

Метод неопределённых частот

В. М. БУДАНОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vlbudanov@gmail.com

УДК 531.36

Ключевые слова: нелинейные колебания, метод последовательных приближений.

Аннотация

Предлагается метод аналитического построения решений нелинейных динамических систем, имеющих характер колебаний. Особенностью метода является отсутствие априорных предположений о частотах возникающих колебаний, которые определяются в ходе последовательных приближений. Метод работоспособен без предположений о наличии малого параметра, что демонстрируется анализом конкретных динамических систем.

Abstract

V. M. Budanov, Undefined frequencies method, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 2, pp. 59–71.

A method of analytical construction of solutions of nonlinear dynamic systems is introduced for the case where solutions have oscillatory type. The method does not require any a priori assumptions on the frequencies of oscillations that are defined on course of successive approximations. The method can be applied without assuming the existence of some small parameter, and this is illustrated by the analysis of particular dynamic systems.

Введение

Нелинейные динамические системы являются весьма интересным объектом в научном плане и весьма важным — в практическом. Колебания многих механических объектов, начиная с обычного маятника, имеют нелинейный характер, а эффект возникновения автоколебаний в принципе не может быть описан линейными моделями. Современные аналитические подходы к исследованию колебаний в нелинейных системах базируются на асимптотических методах, предполагающих близость нелинейной системы к некоторой линейной, что выражается наличием малого параметра при нелинейных членах [3, 4, 6–8]. В настоящей работе предлагается метод, в котором объединены метод последовательных приближений и метод усреднения и который наследует положительные свойства обоих: сходимость без предположений о малости параметра и приведение исходных уравнений к более простым уравнениям для медленно меняющихся переменных.

Общее описание метода

Начнём с рассмотрения уравнения второго порядка

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t). \quad (1)$$

Будем считать, что его решения имеют характер колебаний. Тогда можно сделать замену переменных

$$x = A \cos \psi, \quad \dot{x} = -A\vartheta \sin \psi, \quad \psi = \vartheta t + \alpha, \quad (2)$$

где ϑ — постоянная, но заранее неизвестная величина, A и α — новые переменные. Отличие от общепринятой замены состоит в том, что в качестве новой переменной берётся не ψ , а α и введена частота ϑ , которая постоянна, но не известна заранее и подлежит определению в процессе построения периодического решения. Эта особенность и определяет название метода.

Дифференцируя соотношения (2) и учитывая (1), получаем два уравнения

$$\begin{aligned} (\dot{x} =) \dot{A} \cos \psi - A(\vartheta + \dot{\alpha}) \sin \psi &= -A\vartheta \sin \psi, \\ (\ddot{x} =) -\dot{A}\vartheta \sin \psi - A\vartheta(\vartheta + \dot{\alpha}) \cos \psi &= f(A \cos \psi, -A\vartheta \sin \psi, t), \end{aligned}$$

или, упрощая и опуская аргументы функции f ,

$$\begin{aligned} \dot{A} \cos \psi - A\dot{\alpha} \sin \psi &= 0, \\ \dot{A}\vartheta \sin \psi + A\vartheta\dot{\alpha} \cos \psi &= -A\vartheta^2 \cos \psi - f. \end{aligned}$$

Очевидные комбинации этих двух уравнений дают систему

$$\begin{aligned} \dot{A}\vartheta &= -\sin \psi (A\vartheta^2 \cos \psi + f), \\ A\vartheta\dot{\alpha} &= -\cos \psi (A\vartheta^2 \cos \psi + f), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{1}{2} A\vartheta \sin 2\psi - \frac{1}{\vartheta} \sin \psi f(A \cos \psi, -A\vartheta \sin \psi, t), \\ \dot{\alpha} &= -\frac{1}{2} \vartheta - \frac{1}{2} \vartheta \cos 2\psi - \frac{1}{A\vartheta} \cos \psi f(A \cos \psi, -A\vartheta \sin \psi, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) является точной при любом ненулевом значении ϑ и замкнутой, поскольку есть ещё соотношение $\psi = \vartheta t + \alpha$. Для более компактного изложения перепишем (3) в виде

$$\begin{aligned} \dot{A} &= F_A(A, \alpha, \vartheta, t), \\ \dot{\alpha} &= F_\alpha(A, \alpha, \vartheta, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Переменные A , α будем искать в виде суммы медленных \bar{A} , $\bar{\alpha}$ и быстрых \tilde{A} , $\tilde{\alpha}$ составляющих, а правую часть представим в виде суммы усреднённых по явно входящему времени членов и быстрых составляющих с нулевым средним:

$$\begin{aligned} \dot{A} + \dot{\tilde{A}} &= \bar{F}_A(\bar{A}, \bar{\alpha}, \vartheta) + \tilde{F}_A(\bar{A}, \bar{\alpha}, \vartheta, \tilde{A}, \tilde{\alpha}, t), \\ \dot{\alpha} + \dot{\tilde{\alpha}} &= \bar{F}_\alpha(\bar{A}, \bar{\alpha}, \vartheta) + \tilde{F}_\alpha(\bar{A}, \bar{\alpha}, \vartheta, \tilde{A}, \tilde{\alpha}, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Под усреднением при этом понимается вычисление среднего значения на бесконечном промежутке времени:

$$\bar{F} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt.$$

Очевидно, что при таком определении все функции вида $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ при $\omega \neq 0$ имеют нулевые средние, так же как и линейные комбинации таких функций с произвольными ненулевыми частотами. Однако в уравнениях (4) сразу или после нескольких приближений могут возникнуть тригонометрические члены с аргументами

$$\xi = k\psi_1 - m\psi_2 = (k\vartheta_1 - m\vartheta_2)t + k\alpha_1 - m\alpha_2.$$

В качестве одного из параметров ϑ_1 , ϑ_2 здесь может пониматься частота внешней силы, или оба параметра являются частотами подсистем вида (2) в многомерном случае. В этом случае результат усреднения, например, функции $\sin \xi$ будет зависеть от того, как определить параметры ϑ_1 , ϑ_2 :

$$\overline{\sin \xi} = \begin{cases} 0 & \text{при } k\vartheta_1 - m\vartheta_2 \neq 0, \\ \sin(k\alpha_1 - m\alpha_2) & \text{при } k\vartheta_1 - m\vartheta_2 = 0. \end{cases}$$

Второй вариант есть случай резонанса. При этом появляются дополнительные медленные слагаемые в разложении (5).

Эти простые соображения будут использоваться в конкретных примерах для выполнения усреднения.

Вернёмся к системе (5). Полагаем, что медленные составляющие удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\bar{A}} &= \bar{F}_A(\bar{A}, \bar{\alpha}, \vartheta), \\ \dot{\bar{\alpha}} &= \bar{F}_\alpha(\bar{A}, \bar{\alpha}, \vartheta). \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда для быстрых переменных имеем

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{A}} &= \tilde{F}_A(\bar{A}, \bar{\alpha}, \vartheta, \tilde{A}, \tilde{\alpha}, t), \\ \dot{\tilde{\alpha}} &= \tilde{F}_\alpha(\bar{A}, \bar{\alpha}, \vartheta, \tilde{A}, \tilde{\alpha}, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Будем искать решение системы (4), которая отличается от исследуемой системы (3) только обозначениями, методом последовательных приближений, решая по очереди системы для быстрых и медленных переменных (6), (7). Быстрые составляющие будем вычислять интегрированием быстрых слагаемых, считая медленные составляющие константами. В уравнениях для медленных составляющих \bar{A} , $\bar{\alpha}$ будем учитывать как медленные слагаемые в правых частях уравнений (4), так и усреднённые по явно входящему времени добавки от быстрых составляющих \tilde{A} , $\tilde{\alpha}$.

Более конкретно, приближения строятся следующим образом.

Первое приближение. Подставляем $\dot{A} = \dot{\alpha} = 0$ в правые части (4) и усредняем их по явно входящему времени. Полагаем $\bar{F}_\alpha(\bar{A}, \bar{\alpha}, \vartheta) = 0$. Дополнительно к этому условию, как правило, имеется ещё одно: произвольность $\bar{\alpha}$ в случае автономной системы или резонансное соотношение на ϑ для системы с внешним возмущением. Имея два соотношения на три неизвестные, находим зависимость частоты и фазы колебаний от амплитуды: $\vartheta_1 = \vartheta_1(\bar{A})$, $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1(\bar{A})$. С учётом этого получаем уравнение для медленной амплитуды: $\dot{A} = \bar{F}_A(\bar{A}, \bar{\alpha}_1, \vartheta_1)$. В частности, если строится периодическое решение исходной системы (1), то найдется стационарное решение \bar{A}_1 из условия $\bar{F}_A(\bar{A}_1, \bar{\alpha}_1, \vartheta_1) = 0$. Периодические быстрые составляющие вычисляются прямым интегрированием уравнений (7), которые в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{A}}_1 &= \tilde{F}_A(\bar{A}_1, \bar{\alpha}_1, \vartheta_1, t), \\ \dot{\tilde{\alpha}}_1 &= \tilde{F}_\alpha(\bar{A}_1, \bar{\alpha}_1, \vartheta_1, t).\end{aligned}$$

При этом интегрировании игнорируется возможная зависимость медленных переменных от времени. Решение

$$A_1 = \bar{A}_1 + \tilde{A}_1, \quad \alpha_1 = \bar{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_1$$

является первым приближением для уравнения (3), а соответствующее решение уравнения (1) может быть выписано с учётом замены (2).

Второе приближение. Подставляем в правые части (4) $A = \bar{A} + \tilde{A}_1$, $\alpha = \bar{\alpha} + \tilde{\alpha}_1$, забывая о полученных решениях первого приближения для медленных переменных, и повторяем те же шаги, что и для первого приближения. При этом уравнения для быстрых переменных таковы:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{A}} &= \tilde{F}_A(\bar{A}_2, \bar{\alpha}_2, \vartheta_2, \tilde{A}_1, \tilde{\alpha}_1, t), \\ \dot{\tilde{\alpha}} &= \tilde{F}_\alpha(\bar{A}_2, \bar{\alpha}_2, \vartheta_2, \tilde{A}_1, \tilde{\alpha}_1, t).\end{aligned}$$

Высшие приближения строятся аналогично.

Метод легко обобщается на многомерный случай, когда имеются несколько уравнений типа (1) с правыми частями, зависящими от нескольких переменных.

Оставляя в стороне строгое математическое обоснование предлагаемого метода неопределённых частот, ограничимся нестрогими соображениями относительно его сходимости. На методе последовательных приближений Пикара основан один из способов доказательства существования и единственности решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 10]. Предлагаемый метод также базируется на построении последовательных приближений и имеет, по сути, единственное предположение, делающее его приближённым, — игнорирование зависимости медленных переменных от времени при интегрировании уравнений для быстрых переменных. Это же обстоятельство может быть причиной нарушения сходимости. Поэтому можно ожидать, что для систем с достаточно медленным изменением амплитуд и фаз колебаний не должно быть проблем со сходимостью, в частности, при поиске предельных циклов и вообще периодических движений.

Далее рассмотрим применение метода на конкретных классических примерах [1, 9, 11].

Пример 1. Математический маятник

Правая часть уравнения (1) — это $f = -\sin x$. Система (3) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\frac{1}{2}A\vartheta \sin 2\psi + \frac{1}{\vartheta} \sin \psi \sin(A \cos \psi), \\ \dot{\alpha} &= -\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{2}\vartheta \cos 2\psi + \frac{1}{A\vartheta} \cos \psi \sin(A \cos \psi), \\ \psi &= \vartheta t + \alpha.\end{aligned}\quad (8)$$

Ограничимся первыми двумя членами разложения Тейлора для функции

$$\sin(A \cos \psi) \approx A \cos \psi - \frac{1}{6}A^3 \cos^3 \psi. \quad (9)$$

Тогда с использованием стандартных тригонометрических преобразований система (8) запишется в виде

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\frac{1}{2\vartheta}A \left(\vartheta^2 - 1 + \frac{1}{12}A^2 \right) \sin 2\psi - \frac{1}{48\vartheta}A^3 \sin 4\psi, \\ \dot{\alpha} &= -\frac{1}{2\vartheta} \left(\vartheta^2 - 1 + \frac{1}{8}A^2 \right) - \frac{1}{2\vartheta} \left(\vartheta^2 - 1 + \frac{1}{6}A^2 \right) \cos 2\psi - \frac{1}{48\vartheta}A^2 \cos 4\psi.\end{aligned}\quad (10)$$

Поставим задачу получить приближённое решение для максимальных отклонений маятника в три радиана. Удобно сделать следующую замену:

$$A = 3B \quad (11)$$

Тогда переменная будет принимать значения до единицы, а (10) превратится в систему

$$\begin{aligned}\dot{B} &= -\frac{1}{2\vartheta}B \left(\vartheta^2 - 1 + \frac{3}{4}B^2 \right) \sin 2\psi - \frac{3}{16\vartheta}B^3 \sin 4\psi, \\ \dot{\alpha} &= -\frac{1}{2\vartheta} \left(\vartheta^2 - 1 + \frac{9}{8}B^2 \right) - \frac{1}{2\vartheta} \left(\vartheta^2 - 1 + \frac{3}{2}B^2 \right) \cos 2\psi - \frac{3}{16\vartheta}B^2 \cos 4\psi.\end{aligned}\quad (12)$$

Если решение системы (12) найдено, то решение относительно исходной неизвестной имеет вид

$$x = 3\bar{B}(1 + \beta) \cos(\vartheta t + \bar{\alpha}). \quad (13)$$

Решение будем искать как комбинацию медленных переменных \bar{B} , $\bar{\alpha}$ и быстрых переменных β , $\tilde{\alpha}$: $B = \bar{B}(1 + \beta)$, $\alpha = \bar{\alpha} + \tilde{\alpha}$. Возьмём в качестве начального приближения $B = B_0$, $\alpha = 0$. При этом $\psi = \vartheta t$. Записываем уравнения первого

приближения по медленным переменным, усреднив правые части (12) по явно входящему времени:

$$\begin{aligned}\dot{B} &= 0, \\ \dot{\alpha} &= -\frac{1}{2\vartheta} \left(\vartheta^2 - 1 + \frac{9}{8} B^2 \right) = 0.\end{aligned}$$

Получаем, что амплитуда постоянна, как и должно быть для консервативной системы. Условие отсутствия постоянной составляющей по фазовой скорости даёт соотношение между частотой и амплитудой колебаний в первом приближении:

$$\vartheta^2 = 1 - \frac{9}{8} B^2 = 1 - \frac{1}{8} A^2. \quad (14)$$

С учётом этого из (12) получаем систему уравнений для переменных составляющих:

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \frac{3}{16\vartheta} \bar{B}^2 (\sin 2\vartheta t - \sin 4\vartheta t), \\ \dot{\alpha} &= -\frac{3}{16\vartheta} \bar{B}^2 (\cos 2\vartheta t + \cos 4\vartheta t).\end{aligned}$$

Интегрируем эти уравнения, подставляем в коэффициенты выражение для частоты (14) и представляем эти коэффициенты полиномами по степени не выше второй:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{3}{64} \bar{B}^2 (-2 \cos 2\vartheta t + \cos 4\vartheta t), \\ \tilde{\alpha}_1 &= -\frac{3}{64} \bar{B}^2 (2 \sin 2\vartheta t + \sin 4\vartheta t).\end{aligned} \quad (15)$$

Итак, в первом приближении окончательное решение имеет вид (13) с подстановкой быстрых переменных (15) и частоты (14).

Для построения второго приближения необходимо более точное разложение (9) до пятой степени. Тогда уравнения (12) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{B} &= -\frac{1}{2\vartheta} B \left(\vartheta^2 - 1 + \frac{3}{4} B^2 - \frac{27}{128} B^4 \right) \sin 2\psi + \\ &+ \frac{1}{\vartheta} B^3 \left(-\frac{3}{16} + \frac{27}{320} B^2 \right) \sin 4\psi + \frac{1}{\vartheta} \frac{27}{1280} B^5 \sin 6\psi, \\ \dot{\alpha} &= -\frac{1}{2\vartheta} \left(\vartheta^2 - 1 + \frac{9}{8} B^2 - \frac{27}{64} B^4 \right) - \frac{1}{2\vartheta} \left(\vartheta^2 - 1 + \frac{3}{2} B^2 - \frac{81}{128} B^4 \right) \cos 2\psi + \\ &+ \frac{1}{\vartheta} B^2 \left(-\frac{3}{16} + \frac{81}{640} B^2 \right) \cos 4\psi + \frac{1}{\vartheta} \frac{27}{1280} B^4 \cos 6\psi.\end{aligned}$$

Полагаем $B = \bar{B}(1 + \beta_1)$, $\psi = \vartheta t + \tilde{\alpha}_1$, разлагаем все слагаемые в ряды по малым величинам β_1 , $\tilde{\alpha}_1$ и удерживаем члены до первого порядка малости.

Например,

$$\begin{aligned}
 \cos 2\psi &= \cos(2\vartheta t + 2\tilde{\alpha}_1) \approx \cos 2\vartheta t - 2\tilde{\alpha}_1 \sin 2\vartheta t \approx \\
 &\approx \frac{3}{32}\bar{B}^2 + \left(1 + \frac{3}{64}\bar{B}^2\right) \cos 2\vartheta t - \frac{3}{64}\bar{B}^2(2 \cos 4\vartheta t + \cos 6\vartheta t), \\
 B^3 \sin 4\psi &\approx \bar{B}^3(1 + 3\beta_1)(\sin 4\vartheta t + 4\tilde{\alpha}_1 \cos 4\vartheta t) \approx \\
 &\approx \bar{B}^3 \sin 4\vartheta t + \frac{1}{128}\bar{B}^5(6 \sin 2\vartheta t - 42 \sin 6\vartheta t - 3 \sin 8\vartheta t).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Мы видим, что в разложениях возникают добавки, явно не зависящие от времени, которые войдут в уравнения для медленных переменных. Нетрудно заметить, что постоянная составляющая первого уравнения будет нулевой. Опуская все выкладки из-за их громоздкости, приведём результат второго приближения:

$$\begin{aligned}
 \vartheta_2 &= 1 - \frac{9}{16}\bar{B}^2 + \frac{81}{1024}\bar{B}^4, \\
 \beta_2 &= \beta_1 - \frac{3}{20480}\bar{B}^4(255 \cos 2\vartheta t - 201 \cos 4\vartheta t + 69 \cos 6\vartheta t), \\
 \tilde{\alpha}_2 &= \tilde{\alpha}_1 - \frac{3}{10240}\bar{B}^4(150 \sin 2\vartheta t + 42 \sin 4\vartheta t - 27 \sin 6\vartheta t).
 \end{aligned}$$

На рис. 1 приведён график решения во втором приближении при $B = 0,68$ и результат численного интегрирования (кривые 1, 2), а также их разность с коэффициентом 10 (кривая 3). Амплитуда колебаний — два радиана, при этом

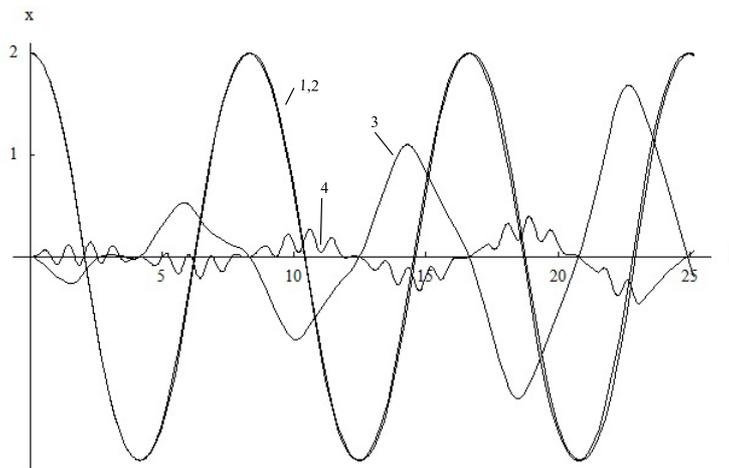


Рис. 1

частота составляет $3/4$ от исходной. Повышение точности при построении следующих приближений иллюстрирует кривая 4 — ошибка пятого приближения, умноженная на 1000.

Построение более высоких приближений затруднительно исключительно из-за громоздкости и объёма вычислений, что преодолевается применением современных пакетов символьных вычислений. С использованием пакета «Математика» были построены следующие три приближения. Приведём результаты последнего, пятого приближения, с помощью которого достигается поставленная цель — удовлетворительное решение для амплитуды в три радиана. Для этого потребовалось разложение функции \sin до одиннадцатой степени аргумента:

$$\begin{aligned} \sin(3B \cos \psi) \approx 3B \cos \psi - 4,5B^3 \cos^3 \psi + 2,025B^5 \cos^5 \psi + \\ + 0,434B^7 \cos^7 \psi + 0,054B^9 \cos^9 \psi - 0,004B^{11} \cos^{11} \psi. \end{aligned}$$

Видно, что меньшее количество членов может не обеспечить точность порядка 0,001. Первое приближение (15) даёт оценку быстрых добавок β , $\tilde{\alpha}$ порядка $1/7$. При разложениях нелинейных членов типа (16) можно ограничиться меньшими степенями, в данном случае — четвёртой. Также было ограничено количество гармоник: до восьмой включительно. Результат пятого приближения следующий:

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &= 1 - \frac{9}{16} \bar{B}^2 + \frac{81}{1024} \bar{B}^4 + 10^{-3} (-8,034 \bar{B}^6 + 0,035 \bar{B}^8 + 0,115 \bar{B}^{10}), \\ \beta_5 &= \beta_2 + 10^{-3} \bar{B}^6 [-(14,646 + 5,337 \bar{B}^2 + 1,67 \bar{B}^4) \cos 2\vartheta t + \\ &+ (13,958 + 5,832 \bar{B}^2 + 2,155 \bar{B}^4) \cos 4\vartheta t + \\ &+ (-8,628 - 5,241 \bar{B}^2 - 2,722 \bar{B}^4) \cos 6\vartheta t + \\ &+ (1,325 + 1,722 \bar{B}^2 + 1,353 \bar{B}^4) \cos 8\vartheta t], \\ \tilde{\alpha}_5 &= \tilde{\alpha}_2 + 10^{-3} \bar{B}^6 [-(19,878 + 8,506 \bar{B}^2 + 3,332 \bar{B}^4) \sin 2\vartheta t + \\ &+ (-2,708 + 0,609 \bar{B}^4) \sin 4\vartheta t + (5,016 + 2,530 \bar{B}^2 + 1,134 \bar{B}^4) \sin 6\vartheta t + \\ &+ (-0,264 - 0,585 \bar{B}^2 - 0,496 \bar{B}^4) \sin 8\vartheta t]. \end{aligned}$$

На рис. 2 приведён график решения (13) в пятом приближении при $\bar{B} = 1,14$, результат численного интегрирования и их разность с коэффициентом 10. Амплитуда колебаний — три радиана, при этом частота составляет 0,38 от исходной. Отметим, что при меньших амплитудах совпадение лучше, т. е. полученное решение во всем диапазоне амплитуд от 0 до 3 радиан обеспечивает качество не хуже чем на приведённом рисунке 2.

Отметим также, что величина \bar{B} определяет амплитуду основной гармоники. Выражение для амплитуды колебаний получается из $A = 3\bar{B}(1 + \beta(t))$ при $t = 0$.

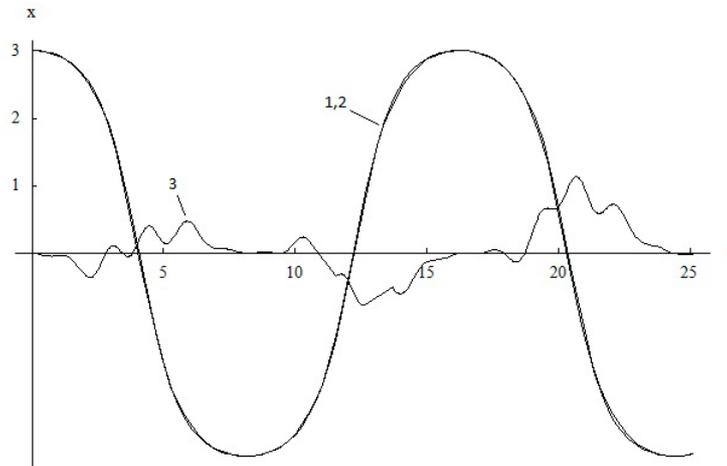


Рис. 2

Пример 2. Связанные осцилляторы

В качестве примера, демонстрирующего работу метода в многомерном случае, рассмотрим систему двух связанных маятников, линейного и нелинейного:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\sin x - k(x - y), \\ \ddot{y} &= \omega^2 y + k(x - y).\end{aligned}\quad (17)$$

Здесь k — коэффициент упругой связи. Делаем замену переменных для каждого из осцилляторов:

$$\begin{aligned}x &= A \cos \psi_1, & \dot{x} &= -A\vartheta_1 \sin \psi_1, & \psi_1 &= \vartheta_1 t + \alpha, \\ y &= B \cos \psi_2, & \dot{y} &= -B\vartheta_2 \sin \psi_2, & \psi_2 &= \vartheta_2 t + \beta.\end{aligned}$$

По аналогии с рассмотренными выше примерами с одной степенью свободы частоты ϑ_1 , ϑ_2 считаем постоянными, но не определёнными заранее. В новых переменных получаем систему, образованную двумя подсистемами вида (3):

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\frac{1}{2}A\vartheta_1 \sin 2\psi_1 - \frac{1}{\vartheta_1}f_1 \sin \psi_1, \\ \dot{\alpha} &= -\frac{1}{2}\vartheta_1 - \frac{1}{2}\vartheta_1 \cos 2\psi_1 - \frac{1}{A\vartheta_1}f_1 \cos \psi_1, \\ f_1 &= -\sin(A \cos \psi_1) - k(A \cos \psi_1 - B \cos \psi_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{B} &= -\frac{1}{2}B\vartheta_2 \sin 2\psi_2 - \frac{1}{\vartheta_2}f_2 \sin \psi_2, \\ \dot{\beta} &= -\frac{1}{2}\vartheta_2 - \frac{1}{2}\vartheta_2 \cos 2\psi_2 - \frac{1}{B\vartheta_2}f_2 \cos \psi_2, \\ f_2 &= -\omega^2 B \cos \psi_2 + k(A \cos \psi_1 - B \cos \psi_2).\end{aligned}$$

Ограничимся аппроксимацией

$$\sin(A \cos \psi) \approx A \cos \psi - \frac{1}{6}A^3 \cos^3 \psi$$

и, выполнив соответствующие тригонометрические преобразования, приведём полученную систему к виду

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\frac{1}{2\vartheta_1}A \left(1 - \vartheta_1^2 - \frac{1}{12}A^2 + k\right) \sin 2\psi_1 - \frac{1}{48\vartheta_1}A^3 \sin 4\psi_1 - \\ &\quad - k\frac{1}{2\vartheta_1}B(\sin(\psi_1 + \psi_2) + \sin(\psi_1 - \psi_2)), \\ \dot{\alpha} &= -\frac{1}{2\vartheta_1}(1 - \vartheta_1^2 + k)(1 + \cos 2\psi_1) - \frac{1}{6\vartheta_1}A^2 \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\psi_1 + \frac{1}{4} \cos 4\psi_1\right) - \\ &\quad - k\frac{1}{2A\vartheta_1}B(\cos(\psi_1 + \psi_2) + \cos(\psi_1 - \psi_2)), \\ \dot{B} &= -\frac{1}{2\vartheta_2}B(\omega^2 - \vartheta_2^2 + k) \sin 2\psi_2 - \frac{1}{\vartheta_2}kA(\sin(\psi_1 + \psi_2) - \sin(\psi_1 - \psi_2)), \\ \dot{\beta} &= -\frac{1}{2\vartheta_2}(\omega^2 - \vartheta_2^2 + k)(1 + \cos 2\psi_2) - \frac{1}{2B\vartheta_2}kA(\cos(\psi_1 + \psi_2) + \cos(\psi_1 - \psi_2)).\end{aligned}\tag{18}$$

Если в системе (18) положить $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$, то имеем нерезонансный случай, осреднение для $\sin(\psi_1 - \psi_2)$, $\cos(\psi_1 - \psi_2)$ даст нули, и уравнения первого приближения для медленных составляющих примут вид

$$\begin{aligned}\dot{A} &= 0, \\ \dot{\alpha} &= -\frac{1}{2\vartheta_1} \left(1 - \vartheta_1^2 + k - \frac{1}{8}A^2\right), \\ \dot{B} &= 0, \\ \dot{\beta} &= -\frac{1}{2\vartheta_2}(\omega^2 - \vartheta_2^2 + k).\end{aligned}$$

Условия $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\beta} = 0$ дают значения частот

$$\vartheta_1^2 = 1 - \frac{1}{8}A^2 + k, \quad \vartheta_2^2 = \omega^2 + k.$$

Таким образом, получаем, что в первом приближении маятники совершают независимые колебания с постоянными амплитудами, а частоты изменились за счёт коэффициента упругой связи.

Если частоты колебаний маятников близки, то полагаем $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$. Тогда $\psi_1 - \psi_2 = \alpha - \beta$ и осреднённые уравнения будут иными:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{A}} &= -\frac{k}{2\vartheta}\bar{B}\sin(\bar{\alpha} - \bar{\beta}), \\ \dot{\bar{\alpha}} &= \frac{1}{2\vartheta}\left(1 - \vartheta^2 + k - \frac{1}{8}A^2 - k\frac{\bar{B}}{\bar{A}}\cos(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\right), \\ \dot{\bar{B}} &= \frac{k}{2\vartheta}\bar{A}\sin(\bar{\alpha} - \bar{\beta}), \\ \dot{\bar{\beta}} &= \frac{1}{2\vartheta}\left(\omega^2 - \vartheta^2 + k - k\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\cos(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\right).\end{aligned}\tag{19}$$

Эта система уравнений обладает нетривиальными стационарными решениями, определяемыми прежде всего условием $\sin(\bar{\alpha} - \bar{\beta})$. При этом возникают решения двух типов: синфазные при $\bar{\alpha} - \bar{\beta} = 0$ и противофазные при $\bar{\alpha} - \bar{\beta} = \pi$. Для синфазных колебаний по (19) имеем ещё два условия, связывающие частоты и амплитуды:

$$\begin{aligned}\vartheta^2 &= 1 - \frac{1}{8}A^2 + k\left(1 - \frac{\bar{B}}{\bar{A}}\right), \\ \omega^2 &= \vartheta^2 - k\left(1 - \frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right).\end{aligned}$$

Аналогичные условия имеют место для колебаний в противофазе:

$$\begin{aligned}\vartheta^2 &= 1 - \frac{1}{8}\bar{A}^2 + k\left(1 + \frac{\bar{B}}{\bar{A}}\right), \\ \omega^2 &= \vartheta^2 - k\left(1 + \frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right).\end{aligned}$$

Таким образом, пять параметров \bar{A} , \bar{B} , k , ω , ϑ связаны двумя соотношениями. Задав любые три параметра, можно найти два оставшихся. Таким образом, резонансные ситуации соответствуют трёхмерной области в пятимерном пространстве. Заметим, что в случае связанных линейных осцилляторов исчезает член с \bar{A}^2 и число независимых параметров сокращается на единицу.

Для анализа нестационарных решений систему (19) можно упростить, заметив, что в правые части входит лишь разность фаз и что величина $\bar{A}^2 + \bar{B}^2$ является первым интегралом. Положим

$$\bar{\alpha} - \bar{\beta} = \gamma, \quad \bar{A} = p \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2}\right), \quad \bar{B} = p \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2}\right).$$

Здесь $p = \text{const}$, а добавка $\pi/4$ введена для того, чтобы при $\eta = 0$ было $\bar{A} = \bar{B}$. Для переменных γ , η из (19) нетрудно получить следующую систему двух уравнений:

$$\dot{\eta} = \frac{k}{\vartheta} \sin \gamma,$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2\vartheta} \left(1 - \omega^2 - \frac{1}{16} p^2 (1 - \cos \eta) - 2k \frac{\sin \eta}{\cos \eta} \cos \gamma \right).$$

В малых отклонениях от стационарного режима $\gamma = 0$, $\eta = 0$, $\omega = 1$ эта система приобретает вид обычного осциллятора:

$$\dot{\eta} = \frac{k}{\vartheta} \gamma,$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{k}{\vartheta} \eta.$$

Таким образом, в системе (19) при малых отклонениях от стационарных режимов возникают биения.

На рис. 3 приведены результаты моделирования исходных уравнений (x, y) и усреднённых уравнений (огибающие A, B) при значениях параметров $\omega = 0,65$, $k = 0,1$ и начальных условиях $x_0 = 2$, $y_0 = -0,4$. При этом возникают биения в противофазе с частотой $\vartheta = 0,86$. Огибающие удовлетворительно описывают динамику изменения амплитуд, если учесть большие их значения и то, что это лишь первое приближение.

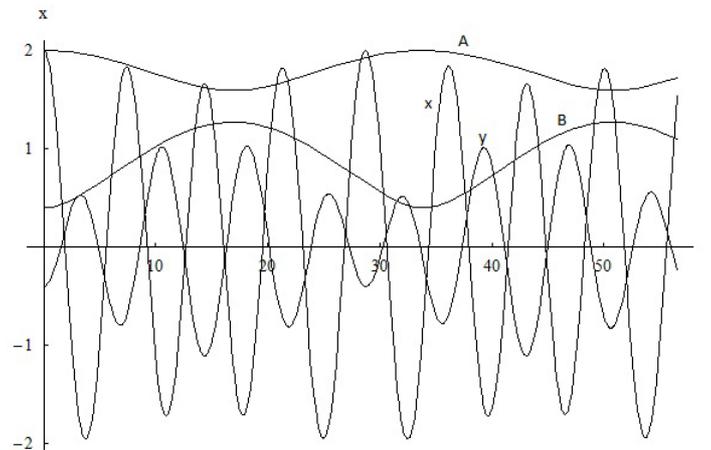


Рис. 3

Заключение

В статье предложен вариант метода усреднения для систем колебательно-го типа. С использованием этого метода построены решения для классических

задач нелинейной динамики: математического маятника при больших значениях амплитуды колебаний и системы связанных линейного и нелинейного маятников. В [5] тем же методом проведено исследование уравнения Матье в районе первой резонансной зоны. Предложенный метод не требует наличия малого параметра в исследуемых системах, отличается относительной простотой построения высших приближений, работоспособностью в существенно нелинейных ситуациях и возможностью обобщения на многомерный случай.

Литература

- [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматлит, 1959.
- [2] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.
- [3] Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Ижевск: РХД, 2000.
- [4] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
- [5] Буданов В. М. Редукция уравнения Матье к нелинейному уравнению первого порядка // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 2016. — № 4. — С. 66–69.
- [6] Журавлёв В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. — М.: Наука, 1988.
- [7] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. — М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.
- [8] Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
- [9] Маркеев А. П. О движении связанных маятников // Нелинейная динамика. — 2013. — Т. 9, № 1. — С. 27–38.
- [10] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — ЛКИ, 2015.
- [11] Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. — М.: ИЛ, 1952.

