_\varepsilon$; это также записывается как $\lim\limits_{m,n\to\infty} p(x_n, x_m) = a$.

Частное метрическое пространство (X,p) называется *полным*, если любая последовательность Коши собственно сходится к некоторому $x \in X$.

Отображение f, действующее в частном метрическом пространстве (X,p), называется *сжимающим*, если существует $0 \leqslant \alpha < 1$, такое что

$$p\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \alpha\, p(x,y) \quad \text{при всех} \quad x, y \in X. \tag{5.12}$$

Для частных метрических пространств также верен аналог принципа сжимающих отображений (см. [124, 127]).

Теорема 5.15. *Пусть (X,p) — полное частное метрическое пространство. Тогда каждое сжимающее отображение $f\colon X \to X$ имеет неподвижную точку x_0, такую что $p(x_0, x_0) = 0$.*

Доказательство (набросок). Пусть f — α-сжимающее отображение на X, $0 \leqslant \alpha < 1$. Мы показываем, что для каждого $z \in X$ последовательность итераций $\big(f^n(z)\big)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{m,n\to\infty} p\big(f^n(z), f^m(z)\big) = 0,$$

т. е. является последовательностью Коши. Вследствие полноты (X,p) существует $x_0 \in X$, такое что

$$0 = \lim_{n\to\infty} p\big(f^n(z), f^n(z)\big) = p(x_0, x_0) = \lim_{n\to\infty} p\big(x_0, f^n(z)\big).$$

Далее,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant p\big(x_0, f(x_0)\big) &\leqslant p\big(x_0, f^n(x_0)\big) + p\big(f^n(x_0), f(x_0)\big) - p\big(f^n(x_0), f^n(x_0)\big) \leqslant \\ &\leqslant p\big(x_0, f^n(x_0)\big) + \alpha p(f^{n-1}(x_0), x_0) - p\big(f^n(x_0), f^n(x_0)\big) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $p\big(x_0, f(x_0)\big) = 0 = p(x_0, x_0)$. Как следствие, $0 \leqslant p\big(f(x_0), f(x_0)\big) \leqslant \alpha p(x_0, x_0) = 0$, что даёт $p\big(f(x_0), f(x_0)\big) = 0$, и следовательно, $f(x_0) = x_0$ по (PM1). □

Замечание 5.16. С. Дж. О'Нейл [131] рассмотрел частные метрики со значениями в $\mathbb{R}$ (а не в $\mathbb{R}_+$, как в случае частной метрики Мэтьюса) и нашёл их приложения в теории доменов. Пространства такого типа иногда называются *двойственными частными метрическими пространствами*. Обобщение теоремы Банаха о неподвижной точке на этот случай было дано С. Ольтра и О. Валеро [137] (см. также [191]). В этом случае условие сжимаемости записывается следующим образом:

существует $0 \leqslant \alpha < 1$, такое что $\big|p\big(f(x), f(y)\big)\big| \leqslant \alpha |p(x,y)|$ для всех $x, y \in X$.

Обобщения различных теорем о неподвижных точках со случая метрических пространств на случай частных метрических пространств были найдены О. Валеро в соавторстве с другими математиками (см. [6, 7, 163, 164, 192], а также [159]).

5.3. Топология и порядок на частных метрических пространствах

В данном разделе мы изучаем поведение порядка специализации (3.2) относительно топологии $\tau(p)$, порождаемой частной метрикой p.

Предложение 5.17. *Пусть* (X,p) — *частное метрическое пространство и* $\leqslant_p$ — *порядок специализации на* X.

1. *Порядок специализации характеризуется следующим условием*:
$$x \leqslant_p y \iff p(x,x) = p(x,y). \tag{5.13}$$
2. *Каждый открытый шар* $B_p(x,\varepsilon)$ *замкнут вверх. Как следствие, каждое* τ_p*-открытое множество замкнуто вверх.*
3. *Топология Александрова* $\tau_{\mathrm{a}}(\leqslant_p)$, *порождаемая предпорядком* $\leqslant_p$ (*см. предложение* 3.9), *сильнее, чем* $\tau(p)$. *Равенство* $\tau(p) = \tau_{\mathrm{a}}(\leqslant_p)$ *имеет место, если и только если*
$$\text{для каждого } x \in X \text{ существует } \varepsilon_x > 0, \text{ такое что } B_p(x,\varepsilon_x) = \uparrow x. \tag{5.14}$$

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $x \leqslant_p y$. По определению
$$x \leqslant_p y \iff x \in \overline{\{y\}},$$
так что
$$\begin{aligned}&\text{для каждого } \varepsilon > 0\ \{y\} \cap B'_p(x,\varepsilon) \neq \varnothing \iff \\ &\iff \text{для каждого } \varepsilon > 0\ p(x,y) < \varepsilon + p(x,x) \implies \\ &\implies p(x,y) \leqslant p(x,x).\end{aligned}$$
Но в силу (PM2) $p(x,x) \leqslant p(x,y)$, что даёт $p(x,x) = p(x,y)$.

В обратную сторону, если $p(x,x) = p(x,y)$, то $p(x,y) < \varepsilon + p(x,x)$ при всех $\varepsilon > 0$, что даёт $x \in \overline{\{y\}}$, т. е. $x \leqslant_p y$.

Докажем утверждение 2. Пусть $y \in B_p(x,\varepsilon)$ и
$$y \leqslant_p z \iff p(y,z) = p(y,y).$$
Тогда
$$p(x,z) \leqslant p(x,y) + p(y,z) - p(y,y) = p(x,y) < \varepsilon,$$
т. е. $z \in B_p(x,\varepsilon)$.

Пусть $U \subset X$ τ_p-открыто. Тогда для каждого $x \in U$ существует $\varepsilon_x > 0$, такое что $B_p(x,\varepsilon_x) \subset U$. Если $x \in U$ и $x \leqslant_p y$, то, поскольку $B_p(x,\varepsilon_x)$ замкнут вверх, $y \in B_p(x,\varepsilon_x) \subset U$. Это показывает, что U замкнуто вверх.

Докажем утверждение 3. Поскольку топология Александрова является наиболее сильной, в которой индуцированный порядок специализации совпадает с $\leqslant_p$ (предложение 3.9), то $\tau(p) \subset \tau(\leqslant_p)$.

Теперь, предположив, что условие (5.14) выполнено, рассмотрим $Z \in \tau(\leqslant_p)$. Так как открытые множества замкнуты вверх, то

$$Z = \bigcup\{\uparrow x \colon x \in Z\} = \bigcup\{B_p(x, \varepsilon_x) \colon x \in Z\} \in \tau(p).$$

Это даёт $\tau(\leqslant_p) \subset \tau(p)$, и значит, с учётом первого утверждения из пункта 2 имеем $\tau(\leqslant_p) = \tau(p)$.

Обратно, предположим, что $\tau(\leqslant_p) = \tau(p)$. Тогда для каждого $x \in X$ имеем $\uparrow x \in \tau(p)$, что гарантирует существование $\varepsilon_x > 0$, такого что $x \in B_p(x, \varepsilon_x) \subset \subset \uparrow x$. Если $y \in \uparrow x$, то $p(x, y) = p(x, x) < \varepsilon_x$, т. е. $y \in B_p(x, \varepsilon_x)$, что даёт $B_p(x, \varepsilon_x) = \uparrow x$. □

Замечание 5.18. В терминах порядка специализации $\leqslant_p$ частного метрического пространства (X, p) замечание 5.10 утверждает, по сути, что если последовательность (x_n) в X сходится к $x \in X$, то она сходится к каждому y, такому что $y \leqslant_p x$. Сходным образом равенства (5.11) утверждают, что если (x_n) собственно сходится к x и y, то $x \leqslant_p y$ и $y \leqslant_p x$, т. е. $x = y$.

5.4. Порядок специализации в квазиметрических пространствах

В данном разделе мы дадим описание порядка специализации в квазиметрическом пространстве.

Предложение 5.19. *Пусть (X, q) — квазиметрическое пространство.*

1. *Порядок специализации $\leqslant_q$, соответствующий q, задаётся как*

$$x \leqslant_q y \iff q(x, y) = 0. \tag{5.15}$$

2. *Каждое открытое множество замкнуто вверх.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Для $x, y \in X$ имеем

$$\begin{aligned} x \leqslant_q y \iff x \in \overline{\{y\}} \iff \text{для каждого } \varepsilon > 0 \ y \in B_q(x, \varepsilon) \iff \\ \iff \text{для каждого } \varepsilon > 0 \ q(x, y) < \varepsilon \iff q(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Докажем утверждение 2. Покажем сначала, что открытый шар $B_q(x, \varepsilon)$ замкнут вверх. Действительно, $y \in B_q(x, \varepsilon)$ и $y \leqslant_q z$ показывают, что

$$q(x, z) \leqslant q(x, y) + q(y, z) = q(x, y) < \varepsilon.$$

Теперь если $U \subset X$ τ_q-открыто, то для каждого $x \in U$ существует $\varepsilon_x > 0$, такое что $B_q(x, \varepsilon_x) \subset U$. Итак, если $x \leqslant_q y$, то $y \in B_q(x, \varepsilon_x) \subset U$. □

Замечание 5.20. Если q только квазиполуметрика (см. определение 2.16), то (5.15) определяет только предпорядок $\leqslant_q$, который является порядком, если и только если q — квазиметрика.

В самом деле,

$$(x \leqslant_q y \wedge y \leqslant_q x) \iff (q(x,y) = 0 \wedge q(y,x) = 0) \iff x = y.$$

В этом случае также выполнен принцип сжимающих отображений. Отображение f, заданное на квазиметрическом пространство (X, q), называется *сжимающим*, если существует $\alpha \in [0,1)$, такое что при всех $x, y \in X$

$$q\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \alpha\, q(x,y). \tag{5.16}$$

Теорема 5.21 (принцип сжимающих отображений для квазиметрических пространств [126]). *Пусть (X, q) — квазиметрическое пространство, такое что ассоциированное метрическое пространство (X, q^s) полно. Тогда каждое сжимающее отображение на (X, q) имеет неподвижную точку.*

5.5. Частные метрики и квазиметрики

В данном разделе мы приводим ряд соотношений между частными метриками и квазиметриками.

Предложение 5.22. *Пусть (X, p) — частное метрическое пространство. Тогда отображение $q\colon X^2 \to \mathbb{R}_+$, задаваемое формулой*

$$q(x,y) = p(x,y) - p(x,x), \quad x, y \in X, \tag{5.17}$$

является квазиметрикой на X. При этом порождаемая p топология $\tau(p)$ совпадает с топологией $\tau(q)$, порождаемой q; соответствующие порядки специализации $\leqslant_p$ и $\leqslant_q$ также совпадают.

Доказательство. Прямая проверка показывает, что задаваемое (5.17) отображение q является квазиметрикой на X.

Для $0 < \varepsilon \leqslant p(x,x)$ имеем $B_p(x,\varepsilon) = \varnothing \in \tau(q)$. Если $\varepsilon > p(x,x)$, то $B_p(x,\varepsilon) = B_q\big(x, \varepsilon - p(x,x)\big) \in \tau(q)$, что влечёт $\tau(p) \subset \tau(q)$.

Так как для каждого $\varepsilon > 0$ имеет место $B_q(x,\varepsilon) = B_p\big(x, \varepsilon + p(x,x)\big) \in \tau(p)$, то $\tau(q) \subset \tau(p)$. Теперь с учётом (5.13) имеем

$$\begin{aligned} x \leqslant_p y \iff p(x,y) = p(x,x) \iff q(x,y) = 0 \iff \\ \iff \text{для каждого } \varepsilon > 0 \ y \in B_q(x,\varepsilon) \iff x \in \overline{\{y\}}^q \iff x \leqslant_q y. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание 5.23. Имеем, что

$$q^s(x,y) = q(x,y) + q(y,x) = 2q(x,y) - p(x,x) - p(y,y), \quad x, y \in X, \tag{5.18}$$

является метрикой на X (метрика, ассоциированная с частной метрикой p).

Следующий результат показывает, что полнота частного метрического пространства (X, p) эквивалентна полноте ассоциированного метрического пространства (X, q^s).

Предложение 5.24. *Пусть (X, p) — частное метрическое пространство и q^s — метрика, ассоциированная с p, задаваемая формулой* (5.18).

1. *Сходимость и полнота пространств* (X, p) *и* (X, q^s) *связаны следующим образом*:

   i) *последовательность* (x_n) *из* X *собственно сходится к* $x \in X$, *если и только если* $x_n \xrightarrow{q^s} x$;

   ii) *последовательность* (x_n) *из* X *есть* p*-последовательность Коши, если и только если она является* q^s*-последовательностью Коши*;

   iii) *частное метрическое пространство* (X, p) *является полным, если и только если ассоциированное метрическое пространство* (X, q^s) *полно.*

2. *Для любого* $x \in X$ *отображение* $p(x, \cdot)$ q^s*-полунепрерывно снизу на* X. *Отображение* $\beta\colon X \to [0, \infty)$, *задаваемое формулой* $\beta(x) = p(x, x)$, $x \in X$, *является* q^s*-непрерывным* (см. [151]).

Доказательство. Докажем утверждение i) пункта 1. По определению

$$x_n \xrightarrow{q^s} x \iff p(x_n, x) - p(x, x) + p(x_n, x) - p(x_n, x_n) \to 0.$$

Так как $p(x_n, x) - p(x, x) \geqslant 0$ и $p(x_n, x) - p(x_n, x_n) \geqslant 0$, то последнее условие эквивалентно следующему:

$$\begin{cases} p(x_n, x) \to p(x, x), \\ p(x_n, x) - p(x_n, x_n) \to 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p(x_n, x) \to p(x, x), \\ p(x_n, x_n) \to p(x, x), \end{cases}$$

т. е. тому, что (x_n) собственно сходится к x.

Докажем утверждение ii) пункта 1.

I. *Любая* p*-последовательность Коши является* q^s*-последовательностью Коши.*

Пусть (x_n) — p-последовательность Коши в X, т. е.

$$\lim_{m,n\to\infty} p(x_m, x_n) = a$$

при некотором $a \in \mathbb{R}_+$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} p(x_k, x_k) = a$, откуда получаем, что

$$q^s(x_m, x_n) = 2\,p(x_m, x_n) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty,$$

что показывает, что последовательность (x_n) является q^s-последовательностью Коши.

II. *Любая* q^s*-последовательность Коши является* p*-последовательностью Коши.*

Пусть (x_n) — q^s-последовательность Коши в X, т. е.

$$q^s(x_m, x_m) = p(x_m, x_n) - p(x_n, x_n) + p(x_m, x_n) - p(x_m, x_m) \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty,$$

это эквивалентно тому, что

$$0 \leqslant p(x_m, x_n) - p(x_n, x_n) \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant p(x_m, x_n) - p(x_m, x_m) \to 0 \tag{5.19}$$

при $m, n \to \infty$. Вычитая, мы получаем, что

$$p(x_m, x_m) - p(x_n, x_n) \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty. \tag{5.20}$$

Мы покажем, что сеть $\big(p(x_m, x_n)\big)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ является сетью Коши в $\mathbb{R}_+$.

Пусть $\varepsilon > 0$. По (5.19) и (5.20) существует $k_0 \in \mathbb{N}$, такое что

$$\begin{aligned} &0 \leqslant p(x_m, x_n) - p(x_n, x_n) < \varepsilon, \\ &0 \leqslant p(x_{m'}, x_{n'}) - p(x_{n'}, x_{n'}) < \varepsilon, \\ &|p(x_n, x_n) - p(x_{n'}, x_{n'})| < \varepsilon \end{aligned}$$

при всех $m, n, m', n' \geqslant k_0$. Как следствие,

$$\begin{aligned} &|p(x_m, x_n) - p(x_{m'}, x_{n'})| \leqslant \\ &\leqslant |p(x_m, x_n) - p(x_n, x_n)| + |p(x_n, x_n) - p(x_{n'}, x_{n'})| + |p(x_{n'}, x_{n'}) - p(x_{m'}, x_{n'})| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

при всех $m, n, m', n' \geqslant k_0$. Отсюда вытекает, что сеть $\big(p(x_m, x_n)\big)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ является сетью Коши в $\mathbb{R}_+$, и значит, она сходится к некоторому $a \in \mathbb{R}_+$, что означает, что (x_n) — p-последовательность Коши.

Утверждение iii) пункта 1 вытекает из определения полноты частного метрического пространства (X, p) и из i), ii).

Докажем утверждение 2. Зафиксируем $x, y \in X$. Если (y_n) — последовательность в X, q^s-сходящаяся к y, то по утверждению i) пункта 1 имеем

$$\lim_n p(y_n, y) = p(y, y) = \lim_n p(y_n, y_n),$$

откуда следует, что $\lim\limits_n [p(y_n, y) - p(y_n, y_n)] = 0$.

Переходя к нижнему пределу в неравенстве

$$p(x, y) \leqslant p(x, y_n) + p(y_n, y) - p(y_n, y_n),$$

мы получаем, что $p(x, y) \leqslant \liminf\limits_n p(x, y_n)$, что показывает, что $p(x, \cdot)$ является q^s-полунепрерывной снизу в y.

Пусть теперь $x \in X$ фиксировано и (x_n) — последовательность из X, q^s-сходящаяся к x. По первому утверждению это эквивалентно тому, что (x_n) собственно сходится к x, что по определению 5.11 даёт $\beta(x_n) = p(x_n, x_n) \to p(x, x) = \beta(x)$. □

Замечание 5.25. Определение 5.14 последовательности Коши в частном метрическом пространстве взято из [127] (см. также [37]). В [124] предложено следующее эквивалентно определение: последовательность (x_n) в частном метрическом пространстве (X, p) называется *последовательность Коши*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое что при всех $m, n \geqslant n_\varepsilon$

$$0 \leqslant p(x_n, x_m) - p(x_m, x_m) < \varepsilon.$$

В самом деле, (5.19) показывают, что это эквивалентно тому, что (x_n) является q^s-последовательностью Коши, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что (x_n) является p-последовательностью Коши.

Замечание 5.26. На частном метрическом пространстве (X, p) можно определить иную метрику, задаваемую следующим образом: $d(x, y) = 0$, если $x = y$ и $d(x, y) = p(x, y)$ при $x \neq y$. В этом случае $\tau_{q^s} \subset \tau_d$ и метрическое пространство (X, d) является полным, если и только если частное метрическое пространство (X, p) полно. С помощью этого результата можно показать, что ряд результатов для частных метрических пространств может быть напрямую получен из их аналогов в метрическом случае (см. [64]). Сходная ситуация возникает для так называемых конусометрических пространств (см., к примеру, обзорную работу [84]).

5.6. Существование точной верхней грани в частных метрических пространствах

В данном разделе мы покажем, что каждая возрастающая последовательность в частном метрическом пространстве имеет точную верхнюю грань и собственно сходится к ней. Мы называем отображение $f\colon (X_1, p_1) \to (X_2, p_2)$ *собственно непрерывным*, если $\big(f(x_n)\big)$ собственно сходится к $f(x)$ для каждой последовательности (x_n) из X_1, собственно сходящейся к x.

Предложение 5.27. *Пусть* (X, p) — *частное метрическое пространство и* $\leqslant_p$ — *порядок специализации, соответствующий* p.

1. *Если* (X, p) *полно, то каждая возрастающая последовательность* $x_1 \leqslant_p x_2 \leqslant_p \ldots$ *из* X *имеет точную верхнюю грань* x *и* (x_n) *собственно сходится к* x.
2. *Пусть* (X_1, p_1), (X_2, p_2) — *полные частные метрические пространства с порядками специализации* $\leqslant_1$, $\leqslant_2$ *соответственно и* $f\colon (X_1, p_1) \to (X_2, p_2)$ — *отображение. Если* f *собственно непрерывно и монотонно, то* f *сохраняет точную верхнюю грань возрастающей последовательности, т. е.* $\sup\limits_n f(x_n) = f(x)$ *для каждой возрастающей последовательности* $x_1 \leqslant_1 x_2 \leqslant_1 \ldots$ *из* X_1, *у которой* $\sup\limits_n x_n = x$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Мы сначала покажем, что (x_n) — последовательность Коши. В самом деле,

$$x_n \leqslant_p x_{n+k} \iff p(x_n, x_{n+k}) - p(x_n, x_n) = 0,$$

откуда с учётом замечания 5.25 получаем, что (x_n) — последовательность Коши. Полнота влечёт существование такого $x \in X$, что (x_n) собственно сходится к x, т. е.

$$\lim_n p(x, x_n) = p(x, x) = \lim_n p(x_n, x_n). \tag{5.21}$$

Нам требуется показать, что $x = \sup\limits_n x_n$, т. е.

$$\begin{aligned} &x_n \leqslant x \text{ при всех } n \in \mathbb{N};\\ &\text{если } x_n \leqslant y \text{ при всех } n \in \mathbb{N}, \text{ то } x \leqslant y. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Для всех $n, k \in \mathbb{N}$ имеем

$$p(x_n, x) \leqslant p(x_n, x_{n+k}) + p(x_{n+k}, x) - p(x_{n+k}, x_{n+k}) = \\ = p(x_n, x_n) + p(x_{n+k}, x) - p(x_{n+k}, x_{n+k}).$$

Устремляя k к ∞ и учитывая (5.21), мы получаем, что $p(x_n, x) \leqslant p(x_n, x_n)$, откуда по (PM2) и из определения 5.1 имеем $p(x_n, x) = p(x_n, x_n)$, т. е. $x_n \leqslant_p x$.

Теперь предположим, что $x_n \leqslant_p y$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$p(x, y) \leqslant p(x, x_n) + p(x_n, y) - p(x_n, x_n) = p(x_n, y) = p(x_n, x_n)$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Устремляя n к ∞, мы получаем $p(x, y) \leqslant p(x, x)$ (с учётом (5.21)). Тогда $p(x, y) = p(x, x)$, т. е. $x \leqslant_p y$. Как следствие, оба условия из (5.22) выполнены.

Докажем утверждение 2. Пусть $x_1 \leqslant_1 x_2 \leqslant_1 \ldots$ — возрастающая последовательность в X, для которой $\sup\limits_n x_n = x$. Тогда (x_n) p_1-собственно сходится к x. Далее, $\bigl(f(x_n)\bigr)$ — $\leqslant_2$-возрастающая последовательность, собственно сходящаяся к $f(x)$. По утверждению 1 это влечёт, что $\sup\limits_n f(x_n) = f(x)$. □

Замечание 5.28. Представляется вероятным, что свойства из утверждения 1 предложения 5.27 характеризуют полноту частного метрического пространства (X, p) (как в теореме 4.12). Что касается утверждения 2, то автору не известно, эквивалентна ли непрерывность по Скотту непрерывности отображения f.

5.7. Теорема Каристи о неподвижной точке и полнота в частных метрических пространствах

В данном разделе, следуя [151], мы покажем эквивалентность теоремы Каристи о неподвижной точке полноте соответствующего частного метрического пространства.

Пусть (X, p) — частное метрическое пространство. Напомним условие Каристи для отображения $f\colon X \to X$:

$$p\bigl(x, f(x)\bigr) \leqslant \varphi(x) - \varphi\bigl(f(x)\bigr) \tag{Car_φ}$$

при всех $x \in X$. Здесь φ — функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$. В соответствии со свойствами непрерывности функции φ мы различаем два типа условий Каристи. Мы говорим, что отображение f является

- p-отображением Каристи, если (Car_φ) выполнено при некоторой ограниченной снизу p-полунепрерывной снизу функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$,
- q^s-отображением Каристи, если (Car_φ) выполнено при некоторой ограниченной снизу q^s-полунепрерывной снизу функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$,

где q^s — метрика, ассоциированная с p согласно (5.18).

В [151] показано, что полнота частного метрического пространства (X, p) не может быть охарактеризована через свойство существования неподвижных точек p-отображений Каристи.

Пример 5.29. Рассмотрим частную метрику $p(m,n) = \max\{m^{-1}, n^{-1}\}$ на $\mathbb{N}$. Ассоциированная метрика q^s задаётся как $q^s(m,n) = |m^{-1} - n^{-1}|$, $m, n \in \mathbb{N}$. Если $0 < \varepsilon < [n(n+1)]^{-1}$, то $B_{q^s}(n,\varepsilon) = \{n\}$, т. е. топология $\tau(q^s)$ задаётся дискретной метрикой на $\mathbb{N}$, и значит, только стационарные последовательности являются сходящимися. Пространство $(\mathbb{N}, q^s)$ неполно, так как $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, является q^s-последовательностью Коши и не q^s-сходится. С другой стороны, на $\mathbb{N}$ нет p-отображений Каристи.

Для получения характеризации требуемого типа нам потребуется ещё одно определение.

Определение 5.30. Пусть (X,p) — частное метрическое пространство. Последовательность (x_n) из X называется 0-*последовательностью Коши*, если $\lim\limits_{m,n\to\infty} p(x_m, x_n) = 0$. Частное метрическое пространство (X,p) называется 0-*полным*, если всякая 0-последовательность Коши (x_n) сходится относительно τ_p к некоторому $x \in X$, такому что $p(x,x) = 0$.

Замечание 5.31. Данное определение содержится в [151]. С учётом предложения 5.24 следующие утверждения эквивалентны:

$$\begin{cases} \lim\limits_{m,n\to\infty} p(x_n, x_m) = 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} p(x, x_n) = p(x,x), \\ p(x,x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lim\limits_{m,n\to\infty} p(x_n, x_m) = 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} p(x, x_n) = p(x,x), \\ p(x,x) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} p(x_n, x_n). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} (x_n) \text{ — } q^s\text{-последовательность Коши,} \\ x_n \xrightarrow{q^s} x. \end{cases}$$

Как следствие, частное метрическое пространство (X,p) 0-полно, если и только если каждая 0-последовательность Коши собственно сходится и если и только если каждая 0-последовательность Коши q^s-сходится.

Замечание 5.32. Ясно, что полное частное метрическое пространство 0-полно, при этом обратная импликация не имеет места (см. [151]).

Отметим следующее свойство.

Замечание 5.33 [1]. Пусть (X,p) — частное метрическое пространство, (x_n) — последовательность в X, $x \in X$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n, x) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n, y) = p(x,y)$ для каждого $y \in Y$.

В самом деле,

$$p(x_n, y) \leqslant p(x_n, x) + p(x,y) - p(x,x) \leqslant p(x_n, x) + p(x,y),$$

что даёт $p(x_n, y) - p(x,y) \leqslant p(x_n, x)$. Далее,

$$p(x,y) \leqslant p(x, x_n) + p(x_n, y) - p(x_n, x_n) \leqslant p(x, x_n) + p(x_n, y)$$

даёт, что $p(x,y) - p(x_n, y) \leqslant p(x, x_n)$. Как следствие,

$$|p(x,y) - p(x_n, y)| \leqslant p(x, x_n) \to 0.$$

Имеет место следующая характеризация [99, 151].

Теорема 5.34. *Пусть (X,p) — частное метрическое пространство. Тогда (X,p) 0-полно, если и только если каждое q^s-отображение Каристи на X имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Предположим, что (X,p) 0-полно, и пусть $f\colon X\to X$ — q^s-отображение Каристи при некоторой q^s-полунепрерывной снизу ограниченной снизу функции $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$. Для $x\in X$ положим

$$A_x := \{y\in X\colon p(x,y)+\varphi(y)\leqslant\varphi(x)\}.$$

Тогда по (Car_φ) имеем $f(x)\in A_x$, и A_x q^s-замкнуто, поскольку по предложению 5.24 отображение $p(x,\cdot)+\varphi(\cdot)$ q^s-полунепрерывно снизу.

Начиная с произвольного $x_0\in X$, мы построим по индукции последовательность q^s-замкнутых множеств A_{x_n}, такую что при всех $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &x_k\in A_{x_{k-1}} \ \text{ и } \ A_{x_k}\subset A_{x_{k-1}},\\ &p(x_k,x)<\frac{1}{2^k} \ \text{ для всех } \ x\in A_{x_k}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Предположим, что x_k и A_{x_k}, $k=0,1,\ldots,n$, удовлетворяют условиям (5.23). Выберем $x_{n+1}\in A_{x_n}$, такое что

$$\varphi(x_{n+1})<\inf\varphi\big(A_{x_n}\big)+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Если $y\in A_{x_{n+1}}$, то

$$\begin{aligned} p(x_n,y)&\leqslant p(x_n,x_{n+1})+p(x_{n+1},y)-p(x_{n+1},x_{n+1})\leqslant\\ &\leqslant\varphi(x_n)-\varphi(x_{n+1})+\varphi(x_{n+1})-\varphi(y)-p(x_{n+1},x_{n+1})\leqslant\varphi(x_n)-\varphi(y), \end{aligned}$$

что показывает, что $y\in A_{x_n}$, и значит, $A_{x_{n+1}}\subset A_{x_n}$.

Для $x\in A_{x_{n+1}}\subset A_{x_n}$

$$\begin{aligned} p(x_{n+1},x)&\leqslant\varphi(x_{n+1})-\varphi(x)\leqslant\inf\varphi\big(A_{x_n}\big)+\frac{1}{2^{n+1}}-\varphi(x)\leqslant\\ &\leqslant\varphi(x)+\frac{1}{2^{n+1}}-\varphi(x)=\frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Для $m>n$ $x_m\in A_{x_{m-1}}\subset A_{x_n}$, откуда получаем, что $p(x_n,x_m)<1/2^n$, что показывает, что (x_n) — 0-последовательность Коши. Отсюда вытекает, что существует $z\in X$, такое что $p(z,z)=0$ и

$$\lim_n p(x_n,z)=0.$$

По замечанию 5.31 $x_n\xrightarrow{q^s}z$. Так как каждое множество A_{x_n} q^s-замкнуто и $x_{n+k}\in A_{x_{n+k-1}}\subset A_{x_n}$ при всех $k\in\mathbb{N}$, то $z\in A_{x_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Из неравенств

$$\begin{aligned} p\big(x_n,f(z)\big)&\leqslant p(x_n,z)+p\big(z,f(z)\big)\leqslant\\ &\leqslant\varphi(x_n)-\varphi(z)+\varphi(z)-\varphi\big(f(z)\big)\leqslant\varphi(x_n)-\varphi\big(f(z)\big) \end{aligned}$$

вытекает, что

$$f(z) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{x_n}.$$

Как следствие, $p\big(x_n, f(z)\big) < 1/2^n$, и следовательно, поскольку $p\big(\cdot, f(z)\big)$ q^s-полунепрерывно снизу, то

$$0 \leqslant p\big(z, f(z)\big) \leqslant \liminf_n p\big(x_n, f(z)\big) \leqslant \lim_n \frac{1}{2^n} = 0,$$

и значит, $p\big(z, f(z)\big) = 0$. Из неравенства

$$p\big(f(z), f(z)\big) \leqslant p(f(z), z) + p\big(z, f(z)\big) - p(z, z) = 0$$

вытекает, что

$$p\big(z, f(z)\big) = p(z, z) = p\big(f(z), f(z)\big) = 0,$$

что влечёт $f(z) = z$.

Для доказательства обратного утверждения, предположим, что частное метрическое пространство (X, p) не 0-полно. Тогда существует 0-последовательность Коши $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, которая не сходится собственно в (X, p). Переходя к подпоследовательности, мы считаем, что точки x_n попарно различны и

$$p(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{при всех} \quad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{5.24}$$

Пусть

$$A := \{x_n \colon n \in \mathbb{N}_0\}.$$

По предложению 5.24 (x_n) является q^s-последовательностью Коши, которая не q^s-сходится. Значит, у неё нет предельных точек, что влечёт, что множество A q^s-замкнуто.

Рассмотрим функции $f\colon X \to X$ и $\varphi\colon X \to [0, \infty)$, задаваемые формулами

$$f(x) = \begin{cases} x_0, & x \in X \setminus A, \\ x_{n+1}, & x = x_n,\ n \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} p(x_0, x) + 1, & x \in X \setminus A, \\ 1/2^n, & x = x_n,\ n \in \mathbb{N}_0. \end{cases} \tag{5.25}$$

Ясно, что f не имеет неподвижных точек.

I. *Функция φ является q^s-полунепрерывной снизу.*

Пусть (y_n) — последовательность из X, q^s-сходящаяся к некоторому $y \in X$.

Если $y \in X \setminus A$, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое что $y_n \in X \setminus A$ при всех $n \geqslant n_0$. Так как $p(x_0, \cdot)$ q^s-полунепрерывно снизу (предложение 5.24), то $\varphi(y) \leqslant \liminf_n \varphi(y_n)$.

Теперь предположим, что $y = x_k$ при некотором $k \in \mathbb{N}_0$. Через (y_{m_j}), $m_1 < m_2 < \ldots$, обозначим последовательность элементов из (y_n), лежащих в A, а через (y_{n_i}), $n_1 < n_2 < \ldots$, последовательность элементов, лежащих в $X \setminus A$. Если множество $\{m_j \colon j \in \mathbb{N}\}$ бесконечно, то $y_{m_j} = x_k$, $j \geqslant j_0$, при некотором $j_0 \in \mathbb{N}$, откуда следует, что $\varphi(x_k) = 2^{-k} = \lim_j \varphi\big(y_{m_j}\big)$.

Если множество $\{n_i : i \in \mathbb{N}\}$ бесконечно, то

$$\varphi(x_k) = \frac{1}{2^k} \leqslant 1 \leqslant \liminf_i [p(x_0, y_{n_i}) + 1] = \liminf_i \varphi(y_{n_i}). \tag{5.26}$$

Как следствие, во всех случаях $\varphi(y) \leqslant \liminf_n \varphi(y_n)$.

II. *f является отображением Каристи по отношению к φ.*

В самом деле, если $x \in X \setminus A$, то $f(x) = x_0$ и

$$p\big(x, f(x)\big) = p(x, x_0) = \varphi(x) - 1 = \varphi(x) - \varphi\big(f(x)\big).$$

Если $x = x_k$ при некотором $k \in \mathbb{N}_0$, то $f(x_k) = x_{k+1}$ и по (5.24)

$$p\big(x_k, f(x_k)\big) = p(x_k, x_{k+1}) < \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} = \varphi(x_k) - \varphi\big(f(x_k)\big).$$

Как следствие, f является q^s-отображением Каристи без неподвижных точек. □

Замечание 5.35. Теоремы о неподвижных точках типа Каристи в полных частных метрических пространств были также получены в [21,89]. Так как полное частное метрическое пространство 0-полно, а обратное утверждение неверно (см. [151]), то данные результаты вытекают из результатов С. Ромагуеры [151]

Другое определение условия Каристи для частных метрических пространств было дано в [3]. Отображение $f\colon X \to X$ называется *AR-отображением Каристи*, если

$$p\big(x, f(x)\big) \leqslant p(x, x) + \varphi(x) - \varphi\big(f(x)\big) \tag{AR-Car$_\varphi$}$$

при некоторой q^s-полунепрерывной снизу ограниченной снизу функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$.

Теорема 5.36 (О. Акар, И. Алтун, С. Ромагуера [3]). *Частное метрическое пространство (X, p) является полным, если и только если каждое AR-отображение Каристи на X имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Предположим, что (X, p) полно. Пусть отображение $f\colon X \to X$ удовлетворяет условию (AR-Car$_\varphi$) при некоторой q^s-полунепрерывной снизу ограниченной снизу функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$. По предложению 5.24 функция $\beta\colon X \to [0, \infty)$, определяемая как $\beta(x) = p(x, x)$, $x \in X$, является q^s-непрерывной, откуда следует, что функция $\psi := \beta + 2\varphi$ q^s-полунепрерывна снизу и ограничена снизу (числом $2 \inf \varphi(X)$).

Полагая $\varphi = 2^{-1}(\psi - \beta)$ в (AR-Car$_\varphi$) и учитывая определение (5.18) метрики q^s, ассоциированной с частной метрикой p, мы имеем

$$q^s\big(x, f(x)\big) \leqslant \psi(x) - \psi\big(f(x)\big). \tag{5.27}$$

Так как по предложению 5.24 метрическое пространство (X, q^s) полно, то мы можем применить теорему Каристи о неподвижной точке (теорема 2.6) к отображению f и q^s-полунепрерывной снизу функции ψ, что показывает, что f имеет неподвижную точку.

Доказательство обратного утверждения аналогично доказательству соответствующей импликации в теореме 5.34.

Предположим, что $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ($\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$) — последовательность Коши в (X, p), не являющаяся сходящейся. Переходя при необходимости к подпоследовательности, мы можем предполагать, что

$$p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n) < \frac{1}{2^{n+1}} \tag{5.28}$$

при всех $n \in \mathbb{N}_0$ (см. замечание 5.25). Отсюда вытекает, что множество

$$A := \{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$$

q^s-замкнуто в (X, q^s).

Определим отображения $f\colon X \to X$ и $\varphi\colon X \to [0, \infty)$ по формулам (5.25). Тогда φ q^s-полунепрерывно снизу. Ясно, что отображение f не имеет неподвижных точек, и значит, нам остаётся показать, что оно удовлетворяет условию (AR-Car$_\varphi$).

Для $x \in X \setminus A$ имеем

$$p\bigl(x, f(x)\bigr) = p(x, x_0) = \varphi(x) - \varphi\bigl(f(x)\bigr) \leqslant p(x, x) + \varphi(x) - \varphi\bigl(f(x)\bigr),$$

а если $x = x_n \in A$, то

$$p\bigl(x_n, f(x_n)\bigr) = p(x_n, x_{n+1}) < p(x_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2^{n+1}} = p(x_n, x_n) + \varphi(x_n) - \varphi\bigl(f(x_n)\bigr).$$

□

Замечание 5.37. При доказательстве обратного утверждения можно было бы обратиться к эквивалентности

$$\psi = \beta + 2\varphi \iff \varphi = \frac{1}{2}(\psi - \beta).$$

Действительно, если (X, p) неполно, то (X, q^s) неполно (см. предложение 5.24), и значит, по следствию 2.8 существует отображение $f\colon X \to X$ без неподвижных точек, которое удовлетворяет (5.27) при некоторой q^s-полунепрерывной снизу ограниченной снизу функции $\psi\colon X \to \mathbb{R}$. Функция $\varphi = (1/2)(\psi - \beta)$ q^s-полунепрерывна снизу (так как β q^s-непрерывна), и, заменяя ψ на $\beta + 2\varphi$ в (5.27), мы получаем (AR-Car$_\varphi$).

К сожалению, нет никакой уверенности, что функция $\varphi = (1/2)(\psi - \beta)$ ограничена снизу, что позволило бы получить противоречие.

Замечание 5.38. Теорема Каристи о неподвижной точке для многозначных отображений на частных метрических пространствах обсуждается в недавней работе [9].

5.8. Вариационный принцип Экланда в частных метрических пространствах

В данном разделе мы покажем, что в частных метрических пространствах теорема Каристи о неподвижной точке также эквивалентна принципу Экланда в слабой форме.

Теорема 5.39 (вариационный принцип Экланда — слабая форма). *Пусть (X, p) — 0-полное частное метрическое пространство и $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — q^s-полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in X$, такое что*

$$\text{для каждого } x \in X \setminus \{x_\varepsilon\} \quad \varphi(x_\varepsilon) < \varphi(x) + \varepsilon p(x, x_\varepsilon). \tag{5.29}$$

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что существует $\varepsilon > 0$, такое что

$$\text{для каждой } x \in X \text{ существует } y_x \in X \setminus \{x\}, \quad \text{такая что } \varphi(x) \geqslant \varphi(y_x) + \varepsilon p(x, y_x). \tag{5.30}$$

Рассмотрим точку $x_0 \in X$, такую что $\varphi(x_0) \leqslant \inf \varphi(X) + \varepsilon$, и положим

$$Y := \{x \in X : \varphi(x) + \varepsilon p(x_0, x) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon\, p(x_0, x_0)\}. \tag{5.31}$$

Так как функция $\varphi(\cdot) + \varepsilon\, p(x_0, \cdot)$ q^s-полунепрерывна снизу (см. предложение 5.24), множество Y p^s-замкнуто и, значит, 0-полно. Действительно, если (x_n) — 0-последовательность Коши в Y, то она имеет τ_p-предел $x \in X$, такой что $p(x, x) = 0$. Но тогда $x_n \xrightarrow{q^s} x$ (см. замечание 5.31), и значит, $x \in Y$. Далее, $Y \neq \varnothing$, поскольку $x_0 \in Y$ и φ конечна на Y (т. е. $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ при всех $x \in Y$).

Отметим, что элемент y_x, задаваемый (5.30), лежит в Y для каждого $x \in Y$. В самом деле, если $x \in Y$, то

$$\varphi(y_x) + \varepsilon p(x_0, y_x) \leqslant \varphi(x) - \varepsilon p(x, y_x) + \varepsilon p(x_0, y_x) \leqslant \\ \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon\, p(x_0, x_0) + \varepsilon[p(x_0, y_x) - p(x_0, x) - p(x, y_x)] \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon\, p(x_0, x_0),$$

поскольку $p(x_0, y_x) - p(x_0, x) - p(x, y_x) \leqslant 0$. Последнее неравенство показывает, что

$$p(x_0, y_x) \leqslant p(x_0, x) + p(x, y_x) - p(x, x) \leqslant p(x_0, x) + p(x, y_x).$$

Мы теперь положим

$$\tilde{\varphi} := \varepsilon^{-1} \varphi|_Y : Y \to \mathbb{R}$$

и рассмотрим $f\colon Y \to Y$, определяемую по формуле $f(x) = y_x$, где для $x \in Y$ $y_x \neq x$ — элемент из Y, удовлетворяющий (5.30). Тогда неравенство (5.30) эквивалентно неравенству

$$p\big(x, f(x)\big) \leqslant \tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}\big(f(x)\big), \quad x \in Y,$$

что показывает, что f является отображением Каристи по отношению к $\tilde{\varphi}$. Так как f не имеет неподвижных точек, то это противоречит теореме Каристи о неподвижной точке (теорема 5.34) $\square$

Мы покажем, что обратная импликация также имеет место.

Предложение 5.40. *Из вариационного принципа Экланда в слабой форме* (*теорема* 5.39) *следует теорема Каристи о неподвижной точке* (*теорема* 5.34).

Доказательство. Пусть (X, p) — 0-полное частное метрическое пространство, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ — q^s-полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция и $f\colon X \to X$ — отображение Каристи по отношению к φ. По теореме 5.39, применённой к φ с $\varepsilon = 1$, существует точка $x_1 \in X$, такая что

$$\varphi(x_1) < \varphi(x) + p(x_1, x)$$

при всех $x \in X \setminus \{x_1\}$. В предположении, что $f(x_1) \neq x_1$, мы можем положить $x = f(x_1)$ в данном неравенстве, что даёт

$$p\big(x_1, f(x_1)\big) > \varphi(x_1) - \varphi\big(f(x_1)\big).$$

Это, однако, противоречит неравенству (Car$_\varphi$), которое выполняется для f.

Как следствие, $f(x_1) = x_1$, т. е. x_1 — неподвижная точка для f. □

Замечание 5.41. Отсюда вытекает, что выполнение вариационного принципа Экланда в слабой форме (как в теореме 5.39) также эквивалентно 0-полноте частного метрического пространства (X, p).

Теперь мы установим вариант вариационного принципа Экланда, который следует из теоремы 5.36.

Теорема 5.42 (вариационный принцип Экланда 2 — слабая форма). *Пусть (X, p) — полное частное метрическое пространство, и пусть $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — q^s-полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in X$, такое что*

$$\text{для каждой } x \in X \setminus \{x_\varepsilon\} \quad \varphi(x_\varepsilon) + \varepsilon p(x_\varepsilon, x_\varepsilon) < \varphi(x) + \varepsilon p(x, x_\varepsilon). \tag{5.32}$$

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что существует $\varepsilon > 0$, такое что

$$\text{для каждой } x \in X \text{ существует } y_x \in X \setminus \{x\}, \\ \text{такая что } \varphi(x) + \varepsilon p(x, x) \geqslant \varphi(y_x) + \varepsilon p(x, y_x), \tag{5.33}$$

и пусть $x_0 \in X$ такова, что $\varphi(x_0) \leqslant \varepsilon + \inf \varphi(X)$.

Чтобы избавиться от точек, в которых φ равна $+\infty$, мы снова рассмотрим множество Y из (5.31). Тогда Y непусто ($x_0 \in Y$) и q^s-замкнуто и, значит, полно по отношению к частной метрике p. Действительно, если (x_n) — последовательность Коши в (X, p), то по определению полноты она собственно сходятся к некоторому $x \in X$. По предложению 5.24 (x_n) q^s-сходится к x, что даёт $x \in Y$.

Отметим, что $x \in Y$ влечёт, что элемент y_x, задаваемый (5.33), также лежит в Y. В самом деле, если $x \in Y$, то

$$\varphi(y_x) + \varepsilon p(x_0, y_x) \leqslant \varphi(x) + \varepsilon[p(x_0, y_x) - p(x, y_x) + p(x, x)] \leqslant \\ \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon[p(x_0, x_0) - p(x_0, x) + p(x_0, y_x) - p(x, y_x) + p(x, x)] \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon\, p(x_0, x_0),$$

поскольку

$$p(x_0, y_x) - p(x_0, x) - p(x, y_x) + p(x, x) \leqslant 0 \iff$$
$$\iff p(x_0, y_x) + p(x, x) \leqslant p(x_0, x) + p(x, y_x),$$

где последнее неравенство выполнено по неравенству треугольника (PM4) из определения 5.1.

Снова полагая $\tilde{\varphi} = \varepsilon^{-1}\varphi|_Y$ и рассматривая $f\colon Y \to Y$, определённое как $f(x) = y_x$, где для $x \in Y$ элемент $y_x \in Y$ задаётся (5.33), мы видим, что функция $\tilde{\varphi}$ является q^s-полунепрерывной снизу и f — отображение на Y без неподвижных точек, удовлетворяющее (AR-Car$_\varphi$) при $\varphi = \tilde{\varphi}$. □

Обратное утверждение верно и в этом случае. Доказательство аналогично доказательству предложения 5.40.

Предложение 5.43. *Из вариационного принципа Экланда в слабой форме* (*теорема* 5.42) *следует теорема Каристи о неподвижной точке* (*теорема* 5.36).

Доказательство. Пусть (X, p) — полное частное метрическое пространство, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ — q^s-полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция и $f\colon X \to X$ — отображение, удовлетворяющее (AR-Car$_\varphi$). Применяя теорему 5.39 к φ с $\varepsilon = 1$, мы получаем, что существует точка $x_1 \in X$, такая что

$$\varphi(x_1) + p(x_1, x_1) < \varphi(x) + p(x_1, x)$$

при всех $x \in X \setminus \{x_1\}$. Предполагая, что $f(x_1) \neq x_1$, мы можем положить $x = f(x_1)$ в предыдущем неравенстве, что даёт

$$p\big(x_1, f(x_1)\big) > p(x_1, x_1) + \varphi(x_1) - \varphi\big(f(x_1)\big).$$

Это, однако, противоречит неравенству (AR-Car$_\varphi$), которое выполнено для f.

Как следствие, $f(x_1) = x_1$, т. е. x_1 — неподвижная точка для f. □

Замечание 5.44. Отсюда вытекает, что выполнение вариационного принципа Экланда в слабой форме из теоремы 5.42 эквивалентно полноте частного метрического пространства (X, p).

Замечание 5.45. Вариант вариационного принципа Экланда для частных метрических пространств был предложен в [22].

5.9. Смещённые метрические пространства

Класс смещённых метрических пространств рассматривался П. Хитцлером и А. Седой [66] в связи с задачами логического программирования. *Смещённая метрика* на множестве X — это функция $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям

(DM1) $\rho(x, y) = 0 \implies x = y$,

(DM2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(DM3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$

при всех $x, y, z \in X$. Если ρ удовлетворяет только условиям (DM1) и (DM3), то она называется *смещённой квазиметрикой*. Пара (X, ρ) называется *смещённым метрическим пространством* (соответственно *смещённым квазиметрическим пространством*).

Такие пространства близки к частным метрическим пространствам (в этом случае также возможно, что $\rho(x, x) > 0$ при некотором $x \in X$), за исключением того, что смещённая метрика удовлетворяет обычному неравенству треугольника (DM3) вместо неравенства (PM4) из определения 5.1. В действительности любая частная метрика является смещённой метрикой.

Для $x \in X$ и $r > 0$ открытый шар $B(x, r)$ определяется следующим образом:

$$B(x, r) = \{y \in X \colon \rho(x, y) < r\}.$$

П. Хитцлер и А. Седа [66] определили структуру типа топологии на смещённом метрическом пространстве (X, ρ) следующим образом. Вместо отношения принадлежности $\in$ они рассмотрели отношение $\prec$ на $X \times 2^X$. Для $(x, A) \in X \times 2^X$ мы полагаем

$$x \prec A \iff \text{найдётся } \varepsilon > 0, \text{ такое что } B(x, \varepsilon) \subset A.$$

Тогда d-*система окрестностей* $\mathcal{V}(x)$ точки $x \in X$ определяется условием

$$V \in \mathcal{V}(x) \iff V \subset X \quad \text{и} \quad x \prec V.$$

(Здесь «d» происходит от слова «dislocated» («смещённый»)).

Аксиомы окрестностей выполняются с отношением $\prec$ (вместо отношения принадлежности $\in$):

(V1) $V \in \mathcal{V}(x) \implies x \prec V$,

(V2) $V \in \mathcal{V}(x)$ и $V \subset U \implies U \in \mathcal{V}(x)$,

(V3) $U, V \in \mathcal{V}(x) \implies U \cap V \in \mathcal{V}(x)$,

(V4) $V \in \mathcal{V}(x) \implies$ существует $W \in \mathcal{V}(x)$, $W \subset V$, такое что $V \in \mathcal{V}(y)$ при всех $y \prec W$.

Эти свойства легко проверяются. Для примера проверим (V4). Для $V \in \mathcal{V}(x)$ пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $B(x, \varepsilon) \subset V$. Если $y \prec B(x, \varepsilon)$, то существует $\varepsilon' > 0$, такое что $B(y, \varepsilon') \subset B(x, \varepsilon) \subset V$, и значит, $V \in \mathcal{V}(y)$. Отсюда вытекает, что мы можем положить $W = B(x, \varepsilon)$.

Определённая таким образом «система окрестностей» не является системой окрестностей (в смысле отношения принадлежности $\in$), поскольку отношение $x \in V$ не всегда выполнено: мы не можем утверждать, что $x \in B(x, \varepsilon)$, и, более того, шар $B(x, \varepsilon)$ может быть пустым при некотором ε.

Пример 5.46. Пусть X — множество, содержащее по крайней мере два элемента. Положим $\rho(x, x) = 1$ и $\rho(x, y) = 2$, если $x \neq y$ при всех $x, y \in X$. Тогда $B(x, \varepsilon) = \varnothing$ при $0 < \varepsilon \leqslant 1$, что влечёт, что каждое подмножество из X (включая пустое множество) есть d-окрестность для x.

В действительности имеют место следующие свойства.

Предложение 5.47 [66, предложение 3.2]. *Пусть* (X,ρ) — *смещённое метрическое пространство.*

1. *Следующие условия эквивалентны*:
   i) ρ *является метрикой,*
   ii) $\rho(x,x)=0$ *при всех* $x\in X$,
   iii) $B(x,\varepsilon)\neq\varnothing$ *при всех* $x\in X$ *и* $\varepsilon>0$.
2. *Подмножество* $\ker\rho:=\{x\in X\colon \rho(x,x)\}$ *является метрическим пространством по отношению к* ρ.

Мы говорим, что последовательность (x_n) из X d-*сходится* к $x\in X$, если

для каждого $V\in\mathcal{V}(x)$ найдётся $n_0\in\mathbb{N}$, такое что $x_n\in V$ при всех $n\geqslant n_0$.

Последовательность (x_n) из X ρ-*сходится* к x, если $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x,x_n)=0$.

Замечание 5.48. Отметим ещё раз, что такой тип сходимости не является собственно сходимостью. К примеру, если $\rho(x,x)>0$, то стационарная последовательность $x_n=x$, $n\in\mathbb{N}$, не ρ-сходится к x.

Имеет место следующий результат [66, предложение 3.9].

Предложение 5.49. *Пусть* (X,ρ) — *смещённое метрическое пространство. Тогда последовательность* (x_n) *из* X ρ-*сходится к* $x\in X$, *если и только если она* d-*сходится к* x.

Доказательство. Предположим, что (x_n) d-сходится к x. Для $\varepsilon>0$ $B(x,\varepsilon)$ является d-окрестностью x, и значит, существует $n_0\in\mathbb{N}$, такое что

$$x_n\in B(x,\varepsilon)\iff \rho(x,x_n)<\varepsilon$$

при всех $n\geqslant n_0$, что показывает, что $\rho(x,x_n)\to 0$.

Теперь предположим, что $\rho(x,x_n)\to 0$. Для $V\in\mathcal{V}(x)$ пусть $\varepsilon>0$ таково, что $B(x,\varepsilon)\subset V$. По предположению существует $n_0\in\mathbb{N}$, такое что $\rho(x,x_n)<\varepsilon$ при всех $n\geqslant n_0$. Отсюда следует, что $x_n\in B(x,\varepsilon)\subset V$ при всех $n\geqslant n_0$. $\square$

Последовательность (x_n) из X называется ρ-*последовательностью Коши*, если для каждого $\varepsilon>0$ существует $n_0\in\mathbb{N}$, такое что $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ при всех $m,n\geqslant n_0$. Смещённое метрическое пространство (X,ρ) называется *полным*, если любая последовательность Коши является ρ-сходящейся. П. Хитцлер и А. Седа [66, теорема 2.7] установили, что принцип сжимающих отображений имеет место в полных смещённых метрических пространствах.

Л. Пасицкий [143] определил топологию τ_ρ на смещённом метрическом пространстве (X,ρ) следующим образом. Семейство подмножеств $\{B(x,r)\colon x\in X,\ r>0\}$ удовлетворяет соотношению

$$X=\bigcup\{B(x,r)\colon x\in X,\ r>0\}$$

и, значит, является предбазой топологии τ_ρ на X (см. [95, теорема 12, с. 47]). Отсюда вытекает, что подмножество $U\subset X$ является окрестностью $x\in X$, если и только если

$$\text{существуют } n \in \mathbb{N},\ y_1, \ldots, y_n \in X,\ r_1, \ldots, r_n > 0, \\ \text{такие что } x \in B(y_1, r_1) \cap \ldots \cap B(y_n, r_n) \subset U. \qquad (5.34)$$

Обозначим через $\mathcal{U}_\rho(x)$ систему окрестностей точки $x \in X$ по отношению к τ_ρ.

Замечание 5.50. Пусть (x_n) — последовательность в смещённом метрическом пространстве (X, ρ), и пусть $x \in X$. Тогда если $\lim\limits_n \rho(x, x_n) = 0$, то последовательность (x_n) τ_ρ-сходится к $x \in X$.

В самом деле, для любой τ_ρ-окрестности U точки x существуют $y \in X$ и $\varepsilon > 0$, такие что $x \in B(y, \varepsilon) \subset U$. Тогда $\varepsilon - \rho(x, y) > 0$, откуда по предположению вытекает, что существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое что $\rho(x, x_n) < \varepsilon - \rho(x, y)$ при всех $n \geqslant n_0$. Следовательно,

$$\rho(y, x_n) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, x_n) < \rho(x, y) + \varepsilon - \rho(x, y) = \varepsilon,$$

т. е. $x_n \in B(y, \varepsilon) \subset U$ при всех $n \geqslant n_0$, что показывет, что (x_n) τ_ρ-сходится к x.

Замечание 5.51. Автору неизвестна характеризация τ_ρ-сходимости в терминах последовательности $\big(\rho(x, x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$.

По всей видимости, не зная о существовании работы П. Хитцлера и А. Седы [66], А. Амини-Харанди [14] определил смещённое метрическое пространство, назвав его метрикоподобным пространством. Шары в таком пространстве он определил по аналогии со случаем частных метрических пространств:

$$\tilde{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \colon |\rho(x, y) - \rho(x, x)| < \varepsilon\}.$$

Семейство шаров $\tilde{B}(x, r)$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, образует базу топологии $\tilde{\tau}_\rho$ смещённого метрического пространства (X, ρ).

Последовательность $(x_n) \subset X$ $\tilde{\tau}_\rho$-сходится к $x \in X$, если и только если $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x, x_n) = \rho(x, x)$.

Последовательность $(x_n) \subset X$ называется *последовательностью Коши*, если существует предел $\lim\limits_{m,n \to \infty} \rho(x_n, x_m) \in \mathbb{R}$. Пространство (X, ρ) называется полным, если для каждой последовательности Коши (x_n) из X существует $x \in X$, такое что

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x, x_n) = \rho(x, x) = \lim_{m,n \to \infty} \rho(x_m, x_n)$$

(ср. с определением 5.11 из раздела 5.2).

В [66] приведён ряд теорем о неподвижных точках в полных смещённых метрических пространствах. Аналогичный подход используется в [91] (и, возможно, в других статьях).

Замечание 5.52. В исходном варианте статьи [143] Л. Пасицкий назвал такие пространства околометрическими пространствами. Однако после того как рецензент обратил его внимание на работу П. Хитцлера и А. Седы, он стал называть их смещёнными метрическими пространствами. Простой поиск на MathSciNet, ZbMATH или ScholarGoogle показывает целый ряд работ, посвящённых исследованию теорем о неподвижных точках в смещённых метрических пространствах (или метрикоподобных пространствах). Однако автору не известно о существовании обратных результатов, где полнота гарантируется свойством существования неподвижных точек.

5.10. Другие обобщённые метрические пространства

В данном разделе мы представим некоторые результаты о полноте для других классов обобщённых метрических пространств: будут рассмотрены смещённые метрические пространства, w-пространства и τ-пространства. Хороший обзор различных обобщений метрических пространств содержится в [20, 31], а также в [46, 99, 160].

w-расстояние

Данное понятие было введено в [88]. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Отображение $p\colon X\times X\to\mathbb{R}_+$ называется *w-расстоянием*, если при всех $x,y,z\in X$

(w1) $p(x,y)\leqslant p(x,z)+p(z,y)$,

(w2) $p(x,\cdot)$ ρ-полунепрерывно снизу,

(w3) для каждого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$, такое что из $p(x,y)<\delta$ и $p(x,z)<\delta$ следует, что $p(y,z)<\varepsilon$.

τ-расстояние

Т. Судзуки [172] ввёл более сложное понятие. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство и $\eta\colon X\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$. Отображение $p\colon X\times X\to\mathbb{R}_+$ называется *τ-расстоянием*, если

(τ1) $p(x,y)\leqslant p(x,z)+p(z,y)$ при всех $x,y,z\in X$,

(τ2) для каждого $x\in X$ функция $\eta(x,\cdot)$ вогнута и непрерывна, $\eta(x,0)=0$ и $\eta(x,t)\geqslant t$ при всех $(x,t)\in X\times\mathbb{R}_+$,

(τ3) если
$$\lim_n x_n=x \quad\text{и}\quad \lim_n\Big(\sup_{m\geqslant n}\eta\big(z_n,p(z_n,x_m)\big)\Big)=0,$$
то $p(w,x)\leqslant\liminf_n p(w,x_n)$ при всех $w\in X$,

(τ4) если
$$\lim_n\Big(\sup_{m\geqslant n}p(x_n,y_m)\Big)=0 \quad\text{и}\quad \lim_n\eta(x_n,t_n)=0,$$
то $\lim_n\eta(y_n,t_n)=0$,

(τ5) если
$$\lim_n\eta\big(z_n,p(z_n,x_n)\big)=0 \quad\text{и}\quad \lim_n\eta\big(z_n,p(z_n,y_n)\big)=0,$$
то $\lim_n\rho(x_n,y_n)=0$.

Замечание 5.53. В [172] показано, что условие ($\tau 2$) можно заменить на

($\tau 2'$) для каждого $x \in X$ функция $\eta(x,\cdot)$ возрастает и $\inf\limits_{t>0} \eta(x,t) = 0$.

Л. Лин и В. Ду [113, 115] предложили немого упрощённый вариант τ-функции.

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Отображение $p\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется (LDτ)-*расстоянием*, если

(LD-τ1) $p(x,y) \leqslant p(x,z) + p(z,y)$ при всех $x,y,z \in X$,

(LD-τ2) для каждого $x \in X$ и любой последовательности (y_n) из X, сходящейся к некоторому $y \in X$, если при некотором $M > 0$ выполнено $p(x,y_n) \leqslant M$ при всех n, то $p(x,y) \leqslant M$,

(LD-τ3) если (x_n) и (y_n) — последовательности в X, такие что

$$\lim_n \Big(\sup_{m \geqslant n} p(x_n, x_m) \Big) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_n p(x_n, y_n) = 0,$$

то $\lim\limits_n \rho(x_n, y_n) = 0$,

(LD-τ4) при всех $x,y,z \in X$ условие $p(x,y) = p(x,z) = 0$ влечёт, что $y = z$.

Замечание 5.54.

1. Если для каждого $x \in X$ $p(x,\cdot)$ полунепрерывно снизу, то выполнено условие (LD-τ2).
2. Если p удовлетворяет условию (LD-τ3), то каждая последовательность (x_n) из X, удовлетворяющая условию

$$\lim_n \Big(\sup_{m \geqslant n} p(x_n, x_m) \Big) = 0,$$

есть последовательность Коши.

Л. Лин и В. Ду [113, 115] установили ряд вариационных принципов типа Экланда для такого типа функций и для w-расстояния (см. [114]).

Расстояние Татару

Расстояние Татару определяется в [190] следующим образом. Пусть X — подмножество банахова пространства E. Семейство $\{T(t)\colon t \in \mathbb{R}_+\}$ отображений на X называется *сильно непрерывной полугруппой нерастягивающих отображений* на X, если

(Sg1) для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ $T(t)$ — нерастягивающее отображение на X,

(Sg2) $T(0)x = x$ при всех $x \in X$,

(Sg3) $T(s+t) = T(s)T(t)$ при всех $s,t \in \mathbb{R}_+$,

(Sg4) для каждого $x \in X$ отображение $T(\cdot)x\colon \mathbb{R}_+ \to X$ непрерывно.

Расстояние Татару, соответствующее сильно непрерывной полугруппе $\{T(t)\colon t \in \mathbb{R}_+\}$ нерастягивающих отображений на X, определяется для $x,y \in X$ следующим образом:

$$p(x,y) = \inf\{t + \|T(t)x - y\|\colon t \in \mathbb{R}_+\}. \tag{5.35}$$

Т. Судзуки [172, 178] установил, что любое w-расстояние является τ-расстоянием и что обратная импликация неверна; к примеру, расстояние Татару является w-расстоянием, но не τ-расстоянием. В [178] приведён ряд примеров w-расстояний и τ-расстояний, других τ-расстояний, не являющихся w-расстояниями, а также найдены условия, при которых расстояние Татару является τ-расстоянием.

Т. Судзуки [98, 172—176, 179, 181] также установил ряд теорем о неподвижных точках, принципов типа Экланда и полноты для τ-расстояний. В [5] были получены теоремы о неподвижных точках для сжимающих однозначных отображений и результаты о полноте квазиметрических пространств с w-расстоянием, а в [122] — для многозначных отображений. Аналогичные результаты для частных метрических пространств были получены в [10].

Отображение f на метрическом пространстве (X, ρ), для которого определены w-расстояние p на X и число $\alpha \in [0, 1)$, такое что

$$p\big(f(x), f(x')\big) \leqslant \alpha p(x, y) \quad \text{при всех} \quad x, x' \in X, \tag{5.36}$$

называется *w-сжимающим*. Для случая многозначного отображения $F\colon X \rightrightarrows X$ условие (5.36) заменяется на

$$\text{для любых } x, x' \in X \text{ найдутся } y \in F(x),\ y' \in F(x'),\\ \text{такие что } p(y, y') \leqslant \alpha p(x, y). \tag{5.37}$$

Прямые и обратные теоремы о полноте в терминах неподвижных точек слабо сжимающих отображений и других отображений (например, отображения Каннана) на метрических пространствах с w-расстоянием были установлены в [38, 73, 88, 165, 182, 184, 186] (см. также [99, 185]). К примеру, в [182] было показано, что метрическое пространство X является полным, если и только если каждое слабо сжимающее отображение на X имеет неподвижную точку. Также был переоткрыт результат Дж. М. Борвейна [34] (см. следствие в 1.20) о полноте выпуклых подмножеств нормированных пространств, на которых каждое сжимающее отображение имеет неподвижную точку.

Расстояние Бранчари — обобщённые метрические пространства

А. Бранчари [36] (см. [161] с некоторыми исправлениями) ввёл новый класс пространств, называемых *обобщёнными метрическими пространствами*. Функция $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$, где X — непустое множество, называется *обобщённой метрикой*, если

(GM1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(GM2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(GM3) $d(x, y) \leqslant d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$

при всех $x, y, u, v \in X$. Обобщённое неравенство треугольника (GM3) влечёт ряд неприятных топологических свойств таких пространств (топология не всегда хаусдорфова, а функция расстояния $d(\cdot, \cdot)$ непрерывна только при дополнительном условии, см. [99, гл. 13]). Для таких пространств А. Бранчари [36] установил принцип сжимающих отображений (некоторые неточности были исправлены в [99, гл. 13]).

П. Гош и А. Деб Рей [58] исследовали обобщённые сжимающие отображения Судзуки для таких пространств и доказали ряд прямых теорем о неподвижных точках, а также обратных результатов о полноте.

Вероятностные метрические пространства

В [4,8,62,69] рассматривался вопрос о полноте, а также соотношения между полнотой и теоремами о неподвижных точках в вероятностных метрических пространствах. Мы опускаем детали.

Приложение. Пессимистичный вывод

В завершение мы приведём цитату из реферата на статью [142].

MR835839 (87m:54125) Park, Sehie; Rhoades, B. E. *Comments on characterizations for metric completeness*. Math. Japon. 31 (1986), no. 1, 95–97.

> Во многих работах полнота метрического пространства характеризуется через свойство неподвижной точки. В настоящей работе авторы доказывают две простые общие теоремы, которые «**заключают в себе некоторые ранее полученные теоремы, а также ряд теорем такого типа, которые ещё будут получены**».

(Автор реферата — Дж. Матковский)

В этих условиях наилучшее, что мы можем надеяться сделать, — это доказать ряд частных случаев таких общих утверждений.

Данная работа представляет собой расширенный вариант доклада, сделанного автором на Международной конференции по нелинейным операторам, дифференциальным уравнениям и приложениям (ICNODEA 2015), Клуж-Напока, Румыния, 14—17 июля 2015 г.

Литература

[1] Abdeljawad T., Karapınar E., Taş K. Existence and uniqueness of a common fixed point on partial metric spaces // Appl. Math. Lett. — 2011. — Vol. 24, no. 11. — P. 1900—1904.

[2] Abramsky S., Jung A. Domain theory // Handbook of Logic in Computer Science. Vol. 3. — New York: Oxford Univ. Press, 1994. — P. 1—168.

[3] Acar Ö., Altun I., Romaguera S. Caristi's type mappings on complete partial metric spaces // Fixed Point Theory. — 2013. — Vol. 14, no. 1. — P. 3—9.

[4] Aghajani A., Razani A. Some completeness theorems in the Menger probabilistic metric space // Appl. Sci. — 2008. — Vol. 10. — P. 1—8.

[5] Alegre C., Marín J., Romaguera S. A fixed point theorem for generalized contractions involving w-distances on complete quasi-metric spaces // Fixed Point Theory Appl. — 2014. — 40.

[6] Alghamdi M. A., Shahzad N., Valero O. On fixed point theory in partial metric spaces // Fixed Point Theory Appl. — 2012. — 175.

[7] Alghamdi M. A., Shahzad N., Valero O. New results on the Baire partial quasi-metric space, fixed point theory and asymptotic complexity analysis for recursive programs // Fixed Point Theory Appl. — 2014. — 14.

[8] Alimohammady M., Esmaeli A., Saadati R. Completeness results in probabilistic metric spaces // Chaos Solitons Fractals. — 2009. — Vol. 39, no. 2. — P. 765—769.

[9] Alsiary T., Latif A. Generalized Caristi fixed point results in partial metric spaces // J. Nonlinear Convex Anal. — 2015. — Vol. 16, no. 1. — P. 119—125.

[10] Altun I., Romaguera S. Characterizations of partial metric completeness in terms of weakly contractive mappings having fixed point // Appl. Anal. Discrete Math. — 2012. — Vol. 6, no. 2. — P. 247—256 (2012).

[11] Amato P. A method for reducing fixed-point problems to completeness problems and vice versa // Boll. Un. Mat. Ital. B (6). — 1984. — Vol. 3, no. 2. — P. 463—476.

[12] Amato P. The completion classes of a metric space // Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. — 1986. — No. 12. — P. 157—168.

[13] Amato P. Some properties of completion classes for normed spaces // Note Mat. — 1993. — Vol. 13, no. 1. — P. 123—134.

[14] Amini-Harandi A. Metric-like spaces, partial metric spaces and fixed points // Fixed Point Theory Appl. — 2012. — 204.

[15] Angelov V. G. Fixed point theorem in uniform spaces and applications // Czech. Math. J. — 1987. — Vol. 37 (112), no. 1. — P. 19—33.

[16] Angelov V. G. A converse to a contraction mapping theorem in uniform spaces // Nonlinear Anal. — 1988. — Vol. 12, no. 10. — P. 989—996.

[17] Angelov V. G. Corrigendum: A converse to a contraction mapping theorem in uniform spaces [Nonlinear Anal. 12 (1988), no. 10, 989—996; MR0962764 (89k:54101)] // Nonlinear Anal. — 1994. — Vol. 23, no. 11. — P. 1491.

[18] Angelov V. G. An extension of Kirk—Caristi theorem to uniform spaces // Antarct. J. Math. — 2004. — Vol. 1, no. 1. — P. 47—51.

[19] Anisiu M.-C., Anisiu V. On the characterization of partial metric spaces and quasimetrics // Fixed Point Theory. — 2016. — Vol. 17, no. 1.

[20] Ansari Q. H., Lin L.-J. Ekeland-type variational principles and equilibrium problems // Topics in Nonconvex Optimization. — New York: Springer, 2011. — (Springer Optim. Appl.; Vol. 50). — P. 147—174.

[21] Aydi H., Karapınar E., Kumam P. A note on “Modified proof of Caristi’s fixed point theorem on partial metric spaces” // J. Inequal. Appl. — 2013 — 210.

[22] Aydi H., Karapınar E., Vetro C. On Ekeland’s variational principle in partial metric spaces // Appl. Math. Inf. Sci. — 2015. — Vol. 9, no. 1. — P. 257—262.

[23] Babu A. C. A converse to a generalized Banach contraction principle // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.). — 1982. — Vol. 32 (46). — P. 5—6.

[24] Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales // Fund. Math. — 1922. — Vol. 3. — P. 133—181.

[25] Bao T. Q., Cobzaş S., Soubeyran A. Variational principles and completeness in pseudo-quasimetric spaces: Preprint. — 2016.

[26] Bao T. Q., Mordukhovich B. S., Soubeyran A. Fixed points and variational principles with applications to capability theory of wellbeing via variational rationality // Set-Valued Var. Anal. — 2015. — Vol. 23, no. 2. — P. 375—398.

[27] Bao T. Q., Mordukhovich B. S., Soubeyran A. Variational analysis in psychological modeling // J. Optim. Theory Appl. — 2015. — Vol. 164, no. 1. — P. 290—315.

[28] Bao T. Q., Soubeyran A. Variational analysis and applications to group dynamics: Preprint. — 2015. — http://www.optimization-online.org.

[29] Bao T. Q., Théra M. A. On extended versions of Dancs—Hegedüs—Medvegyev's fixed-point theorem // Optimization. — 2015.

[30] Berinde V., Choban M. Remarks on some completeness conditions involved in several common fixed point theorems // Creat. Math. Inform. — 2010. — Vol. 19, no. 1, — P. 1—10.

[31] Berinde V., Choban M. Generalized distances and their associate metrics. Impact on fixed point theory // Creat. Math. Inform. — 2013. — Vol. 22, no. 1. — P. 23—32.

[32] Bessaga C. On the converse of the Banach "fixed-point principle" // Colloq. Math. — 1959. — Vol. 7. — P. 41—43.

[33] Blanqui F. A point on fixpoints in posets. — 2014. — arXiv:1502.06021 [math.LO].

[34] Borwein J. M. Completeness and the contraction principle // Proc. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 87, no. 2. — P. 246—250.

[35] Bourbaki N. Sur le théorème de Zorn // Arch. Math. (Basel). — 1951. — Vol. 2. — P. 434—437.

[36] Branciari A. A fixed point theorem of Banach—Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces // Publ. Math. Debrecen. — 2000. — Vol. 57, no. 1-2. — P. 31—37.

[37] Bukatin M., Kopperman R., Matthews S., Pajoohesh H. Partial metric spaces // Amer. Math. Monthly. — 2009. — Vol. 116, no. 8. — P. 708—718.

[38] Chuang C.-S., Lin L.-J., Takahashi W. Fixed point theorems for single-valued and set-valued mappings on complete metric spaces // J. Nonlinear Convex Anal. — 2012. — Vol. 13, no. 3. — P. 515—527.

[39] Cobzaş S. Completeness in quasi-metric spaces and Ekeland Variational Principle // Topology Appl. — 2011. — Vol. 158, no. 8. — P. 1073—1084.

[40] Cobzaş S. Ekeland variational principle in asymmetric locally convex spaces // Topology Appl. — 2012. — Vol. 159, no. 10-11. — P. 2558—2569.

[41] Cobzaş S. Functional analysis in asymmetric normed spaces // Frontiers in Mathematics. — Basel: Birkhäuser; Springer, 2013.

[42] Connell E. H. Properties of fixed point spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol. 10. — P. 974—979.

[43] Dancs S., Hegedűs M., Medvegyev P. A general ordering and fixed-point principle in complete metric space // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1983. — Vol. 46, no. 1-4. — P. 381—388.

[44] Davis A. C. A characterization of complete lattices // Pacific J. Math. — 1955. — Vol. 5. — P. 311—319.

[45] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis. — Berlin: Springer, 1985.

[46] Deza M. M., Deza E. Encyclopedia of Distances. Heidelberg: Springer, 2014.

[47] Dhompongsa S., Inthakon W., Kaewkhao A. Edelstein's method and fixed point theorems for some generalized nonexpansive mappings // J. Math. Anal. Appl. — 2009. — Vol. 350, no. 1. — P. 12—17.

[48] Dhompongsa S., Kaewcharoen A. Fixed point theorems for nonexpansive mappings and Suzuki-generalized nonexpansive mappings on a Banach lattice // Nonlinear Anal. — 2009. — Vol. 71, no. 11. — P. 5344—5353.

[49] Dhompongsa S., Yingtaweesittikul H. Fixed points for multivalued mappings and the metric completeness // Fixed Point Theory Appl. — 2009. — 972395.

[50] Edelstein M. An extension of Banach's contraction principle // Proc. Amer. Math. Soc. — 1961. — Vol. 12. — P. 7—10.

[51] Edelstein M. On fixed and periodic points under contractive mappings // J. London Math. Soc. — 1962. — Vol. 37. — P. 74—79.

[52] Edelstein M. A theorem on fixed points under isometries // Amer. Math. Monthly. — 1963. — Vol. 70. — P. 298—300.

[53] Edelstein M. A short proof of a theorem of L. Janos // Proc. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 20. — P. 509—510.

[54] Elekes M. On a converse to Banach's fixed point theorem // Proc. Amer. Math. Soc. — 2009. — Vol. 137, no. 9. — P. 3139—3146.

[55] Frink O., Topology in lattices // Trans. Amer. Math. Soc. — 1942. — Vol. 51. — P. 569—582.

[56] García-Falset J., Llorens-Fuster E., Suzuki T. Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — Vol. 375, no. 1. — P. 185—195.

[57] Georgiev P. G. The strong Ekeland variational principle, the strong drop theorem and applications // J. Math. Anal. Appl. — 1988. — Vol. 131, no. 1. — P. 1—21.

[58] Ghosh P., Deb Ray A. A characterization of completeness of generalized metric spaces using generalized Banach contraction principle // Demonstratio Math. — 2012. — Vol. 45, no. 3. — P. 717—724.

[59] Gierz G., Hofmann K. H., Keimel K., Lawson J. D., Mislove M., Scott D. S. Continuous lattices and domains // Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Vol. 93. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.

[60] Goebel K., Kirk W. A. Topics in Metric Fixed Point Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. — (Cambridge Stud. Adv. Math.; vol. 28).

[61] Goubault-Larrecq J. Non-Hausdorff Topology and Domain Theory: Selected Topics in Point-Set Topology. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. — (New Math. Monogr.; vol. 22).

[62] Grabiec M, Cho Y. J., Saadati R. Completeness and fixed points in probabilistic quasi-pseudo-metric spaces // Bull. Stat. Econ. — 2008. — Vol. 2, no. A08. — P. 39—47.

[63] Granas A., Dugundji J. Fixed Point Theory. — New York: Springer, 2003. — (Springer Monogr. Math.).

[64] Haghi R. H., Rezapour Sh., Shahzad N. Be careful on partial metric fixed point results // Topology Appl. — 2013. — Vol. 160, no. 3. — P. 450—454.

[65] Handbook of Metric Fixed Point Theory / W. A. Kirk, B. Sims, eds. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2001.

[66] Hitzler P., Seda A. K. Dislocated topologies // J. Electr. Eng. — 2000. — Vol. 51, no. 12/s. — P. 3—7.

[67] Hitzler P., Seda A. K. A “converse” of the Banach contraction mapping theorem // J. Electr. Eng. — 2001. — Vol. 52, no. 10/s. — P. 3—6.

[68] Hitzler P., Seda A. K. The fixed-point theorems of Priess-Crampe and Ribenboim in logic programming // Valuation Theory and Its Applications. Vol. I (Saskatoon, SK, 1999). — Providence: Amer. Math. Soc., 2002. — (Fields Inst. Commun. Vol. 32). — P. 219—235.

[69] Hosseini S. B., Saadati R. Completeness results in probabilistic metric spaces, I // Commun. Appl. Anal. — 2005. — Vol. 9, no. 3-4. — P. 549—553.

[70] Howard P., Rubin J. E. Consequences of the Axiom of Choice. — Providence: Amer. Math. Soc, 1998. — (Math. Surv. Monogr.; Vol. 59).

[71] Hu T. K. On a fixed-point theorem for metric spaces // Amer. Math. Monthly. — 1967. — Vol. 74. — P. 436—437.

[72] Huang H. Global weak sharp minima and completeness of metric space // Acta Math. Sci. Ser. B. Engl. Ed. — 2005. — Vol. 25, no. 2. — P. 359—366.

[73] Iemoto S., Takahashi W., Yingtaweesittikul H. Nonlinear operators, fixed points and completeness of metric spaces // Fixed Point Theory and Its Applications. — Yokohama: Yokohama Publ., 2010. — P. 93—101.

[74] Ivanov A. A. Fixed points of mappings of metric spaces // Studies in Topology, II. Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI). — 1976. — Vol. 66. — P. 5—102.

[75] Jachymski J. An iff fixed point criterion for continuous self-mappings on a complete metric space // Aequationes Math. — 1994. — Vol. 48, no. 2-3. — P. 163—170.

[76] Jachymski J. Some consequences of fundamental ordering principles in metric fixed point theory // Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A. — 1997. — Vol. 51, no. 2. — P. 123—134.

[77] Jachymski J. Fixed point theorems in metric and uniform spaces via the Knaster—Tarski principle // Nonlinear Anal. — 1998. — Vol. 32, no. 2. — P. 225—233.

[78] Jachymski J. Some consequences of the Tarski—Kantorovitch ordering theorem in metric fixed point theory // Quaestiones Math. — 1998. — Vol. 21, no. 1-2. — P. 89—99.

[79] Jachymski J. A short proof of the converse to the contraction principle and some related results // Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2000. — Vol. 15, no. 1. — P. 179—186.

[80] Jachymski J. Order-theoretic aspects of metric fixed point theory // Handbook of Metric Fixed Point Theory. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2001. — P. 613—641.

[81] Jachymski J. Converses to fixed point theorems of Zermelo and Caristi // Nonlinear Anal. — 2003. — Vol. 52, no. 5. — P. 1455—1463.

[82] Jachymski J. Equivalent conditions for generalized contractions on (ordered) metric spaces // Nonlinear Anal. — 2011. — Vol. 74, no. 3. — P. 768—774.

[83] Jachymski J. A stationary point theorem characterizing metric completeness // Appl. Math. Lett. — 2011. — Vol. 24, no. 2. — P. 169—171.

[84] Janković S., Kadelburg Z., Radenović S. On cone metric spaces: a survey // Nonlinear Anal. — 2011. — Vol. 74, no. 7. — P. 2591—2601.

[85] Janoš L. A converse of Banach's contraction theorem // Proc. Amer. Math. Soc. — 1967. — Vol. 18. — P. 287—289.

[86] Janoš L. A converse of the generalized Banach's contraction theorem // Arch. Math. (Basel). — 1970. — Vol. 21. — P. 69—71.

[87] Jiang G.-J. On characterization of metric completeness // Turkish J. Math. — 2000. — Vol. 24, no. 3. — P. 267—272.

[88] Kada O., Suzuki T., Takahashi W. Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces // Math. Japon. — 1996. — Vol. 44, no. 2. — P. 381—391.

[89] Karapinar E. Generalizations of Caristi Kirk's theorem on partial metric spaces // Fixed Point Theory Appl. — 2011. — 4.

[90] Karapınar E., Romaguera S. On the weak form of Ekeland's variational principle in quasi-metric spaces // Topology Appl. — 2015. — Vol. 184. — P. 54—60.

[91] Karapınar E., Salimi P. Dislocated metric space to metric spaces with some fixed point theorems // Fixed Point Theory Appl. — 2013. — 222.

[92] Kasahara S. Classroom Notes: A Remark on the Converse of Banach's Contraction Theorem // Amer. Math. Mon. — 1968. — Vol. 75, no. 7. — P. 775—776.

[93] Keimel K. Topological cones: functional analysis in a T_0-setting // Semigroup Forum. — 2008. — Vol. 77, no. 1. — P. 109—142.

[94] Keimel K. Weak topologies and compactness in asymmetric functional analysis // Topology Appl. — 2015. — Vol. 185/186. — 1—22.

[95] Kelley J. L. General topology. — Berlin: Springer, 1975.

[96] Kelly J. C. Bitopological spaces // Proc. London Math. Soc. (3). — 1963. — Vol. 13. — P. 71—89.

[97] Khamsi M. A. Generalized metric spaces: A survey // J. Fixed Point Theory Appl. — 2015. — Vol. 17, no. 3. — P. 455—475.

[98] Kikkawa M., Suzuki T. Some similarity between contractions and Kannan mappings // Fixed Point Theory Appl. — 2008. — 649749.

[99] Kirk W., Shahzad N. Fixed Point Theory in Distance Spaces. — Springer, 2014.

[100] Kirk W. A. Contraction mappings and extensions // Handbook of metric fixed point theory. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2001. — P. 1—34.

[101] Kirk W. A., Saliga L. M. The Brézis—Browder order principle and extensions of Caristi's theorem // Nonlinear Anal. — 2001. — Vol. 47, no. 4. — P. 2765—2778.

[102] Klee V. L., Jr. Some topological properties of convex sets // Trans. Amer. Math. Soc. — 1955. — Vol. 78. — P. 30—45.

[103] Klimeš J. Characterizations of completeness for semilattices by using of fixed points // Scripta Fac. Sci. Natur. Univ. Purk. Brun. — 1982. — Vol. 12, no. 10. — P. 507—513.

[104] Klimeš J. A characterization of a semilattice completeness // Scripta Fac. Sci. Natur. Univ. Purk. Brun. — 1984. — Vol. 14, no. 8. — P. 399—407.

[105] Klimeš J. Fixed point characterization of completeness on lattices for relatively isotone mappings // Arch. Math. (Brno). — 1984. — Vol. 20, no. 3. — P. 125—132.

[106] Klimeš J. A characterization of inductive posets // Arch. Math. (Brno). — 1985. — Vol. 21, no. 1. — P. 39—42.

[107] Kopperman R. D. Which topologies are quasimetrizable? // Topology Appl. — 1993. — Vol. 52, no. 2. — P. 99—107.

[108] Lahiri B. K., Chakrabarty M. K., Sen A. Converse of Banach's contraction principle and star operation // Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A. — 2009. — Vol. 79, no. 4. — P. 367—374.

[109] Leader S. A topological characterization of Banach contractions // Pacific J. Math. — 1977. — Vol. 69, no. 2. — P. 461—466.

[110] Leader S. Uniformly contractive fixed points in compact metric spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol. 86, no. 1. — P. 153—158.

[111] Leader S. Equivalent Cauchy sequences and contractive fixed points in metric spaces // Stud. Math. — 1983. — Vol. 76, no. 1. — P. 63—67.

[112] Lee W., Choi Y. A survey on characterizations of metric completeness // Nonlinear Anal. Forum. — 2014. — Vol. 19. — P. 265—276.

[113] Lin L.-J., Du W.-S. Ekeland's variational principle, minimax theorems and existence of nonconvex equilibria in complete metric spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 323, no. 1. — P. 360—370.

[114] Lin L.-J., Du W.-S. Some equivalent formulations of the generalized Ekeland's variational principle and their applications // Nonlinear Anal. — 2007. — Vol. 67, no. 1. — P. 187—199.

[115] Lin L.-J., Du W.-S. On maximal element theorems, variants of Ekeland's variational principle and their applications // Nonlinear Anal. — 2008. — Vol. 68, no. 5. — P. 1246—1262.

[116] Liu Z. Fixed points and completeness // Turkish J. Math. — 1996. — Vol. 20, no. 4. — P. 467—472.

[117] Liu Z., Kang S. M. On characterizations of metric completeness // Indian J. Math. — 2002. — Vol. 44, no. 2. — P. 183—187.

[118] Liu Z., Kang S. M. On characterizations of $\leqslant$-completeness and metric completeness // Southeast Asian Bull. Math. — 2003. — Vol. 27, no. 2. — P. 325—331.

[119] Mańka R. Connection between set theory and the fixed point property // Colloq. Math. — 1987. — Vol. 53, no. 2. — P. 177—184.

[120] Mańka R. Some forms of the axiom of choice // Jbuch. Kurt-Gödel-Ges. — 1988. — P. 24—34.

[121] Mańka R. Turinici's fixed point theorem and the axiom of choice // Rep. Math. Logic. — 1988. — Vol. 22. — P. 15—19.

[122] Marín J., Romaguera S., Tirado P. Weakly contractive multivalued maps and w-distances on complete quasi-metric spaces // Fixed Point Theory Appl. — 2011. — 2.

[123] Markowsky G. Chain-complete posets and directed sets with applications // Algebra Universalis. — 1976. — Vol. 6, no. 1. — P. 53—68.

[124] Matthews S. G. Partial metric spaces: Research Report. No. 212. — Univ. of Warwick, 1992.

[125] Matthews S. G. The cycle contraction mapping theorem: Research Report. No. 228. — Univ. of Warwick, 1992.

[126] Matthews S. G. The topology of partial metric spaces: Research Report. No. 222. — Univ. of Warwick, 1992.

[127] Matthews S. G. Partial metric topology // Papers on General Topology and Applications (Flushing, NY, 1992). — New York: New York Acad. Sci., 1994. — (Ann. New York Acad. Sci.; Vol. 728). — P. 183—197.

[128] Meyers P. R. Some extensions of Banach's contraction theorem // J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B. — 1965. — Vol. 69B. — P. 179—184.

[129] Meyers P. R. A converse to Banach's contraction theorem // J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B. — 1967. — Vol. 71B. — P. 73—76.

[130] Mukherjee R. N., Som T. An application of Meyer's theorem on converse of Banach's contraction principle // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. — 1984. — Vol. 12, no. 3. — P. 253—255.

[131] O'Neill S. J. Partial metrics, valuations, and domain theory // Ann. New York Acad. Sci. — 1996. — Vol. 806. — P. 304—315.

[132] Nemytskiĭ V. V. The fixed point method in analysis // Usp. Mat. Nauk. — 1936. — Vol. 1. — P. 141—174.

[133] Nicolae A.-M. On Completeness and Fixed Points: Master Thesis. — Cluj-Napoca: Babeş-Bolyai Univ., Fac. Math. Comput. Sci., 2008.

[134] Nieto J. J., Pouso R. L., Rodríguez-López R. Fixed point theorems in ordered abstract spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 2007. — Vol. 135, no. 8. — P. 2505—2517.

[135] Nieto J. J., Rodríguez-López R. Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations // Order. — 2005. — Vol. 22, no. 3. — P. 223—239.

[136] Nieto J. J., Rodríguez-López R. Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). — 2007. — Vol. 23, no. 12. — P. 2205—2212.

[137] Oltra S., Valero O. Banach's fixed point theorem for partial metric spaces // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. — 2004. — Vol. 36, no. 1-2. — P. 17—26.

[138] Opoitsev V. I. A converse of the contraction mapping principle // Usp. Mat. Nauk. — 1976. — Vol. 31, no. 4 (190). — P. 169—198.

[139] Paesano D., Vetro P. Suzuki's type characterizations of completeness for partial metric spaces and fixed points for partially ordered metric spaces // Topology Appl. — 2012. — Vol. 159, no. 3. — P. 911—920.

[140] Palczewski B., Miczko A. On some converses of generalized Banach contraction principles // Nonlinear Functional Analysis and Its Applications (Maratea, 1985). — Dordrecht: Reidel, 1986. — (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.; Vol. 173). — P. 335—351.

[141] Palczewski B., Miczko A. Converses of generalized Banach contraction principles and remarks on mappings with a contractive iterate at the point // Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. — 1987. — Vol. 17, no. 1. — P. 71—91.

[142] Park S., Rhoades B. E. Comments on characterizations for metric completeness // Math. Japon. — 1986. — Vol. 31, no. 1. — P. 95—97.

[143] Pasicki L. Dislocated metric and fixed point theorems // Fixed Point Theory Appl. — 2015. — 82.

[144] Penot J.-P. The drop theorem, the petal theorem and Ekeland's variational principle // Nonlinear Anal. — 1986. — Vol. 10, no. 9. — P. 813—822.

[145] Petalas C., Vidalis T. A fixed point theorem in non-Archimedean vector spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — Vol. 118, no. 3. — P. 819—821.

[146] Petruşel A. Multivalued weakly Picard operators and applications // Sci. Math. Jpn. — 2004. — Vol. 59, no. 1. — P. 169—202.

[147] Petruşel A., Petruşel G. Multivalued Picard operators // J. Nonlinear Convex Anal. — 2012. — Vol. 13, no. 1. — P. 157—171.

[148] Petruşel A., Rus I. A. Fixed point theorems in ordered L-spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 2006. — Vol. 134, no. 2. — P. 411—418.

[149] Prieß-Crampe S. Der Banachsche Fixpunktsatz für ultrametrische Räume // Results Math. — 1990. — Vol. 18, no. 1-2. — P. 178—186.

[150] Ran A. C. M., Reurings M. C. B. A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations // Proc. Amer. Math. Soc. — 2004. — Vol. 132, no. 5. — P. 1435—1443.

[151] Romaguera S. A Kirk type characterization of completeness for partial metric spaces // Fixed Point Theory Appl. — 2010. — 493298.

[152] Romaguera S., Tirado P. A characterization of Smyth complete quasi-metric spaces via Caristi's fixed point theorem // Fixed Point Theory Appl. — 2015. — 183.

[153] Romaguera S., Valero O. Domain theoretic characterisations of quasi-metric completeness in terms of formal balls // Math. Structures Comput. Sci. — 2010. — Vol. 20, no. 3. — P. 453—472.

[154] Rubin H., Rubin J. E. Equivalents of the axiom of choice. II. — Amsterdam: North-Holland, 1985. — (Stud. Logic Foundations Math.; Vol. 116).

[155] Rus I. A. Metrical Fixed Point Theorems. — Cluj-Napoca: Univ. Babeş-Bolyai, Fac. Mat., 1979.

[156] Rus I. A. Weakly Picard mappings // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1993. — Vol. 34, no. 4. — P. 769—773.

[157] Rus I. A. Generalized Contractions and Applications. — Cluj-Napoca: Cluj Univ. Press, 2001.

[158] Rus I. A. Picard operators and applications // Sci. Math. Jpn. — 2003. — Vol. 58, no. 1. — P. 191—219.

[159] Rus I. A. Fixed point theory in partial metric spaces // An. Univ. Vest Timiş. Ser. Mat.-Inform. — 2008. — Vol. 46, no. 2. — P. 149—160.

[160] Rus I. A., Petruşel A., Petruşel G. Fixed Point Theory. — Cluj-Napoca: Cluj Univ. Press, 2008.

[161] Samet B. Discussion on a fixed point theorem of Banach—Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces' by A. Branciari // Publ. Math. Debrecen. — 2010. — Vol. 76, no. 3-4. — P. 493—494.

[162] Scott D. Continuous lattices // Toposes, Algebraic geometry and Logic (Conf., Dalhousie Univ., Halifax, N. S., 1971). — Berlin: Springer, 1972. — P. 97—136.

[163] Shahzad N., Valero O. On 0-complete partial metric spaces and quantitative fixed point techniques in denotational semantics // Abstr. Appl. Anal. — 2013. — 985095.

[164] Shahzad N., Valero O. A Nemytskii—Edelstein type fixed point theorem for partial metric spaces // Fixed Point Theory Appl. — 2015. — 26.

[165] Shioji N., Suzuki T., Takahashi W. Contractive mappings, Kannan mappings and metric completeness // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126, no. 10. — P. 3117—3124.

[166] Smithson R. E. Fixed points of order preserving multifunctions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 28. — P. 304—310.

[167] Smithson R. E. Fixed points in partially ordered sets // Pacific J. Math. — 1973. — Vol. 45. — P. 363—367.

[168] Stoltenberg-Hansen V., Lindström I., Griffor E. R. Mathematical Theory of Domains. — Cambridge: Cambridge University Press, 1994. — (Cambridge Tracts in Theor. Comput. Sci.; Vol. 22).

[169] Subrahmanyam P. V. Completeness and fixed-points // Monatsh. Math. — 1975. — Vol. 80, no. 4. — P. 325—330.

[170] Sullivan F. A characterization of complete metric spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 83, no. 2. — P. 345—346.

[171] Sullivan F. Ordering and completeness of metric spaces // Nieuw Arch. Wisk. (3). — 1981. — Vol. 29, no. 2. — P. 178—193.

[172] Suzuki T. Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — Vol. 253, no. 2. — P. 440—458.

[173] Suzuki T. Several fixed point theorems concerning τ-distance // Fixed Point Theory Appl. — 2004. — No. 3. — P. 195—209.

[174] Suzuki T. Counterexamples on τ-distance versions of generalized Caristi's fixed point theorems // Bull. Kyushu Inst. Technol. Pure Appl. Math. — 2005. — No. 52. — P. 15—20.

[175] Suzuki T. The strong Ekeland variational principle // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 320, no. 2. — P. 787—794.

[176] Suzuki T. Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — Vol. 340, no. 2. — P. 1088—1095.

[177] Suzuki T. A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness // Proc. Amer. Math. Soc. — 2008. — Vol. 136, no. 5. — P. 1861—1869.

[178] Suzuki T. w-distances and τ-distances // Nonlinear Funct. Anal. Appl. — 2008. — Vol. 13, no. 1. — P. 15—27.

[179] Suzuki T. Some notes on τ-distance versions of Ekeland's variational principle // Bull. Kyushu Inst. Technol. Pure Appl. Math. — 2009. — No. 56. — P. 19—28.

[180] Suzuki T. Characterizations of reflexivity and compactness via the strong Ekeland variational principle // Nonlinear Anal. — 2010. — Vol. 72, no. 5. — P. 2204—2209.

[181] Suzuki T. Some notes on the class of contractions with respect to τ-distance // Bull. Kyushu Inst. Technol. Pure Appl. Math. — 2010. — No. 57. — P. 9—18.

[182] Suzuki T., Takahashi W. Fixed point theorems and characterizations of metric completeness // Topol. Methods Nonlinear Anal. — 1996. — Vol. 8, no. 2. — P. 371—382.

[183] Takahashi W. Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings // Fixed Point Theory and Applications (Marseille, 1989). — Harlow: Longman Sci. Tech., 1991. — (Pitman Res. Notes Math. Ser.; Vol. 252). — P. 397—406.

[184] Takahashi W. Existence theorems in metric spaces and characterizations of metric completeness // NLA98: Convex analysis and chaos (Sakado, 1998). — Sakado: Josai Univ., 1999. — (Josai Math. Monogr.; Vol. 1). — P. 67—85.

[185] Takahashi W. Nonlinear Functional Analysis. Fixed Point Theory and Its Applications. — Yokohama: Yokohama Publ., 2000.

[186] Takahashi W., Wong N.-C., Yao J.-C. Fixed point theorems for general contractive mappings with W-distances in metric spaces // J. Nonlinear Convex Anal. — 2013. — Vol. 14, no. 3. — P. 637—648.

[187] Tasković M. R. The axiom of choice, fixed point theorems, and inductive ordered sets // Proc. Amer. Math. Soc. — 1992. — Vol. 116, no. 4. — P. 897—904.

[188] Tasković M. R. Axiom of choice—100th next // Math. Morav. — 2004. — Vol. 8, no. 1. — P. 39—62.

[189] Tasković M. R. The axiom of infinite choice // Math. Morav. — 2012. — Vol. 16, no. 1. — P. 1—32.

[190] Tataru D. Viscosity solutions of Hamilton—Jacobi equations with unbounded nonlinear terms // J. Math. Anal. Appl. — 1992. — Vol. 163, no. 2. — P. 345—392.

[191] Valero O. On Banach fixed point theorems for partial metric spaces // Appl. Gen. Topol. — 2005. — Vol. 6, no. 2. — P. 229—240.

[192] Valero O. On Banach's fixed point theorem and formal balls // Appl. Sci. — 2008. — Vol. 10. — 256—258.

[193] Wang G., Chen B. L., Wang L. S. A new converse to Banach's contraction mapping theorem: a nonlinear convergence principle // Gongcheng Shuxue Xuebao. — 1999. — Vol. 16, no. 1. — P. 135—138.

[194] Ward L. E., Jr. Completeness in semi-lattices // Canad. J. Math. — 1957. — Vol. 9. — P. 578—582.

[195] Weston J. D. A characterization of metric completeness // Proc. Amer. Math. Soc. — 1977. — Vol. 64, no. 1. — P. 186—188.

[196] Witt E. On Zorn's theorem // Rev. Mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. — 1950. — Vol. 10. — P. 82—85.

[197] Wolk E. S. Dedekind completeness and a fixed-point theorem // Canad. J. Math. — 1957. — Vol. 9. — P. 400—405.

[198] Wong J. S. W. Generalizations of the converse of the contraction mapping principle // Canad. J. Math. — 1966. — Vol. 18. — P. 1095—1104.

[199] Xiang S.-W. Equivalence of completeness and contraction property // Proc. Amer. Math. Soc. — 2007. — Vol. 135, no. 4. — P. 1051—1058.

[200] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. I. Fixed-Point Theorems. — New York: Springer, 1986.