

О влиянии моментов трения верчения на занос колёсного аппарата

А. В. ВЛАХОВА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vlakhova@mail.ru

А. П. НОВОДЁРОВА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: an.novoderova@yandex.ru

УДК 531.8

Ключевые слова: момент верчения, модель поликомпонентного сухого трения Журавлёва, модель кулонова трения, занос, велосипедная модель.

Аннотация

Дано математическое описание начальной стадии заноса обеих осей колёсного аппарата на вираже, возникающего в результате блокировки или пробуксовки колёс одной из его осей. Показано, что в рамках модели сухого трения В. Ф. Журавлёва, которая учитывает моменты трения верчения, возникающие при контакте колёс с опорной плоскостью, развитие заноса аппарата в целом происходит менее интенсивно, чем для традиционно используемой модели кулонова трения.

Abstract

A. V. Vlakhova, A. P. Novoderova, On effects of spinning moments on wheeled vehicle skidding, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 2, pp. 117–132.

We give a mathematical description of the initial stage of both axles skidding for a wheeled vehicle on a bend that arises in the case of blocking or slipping of wheels of one of its axles. It is shown that within the framework of Zhuravlev's model of friction, which takes into account the moments of spinning friction (they appear as a result of interaction of the wheels with the reference plane), the vehicle skidding is less than for the Coulomb friction model.

1. Введение

В теории движения колёсных аппаратов (автомобилей, роботов и пр.) часто пренебрегают моментами трения верчения, которые возникают из-за вращения колёс вокруг осей, ортогональных областям их контакта с опорными поверхностями. Подход к обоснованию этого предположения, базирующийся на щёточной модели описания контактных сил и моментов [11], который ориентирован

Фундаментальная и прикладная математика, 2018, том 22, № 2, с. 117–132.

© 2018 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

прежде всего на описание динамики аппаратов с пневматическими деформируемыми колёсами, изложен в [9]. При выполнении ряда ограничений угловой скорости вращения полученные в [9] оценки позволяют пренебрегать моментами трения вращения по сравнению с моментами, создаваемыми касательными составляющими контактных сил относительно центра масс аппарата в ситуациях, когда в областях контакта колёс с опорной плоскостью зона проскальзывания превышает зону сцепления [7]. Для аппаратов с достаточно жёсткими колёсами ограничения [9] могут не выполняться, что оставляет открытым вопрос о влиянии моментов трения вращения на их динамику. Проведённое в [1, 8] исследование показало, что в этом случае наблюдаемые эффекты, в частности явление шимми, традиционно описываемое с использованием неуместной здесь модели увода, может быть объяснено в рамках модели поликомпонентного сухого трения В. Ф. Журавлёва, учитывающей скольжение и вращение колёс относительно опорной плоскости. В настоящей работе с использованием методов фракционного анализа и теории сингулярных возмущений [2, 3, 10] исследуется влияние моментов трения вращения на начальную стадию заноса обеих осей колёсного аппарата. Для описания взаимодействия колёс с опорной плоскостью используются традиционная модель кулонова трения и модель поликомпонентного сухого трения В. Ф. Журавлёва. При небольших угловых скоростях поворота корпуса аппарата и его передних колёс вокруг вертикальных осей первая модель иллюстрирует движение аппарата в случае пренебрежимо малых областей контакта колёс с опорной плоскостью; вторая модель позволяет обсудить ограничения значений угловой скорости вращения и размеров областей контакта, при которых моменты трения вращения оказывают влияние на занос аппарата с достаточно жёсткими колёсами. Показано, что в рамках модели трения В. Ф. Журавлёва развитие заноса в целом происходит менее интенсивно, чем для модели кулонова трения.

2. Постановка задачи и уравнения движения аппарата

Рассмотрим задачу о заносе обеих осей двухосного четырёхколёсного аппарата на горизонтальной однородной плоскости, возникающем при блокировке или пробуксовке колёс одной из осей. Аналитическое исследование случаев, когда колёса другой оси не теряют сцепления с опорной плоскостью, проведено в [3, 5, 6], численное моделирование заноса обеих осей аппарата — в [3, 6]. Будем изучать начальную стадию заноса аппарата после завершения процессов блокировки или пробуксовки колёс, когда поперечная и угловая скорости его корпуса невелики. В этом случае силы взаимодействия колёс одной оси аппарата с опорной плоскостью различаются мало, и для упрощения исследования может быть использована «велосипедная модель» [3, 5, 6], в рамках которой два передних колеса заменяют одним эквивалентным передним колесом, два задних — одним

задним и пренебрегают боковыми наклонами его корпуса (рис. 1). Считая малым отношение масс колеса и аппарата, будем предполагать, что центр масс аппарата совпадает с центром масс C его корпуса. Взаимодействие колёс с опорной плоскостью происходит посредством сухого трения.

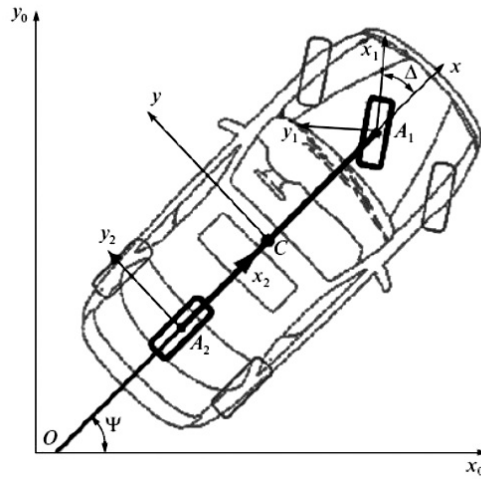


Рис. 1. Велосипедная модель четырёхколёсного аппарата (автомобиля)

Используя подход [3, 5, 6], составим уравнения динамики аппарата из уравнений изменения количества движения точки C в проекциях на оси связанного с опорной плоскостью Ox_0y_0 неподвижного трёхгранника $Ox_0y_0z_0$, уравнений изменения кинетического момента системы в целом относительно точки C в проекциях на оси подвижного трёхгранника $Cxyz$, а также уравнений изменения кинетических моментов переднего и заднего колёс относительно осей A_1y_1 , A_1z_1 и A_2y_2 трёхгранников $A_1x_1y_1z_1$ и $A_2x_2y_2z_2$, связанных с центрами масс колёс (оси Oz_0 , Cz , A_1z_1 и A_2z_2 ориентированы по вертикали):

$$\begin{aligned}
 M\dot{V}_x &= P_{x1} \cos \Delta - P_{y1} \sin \Delta + P_{x2} + MV_y \Omega_z + F_x, \\
 M\dot{V}_y &= P_{x1} \sin \Delta + P_{y1} \cos \Delta + P_{y2} - MV_x \Omega_z + F_y, \\
 N_1 + N_2 - Mg &= 0, \\
 -AN_1 + BN_2 - (P_{x1} \cos \Delta - P_{y1} \sin \Delta + P_{x2})H &= 0, \\
 I_z \dot{\Omega}_z &= (P_{x1} \sin \Delta + P_{y1} \cos \Delta)A - P_{y2}B + M_z + M_{S1} + M_{S2}, \\
 I \dot{\Omega}_1 &= -P_{x1}R + L_1, \quad I \dot{\Omega}_2 = -P_{x2}R + L_2, \\
 I_{z1}(\dot{\Omega}_\Delta + \dot{\Omega}_z) &= M_\Delta + M_{S1}, \quad \Omega_\Delta = \dot{\Delta}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени T ; Δ — угол поворота переднего колеса относительно корпуса вокруг оси A_1z_1 ; V_x , V_y — проекции ско-

рости центра масс C корпуса на оси Cx и Cy (далее будем предполагать, что $V_x(0) > 0$); $\Omega_z = \dot{\Psi}$ (см. рис. 1) — проекция угловой скорости корпуса на ось Cz ; Ω_j — угловая скорость вращения j -го колеса вокруг оси A_jy_j ($j = 1, 2$); M — масса аппарата; I_z — его момент инерции относительно оси Cz ; $I = m\rho^2$, $I_{z1} = m\rho_{z1}^2$ — осевой момент инерции колёс и момент инерции переднего колеса относительно оси A_1z_1 ; m , ρ , ρ_{z1} — масса колеса и соответствующие радиусы инерции; R — радиус колёс; A и B — продольные расстояния от точки C до осей A_1y_1 и A_2y_2 соответственно; H — высота точки C над опорной плоскостью Ox_0y_0 ; P_{xj} , P_{yj} и N_j — проекции касательных и нормальной составляющих контактных сил взаимодействия j -го колеса с опорной плоскостью на оси A_jx_j , A_jy_j и A_jz_j в точке взаимодействия; L_j — моменты со стороны двигателя и тормозных колодок, приложенные к j -му колесу по направлению осей A_jy_j и A_jz_j ; M_Δ — момент рулевого привода, приложенный к переднему колесу по направлению оси A_1z_1 ; M_{Sj} — момент трения верчения [1, 8], возникающий в результате вращения j -го колеса вокруг оси A_jz_j ; F_x , F_y , M_z — соответствующие проекции внешних возмущающих сил и моментов; g — ускорение свободного падения. Как и в [3, 5, 6], в силу условия

$$m \ll M \quad (2)$$

при записи уравнения изменения кинетического момента аппарата не учитываются проекции кинетических моментов его колёс; механизм рулевого управления считается безынерционным. Будем считать выполненными условия $N_1, N_2 > 0$ безотрывности движения колёс аппарата от опорной плоскости.

Изучая начальную стадию заноса аппарата и учитывая ограниченность области применимости велосипедной модели, рассмотрим случай

$$|V_y| \sim |\Omega_z|(A + B) \lesssim V_x|\Delta|, \quad |\Delta| \ll 1. \quad (3)$$

Перейдём к описанию взаимодействия колёс аппарата с опорной плоскостью.

Для модели кулонова трения выражения для касательных составляющих контактных сил, действующих на j -е колесо аппарата, имеют вид [3, 5, 6]

$$P_{xj} = -k_{xj}N_j \frac{U_{xj}}{\sqrt{U_{xj}^2 + U_{yj}^2}}, \quad P_{yj} = -k_{yj}N_j \frac{U_{yj}}{\sqrt{U_{xj}^2 + U_{yj}^2}}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U_{x1} &= V_x \cos \Delta + (V_y + \Omega_z A) \sin \Delta - \Omega_1 R, \\ U_{y1} &= -V_x \sin \Delta + (V_y + \Omega_z A) \cos \Delta, \\ U_{x2} &= V_x - \Omega_2 R, \quad U_{y2} = V_y - \Omega_z B; \end{aligned} \quad (5)$$

где k_{xj} и k_{yj} — коэффициенты трения в продольном и поперечном направлениях к плоскости симметрии j -го колеса; U_{xj} и U_{yj} — проекции скорости точки контакта j -го колеса с опорной плоскостью на осях A_jx_j и A_jy_j соответственно. В рамках модели кулонова трения входящие в систему (1) моменты верчения полагаются равными нулю.

Используя модель трения В. Ф. Журавлёва [1, 8], будем, как и в [8], предполагать, что область контакта j -го колеса с опорной плоскостью — круг радиуса

$$r \ll R, \quad (6)$$

и для простоты считать распределение нормальных напряжений равномерным. Тогда выражения для составляющих главного вектора и главного момента контактных сил относительно центра области контакта имеют вид

$$\begin{aligned} P_{xj} &= -k_{xj}N_j \frac{U_{xj}}{\sqrt{U_{xj}^2 + U_{yj}^2} + \beta|\Omega_z|r}, & P_{yj} &= -k_{yj}N_j \frac{U_{yj}}{\sqrt{U_{xj}^2 + U_{yj}^2} + \beta|\Omega_z|r}, \\ M_{Sj} &= -\gamma k_j N_j \frac{\Omega_z r^2}{\alpha \sqrt{U_{xj}^2 + U_{yj}^2} + |\Omega_z|r}, & \alpha &= \frac{8}{3}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражения для U_{xj} , U_{yj} были введены при записи формул (5).

Блокировка j -го колеса происходит при подаче тормозного момента $L_j < 0$, по величине превосходящего предельное значение величины момента продольной составляющей контактной силы, которое будем считать равным величине момента силы кулонова трения скольжения: $|L_j| > k_{xj}N_jR$. Таким образом, получим $\Omega_j \rightarrow 0$. Выражения для продольных, поперечных составляющих P_{xj} , P_{yj} контактных сил и момента вращения M_{Sj} для модели трения В. Ф. Журавлёва, действующих на заблокированное колесо, получаются из выражений (4), (7) при $\Omega_j = 0$. Пробуксовка j -го колеса происходит в результате подачи разгонного момента $L_j > k_{xj}N_jR$. Это приводит к быстрому разгону колеса с проскальзыванием до угловой скорости пробуксовки $\Omega_j^0 = \text{const}$, определяемой характеристиками двигателя аппарата. Выражения для продольных, поперечных составляющих контактных сил и момента вращения, действующих на пробуксовывающее колесо, получаются из выражений (4), (7) при $\Omega_j = \Omega_j^0$.

Для упрощения дальнейших выкладок, как и в [3, 5, 6], рассмотрим случай $L_\nu = 0$ свободного движения аппарата, где индекс ν отвечает номеру незаблокированного и не пробуксовывающего колеса, пренебрежём внешними возмущающими силами и моментами, приняв $F_y = 0$, $F_x = 0$, $M_z = 0$, и положим $\Delta = \text{const}$, $k_{xj} = k_{yj} = k$ ($j = 1, 2$). В силу малости V_y , Ω_z и Δ при анализе уравнений заноса аппарата будем пренебрегать членами, имеющими второй и более высокие порядки малости по этим величинам.

3. Упрощение уравнений движения

Система, получаемая из (1), (4), (5) или (1), (5), (7) путём исключения моментов M_{zj} , может быть упрощена с применением асимптотических методов разделения движений по аналогии с тем, как это делалось в [3, 5, 6, 10]. Проведём её нормализацию [3, 10], заменив переменные и время их безразмерными аналогами:

$$\begin{aligned}
T &= T_*t, \quad \Delta = \Delta_*\delta, \quad V_x = V_{x*}v_x, \quad V_y = V_{y*}v_y, \\
\Omega_z &= \Omega_{z*}\omega_z, \quad \Omega_j = \Omega_{j*}\omega_j, \\
N_j &= N_{j*}n_j, \quad P_{xj} = P_{xj*}p_{xj}, \quad P_{yj} = P_{yj*}p_{yj}, \\
M_{Sj} &= M_{Sj*}m_{Sj}, \quad U_{xj} = U_{xj*}u_{xj}, \quad U_{yj} = U_{yj*}u_{yj} \quad (j = 1, 2), \\
V_{x*} &= \Omega_{j*}R = U_{xj*} = \sqrt{g(A+B)}, \quad V_{y*} = \Omega_{z*}(A+B) = U_{yj*} = V_{x*}\Delta_*, \\
P_{xj*} &= P_{yj*} = N_{j*} = Mg, \quad M_{Sj*} = \frac{Mgr^2}{A+B}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Нижним индексом * обозначены характерные значения соответствующих постоянных и переменных величин на классе движения, определяемом условиями (2), (3), (6), в соответствии с которыми

$$\frac{m}{M} = \mu \ll 1, \quad \Delta_* = \varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{r}{R} \ll 1. \tag{9}$$

Будем рассматривать μ , ε и ε_1 в качестве малых параметров, ограничившись случаем выполнения неравенства

$$0 < \mu \ll \varepsilon. \tag{10}$$

Соотношение между ε и ε_1 будет обсуждаться в разделе 6.

При выполнении двух первых условий (9) составляющие движения аппарата развиваются в сильно разнесённых временных масштабах. Их оценки служат следующие величины: $T_1 = V_{x*}/g$ — постоянная времени изменения продольной (путевой) скорости корпуса аппарата V_x под действием сил порядка его веса; $T_2 = \varepsilon V_{x*}/g$ — постоянная времени изменения поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата V_y и Ω_z ; $T_3 = \mu\rho^2 V_{x*}/(R^2g)$ — постоянная времени изменения угловых скоростей Ω_ν вращения незаблокированных и непробуксовывающих колёс вокруг оси $A_\nu y_\nu$ (см. рис. 1). В соответствии с (10) справедливы неравенства

$$T_1 \gg T_2 \gg T_3. \tag{11}$$

Рассматривая движение аппарата на характерных временах $T \sim T_2$, примем $T_* = T_2$. Нормализованным аналогом (1) после учёта упрощающих предположений служит сингулярно возмущённая система [2, 3, 10]

$$\begin{aligned}
v'_x &= \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2}), \quad v'_y = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x \omega_z, \\
\omega'_z &= \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} + \frac{1}{i_z^2}\varepsilon_1^2 c^2(m_{S1} + m_{S2}), \quad \mu_1 \omega'_\nu = -\frac{1}{i_z^2}p_{x\nu}, \\
a &= \frac{A}{A+B}, \quad b = \frac{B}{A+B}, \quad h = \frac{H}{A+B}, \quad c = \frac{R}{A+B}, \\
i &= \frac{\rho}{R}, \quad i_z = \frac{\rho_z}{A+B}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Формулы (4), (5), выражения для нормальных реакций и выражения (7) принимают вид

$$p_{xj} = -kn_j \frac{u_{xj}}{\sqrt{u_{xj}^2 + (\varepsilon u_{yj})^2}}, \quad p_{yj} = -kn_j \frac{\varepsilon u_{yj}}{\sqrt{u_{xj}^2 + (\varepsilon u_{yj})^2}} \quad (j = 1, 2), \quad (13)$$

$$u_{xj} = v_x - \omega_j, \quad u_{y1} = -v_x \delta + v_y + \omega_z a, \quad u_{y2} = v_y - \omega_z b, \quad (14)$$

$$n_1 = b - (p_{x1} - \varepsilon p_{y1} \delta + p_{x2}) h, \quad n_2 = 1 - n_1,$$

$$p_{xj} = -kn_j \frac{u_{xj}}{\sqrt{u_{xj}^2 + (\varepsilon u_{yj})^2 + \varepsilon \varepsilon_1 c \beta |\omega_z|}},$$

$$p_{yj} = -kn_j \frac{\varepsilon u_{yj}}{\sqrt{u_{xj}^2 + (\varepsilon u_{yj})^2 + \varepsilon \varepsilon_1 c \beta |\omega_z|}}, \quad (15)$$

$$m_{Sj} = -\gamma kn_j \frac{\varepsilon \omega_z}{\alpha \sqrt{u_{xj}^2 + (\varepsilon u_{yj})^2 + \varepsilon \varepsilon_1 c \beta |\omega_z|}} \quad (j = 1, 2).$$

Штрихом обозначены производные по безразмерному времени t .

Выражения для касательных составляющих контактных сил на заблокированном или пробуксовывающем l -м колесе получаются из соответствующих выражений (13)–(15) при значениях $j = l$ и $\omega_l = 0$ или $\omega_l = \omega_l^0 = \Omega_l^0 R / V_{x*}$ соответственно.

Для движений со скольжением колёс аппарата относительно опорной плоскости нормализованные величины составляющих контактных сил и моментов вращения могут изменяться от нулевых значений до значений порядка единицы.

В безразмерных переменных ограничения (3) значений $|V_y|$, $|\Omega_z|$, $|\Delta|$ принимают форму

$$|v_y| \sim |\omega_z| \lesssim v_x |\delta|, \quad |\delta| \lesssim 1. \quad (16)$$

4. Занос аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колёсами. Модель кулонова трения

Положив в системе (12) для $l = 1$, $\nu = 2$ и $m_{Sj} = 0$ ($j = 1, 2$) параметр μ_1 равным 0 и считая остальные параметры конечными, получим вырожденную систему уравнений

$$v'_x = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1} \delta), \quad v'_y = \varepsilon p_{x1} \delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x \omega_z,$$

$$\omega'_z = \frac{a}{i_z^2} (\varepsilon p_{x1} \delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2} p_{y2}, \quad p_{x2} = 0. \quad (17)$$

Составляющие контактных сил вычисляются из выражений (13), (14). На основании первого выражения (14) для $j = 2$ последнее конечное уравнение системы (17) имеет изолированный корень

$$\omega_2 = v_x, \quad (18)$$

отвечающий условию $u_{x2} = 0$ непроскальзывания заднего колеса велосипедной модели аппарата в направлении продольной оси A_2x_2 . Для доказательства близости решений исходной и вырожденной систем воспользуемся теорией Тихонова—Васильевой [2, 3, 10]. Одним из основных условий, обеспечивающих притяжение траекторий исходной системы к многообразию, на котором развиваются медленные движения согласно соответствующей вырожденной системе, служит затухание быстрых движений. Для проверки этого условия требуется исследовать изолированность, асимптотическую устойчивость по первому приближению и область влияния точек покоя присоединённой системы, которая получается из (12)—(14) после замены времени $\tau = t/\mu_1$ и последующего приравнивания слагаемых порядка μ_1 нулю. Присоединённая система, которая в данном случае сводится к одному скалярному уравнению, имеет вид

$$\frac{d\omega_2}{d\tau} = -\frac{1}{i^2}p_{x2} = \frac{1}{i^2}kn_2 \frac{v_x - \omega_2}{\sqrt{(v_x - \omega_2)^2 + (\varepsilon(v_y - \omega_2 b))^2}}. \quad (19)$$

Здесь медленные по сравнению с ω_2 переменные v_x , v_y , ω_z считаются постоянными. Проведя линеаризацию уравнения (19) около положения равновесия (18), получим уравнение

$$\frac{d\Delta\omega_2}{d\tau} = -\frac{1}{i^2}kn_2 \frac{\Delta\omega_2}{|\varepsilon(v_y - \omega_2 b)|};$$

где $\Delta\omega_2 = \omega_2 - v_x$ — малое отклонение переменной ω_2 от положения равновесия. В соответствии с условием $n_2 > 0$ множитель при переменной $\Delta\omega_2$ при значениях $v_y \neq \omega_2 b$ отрицателен, т. е. положение равновесия (18) асимптотически устойчиво по первому приближению.

Выясним область влияния положения равновесия (18), образованную совокупностью начальных значений $\omega_2(0)$ переменной ω_2 , для которых решение $\omega_2(\tau)$ уравнения (19) стремится к этому положению равновесия при $\tau \rightarrow \infty$. Поскольку уравнение (19) является скалярным, оно допускает качественное исследование методами [2, с. 26, 27]. Положению равновесия (18) на плоскости τ , ω_2 отвечает горизонтальная прямая. При значениях начальных условий $\omega_2(0) < v_x$ правая часть уравнения (19) положительна, следовательно, переменная ω_2 возрастает; при значениях $\omega_2(0) > v_x$ правая часть уравнения (19) отрицательна, т. е. переменная ω_2 убывает. Согласно теореме существования и единственности кривая $\omega_2(\tau)$ не может пересечь прямую (18), следовательно, решение уравнения (19) асимптотически приближается к положению равновесия. Тем самым область влияния положения равновесия (18) неограниченная.

В соответствии с теоремой Васильевой [2, 3, 10] рассогласование между решениями исходной системы (12)—(14) и соответствующей вырожденной системы (13), (14), (17) оценивается величиной $O(\mu_1)$ на конечном интервале времени $t \sim 1$, отвечающем интервалу $T \sim T_2$ размерного времени T . Для быстрой переменной ω_2 эта оценка верна вне пограничного слоя ширины $O(-\mu_1 \ln \mu_1)$.

Рассмотрим систему (17). В соответствии с (13), (14) при выполнении равенства (18) нормализованное значение p_{y2} поперечной составляющей контактной

силы на заднем колесе велосипедной модели аппарата, имеющее порядок $O(\varepsilon)$ при $u_{x2} \neq 0$, делается величиной $O(1)$, т. е. существенно превышает остальные слагаемые во втором и третьем уравнениях. Быстрые переменные v_y, ω_z , изменяющиеся на интервале времени $t \sim 1$, могут быть приближённо исследованы независимо от медленной переменной v_x , изменяющейся на интервале времени $t \sim 1/\varepsilon$ ($T \sim T_1$), при помощи метода фазовой плоскости. Разделив второе уравнение системы (17) на третье, положив $\varepsilon = 0$ и учитывая (13), для случая $u_{y2} \neq 0$ будем иметь

$$\frac{dv_y}{d\omega_z} = \frac{-kn_2 \operatorname{sgn}(v_y - \omega_z b)}{(b/i_z^2)kn_2 \operatorname{sgn}(v_y - \omega_z b)} = -\frac{i_z^2}{b}. \quad (20)$$

На основании теоремы Пуанкаре о малом параметре [3, 10] полученные уравнения позволяют отыскать зависимость между переменными ω_z, v_y системы (17) с погрешностью $O(\varepsilon)$ на интервале времени $t \sim 1$. Из последнего равенства (20) после интегрирования вытекает уравнение, описывающее эту зависимость:

$$v_y = -\frac{i_z^2}{b}\omega_z + C_1, \quad (21)$$

где постоянная C_1 определяется начальными значениями переменных ω_z, v_y . Траектории (21) на фазовой плоскости ω_z, v_y и направления движения по ним, которые могут быть найдены из второго или третьего уравнений (17) в пренебрежении членами порядка ε , показаны на рис. 2.

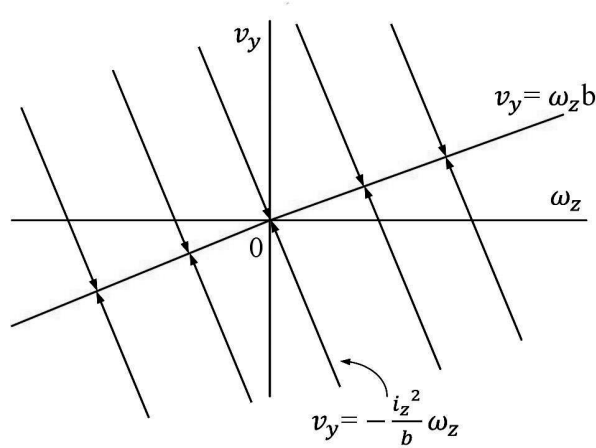


Рис. 2. Приближённый вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колёсами для модели кулонова трения

Прямая, определяемая уравнением

$$v_y = \omega_z b, \quad (22)$$

отвечает разрыву правой части первого равенства (20). Переход на эту прямую по прямым (21) происходит быстро, на временах $t \sim 1$ изменения переменных ω_z, v_y . В соответствии с выражением для переменной u_{y2} из (14)) уравнение (22) отвечает условию непроскальзывания заднего колеса велосипедной модели аппарата в поперечном направлении $A_2 y_2$ к его плоскости. Доопределение решения уравнения (20) на этой прямой может быть проведено с использованием методики исследования дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями [4].

Проведённый анализ показал, что в рамках рассматриваемой постановки задачи поворот передних колёс не влияет на занос обеих осей аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колёсами. При любых начальных условиях по переменным v_y, ω_z, ω_2 на временах $t \sim 1$ ($T \sim T_2$) аппарат входит в режим непроскальзывания задних колёс (в продольном и поперечном направлениях). Дальнейшее движение аппарата развивается по сценариям заноса при блокировке или пробуксовке передних колёс при непроскальзывающих задних колёсах [3, 5, 6].

5. Занос аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колёсами. Модель кулонова трения

Анализ систем для случаев блокировки или пробуксовки задних колёс проводится по аналогии с тем, как это делалось в разделе 4. Приближённой моделью системы (12)–(14) для $l = 2, \nu = 1$ служит система (17), последнее уравнение которой следует заменить уравнением

$$p_{x1} = 0. \quad (23)$$

Зависимость между переменными ω_z, v_y этой системы при $u_{y1} \neq 0$ приближённо описывается дифференциальным уравнением, определяемым аналогом последнего равенства (20), решение которого имеет вид (21):

$$v_y = \frac{i_z^2}{a} \omega_z + C_2, \quad C_2 = \text{const}. \quad (24)$$

Уравнение

$$v_y = v_x \delta - \omega_z a \quad (25)$$

определяет прямую разрыва правой части этого дифференциального уравнения на фазовой плоскости ω_z, v_y . Переход на указанную прямую по прямым (24) происходит быстро, на временах $t \sim 1$ изменения переменных ω_z, v_y . Медленная переменная v_x полагается постоянной, равной своему начальному значению.

Как и в предыдущем случае блокировки или пробуксовки передних колёс, согласно рассматриваемой модели заноса обеих осей аппарата при любых начальных условиях по переменным v_y, ω_z, ω_1 на временах $t \sim 1$ ($T \sim T_2$) аппарат входит в режим непроскальзывания незаблокированных (непробуксовывающих) колёс (в продольном и поперечном направлениях), в данном случае — передних. После того как передние колёса обретают сцепление с опорной плоскостью, движение аппарата развивается по сценариям заноса с заблокированными или пробуксовывающими задними колёсами при непроскальзывающих передних колёсах [3, 5, 6].

В соответствии с рекомендациями по вождению автомобиля для подавления заноса передние колёса аппарата следует поворачивать в сторону заноса его задней оси, что отвечает выполнению условия

$$\text{sgn } \omega_z = -\text{sgn } \delta. \tag{26}$$

Обсудим возможность реализации этого условия в рамках построенной модели заноса обеих осей аппарата. На рис. 3 показана прямая (25) для значения $\delta = 0$ и симметрично расположенные относительно неё прямые (25), отвечающие одной и той же величине и разным знакам угла δ . При выборе любой из перечисленных прямых движение по фазовым траекториям (24) происходит по направлению к ней.

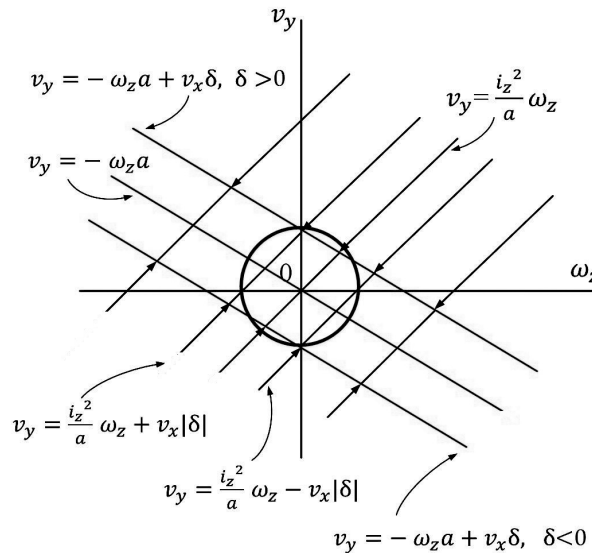


Рис. 3. Приближённый вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колёсами при фиксированном значении δ для модели кулонова трения с учётом области применимости

Область применимости построенной модели, определяемая ограничениями (16) (она находится внутри и в небольшой внешней окрестности круга на рис. 3), практически полностью содержится в полосе

$$\frac{i_z^2}{a}\omega_z - v_x|\delta| < v_y < \frac{i_z^2}{a}\omega_z + v_x|\delta|, \quad (27)$$

где условие (26) не может быть выполнено во всех точках в ходе движения к прямой (25). Например, задав начальные условия в первом квадранте фазовой плоскости ω_z , v_y , в соответствии с (26) следует принять $\delta < 0$. Двигаясь по прямой (24) к прямой (25), отвечающей этому значению δ , изображающая точка фазовой плоскости попадёт в третий квадрант, где условие (26) перестаёт быть справедливым. Таким образом, занос аппарата в целом будет минимальным в случае $\delta = 0$. Если начальные значения переменных ω_z , v_y отвечают выполнению условия $C_2 = 0$, то занос аппарата будет полностью прекращён на временах $t \sim 1$.

6. Занос аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колёсами. Модель трения В. Ф. Журавлёва

Положив в системе (12) для $l = 1$ и $\nu = 2$ значение μ_1 равным 0 и считая остальные параметры конечными, переходим к вырожденной системе уравнений, которая получается из (17)) заменой третьего уравнения уравнением

$$\omega'_z = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} + \frac{1}{i_z^2}\varepsilon_1^2 c^2(m_{S1} + m_{S2}). \quad (28)$$

Касательные и нормальные составляющие контактных сил и моменты верчения задаются выражениями (14), (15).

Погрешность $O(\mu_1)$ равенства (18), справедливая на интервале времени $t \sim 1$ ($T \sim T_2$) вне пограничного слоя ширины $O(-\mu_1 \ln \mu_1)$, доказывается по аналогии с тем, как это делалось в разделе 4. Как и в разделах 4, 5, полученная система позволяет приближённо исследовать быстрые переменные ω_z , v_y независимо от медленной переменной v_x с использованием метода фазовой плоскости. Рассмотрим случай выполнения неравенства

$$\varepsilon \ll \varepsilon_1^2. \quad (29)$$

Пренебрегая в вырожденной системе малым параметром ε и считая параметр ε_1 конечным, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} v_x &= \text{const}, & v'_y &= -kn_2 \frac{v_y - \omega_z b}{|v_y - \omega_z b| + \varepsilon_1 c \beta |\omega_z|}, \\ \omega'_z &= \frac{b}{i_z^2} kn_2 \frac{v_y - \omega_z b}{|v_y - \omega_z b| + \varepsilon_1 c \beta |\omega_z|} - \frac{1}{i_z^2} \gamma kn_2 \frac{\varepsilon_1^2 c^2 \omega_z}{\alpha |v_y - \omega_z b| + \varepsilon_1 c |\omega_z|}. \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно теореме Пуанкаре о малом параметре [3, 10] система (30) описывает решение вырожденной системы с погрешностью $O(\varepsilon)$ на интервале времени $t \sim 1$.

Если принять $\varepsilon_1 = 0$, т. е. считать радиус области контакта колеса с опорной плоскостью пренебрежимо малым ($r = 0$), то результат исследования системы (30) совпадает с результатом исследования равенств (20), составленных для случая традиционной модели кулонова трения.

Рассмотрим случай $\varepsilon_1 \neq 0$, который соответствует конечному значению радиуса области контакта колёс аппарата с опорной плоскостью ($r \neq 0$), и построим фазовый портрет системы (30) на плоскости ω_z, v_y с помощью метода изоклин. На прямой (22) правая часть первого дифференциального уравнения системы (30) обращается в нуль, следовательно, фазовые траектории на этой прямой имеют горизонтальные касательные. Изменение переменной ω_z здесь определяется моментом вращения, который принимает максимально возможные значения $O(\varepsilon_1)$. Уравнение кривой, на которой касательные к фазовым траекториям вертикальны, определяется путём приравнивания нулю правой части второго дифференциального уравнения системы (30). Если пренебречь членами $O(\varepsilon_1^3)$, указанное уравнение имеет вид

$$v_y = \omega_z b \left(1 + \frac{\varepsilon_1^2 c^2 \beta \gamma}{b^2} \right). \quad (31)$$

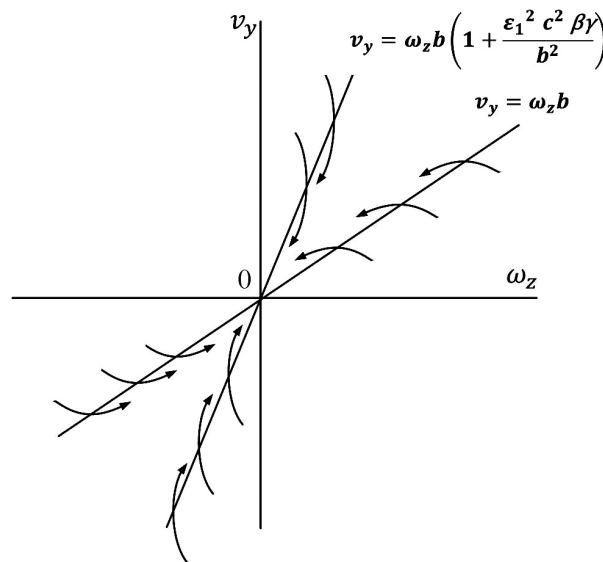


Рис. 4. Приближённый вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колёсами в случае заноса обеих осей для модели трения В. Ф. Журавлёва

Анализ фазового портрета системы (30) (рис. 4) показывает, что в случае заноса обеих осей аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колёсами, как и для модели кулонова трения, угол поворота передних колёс не влияет на занос аппарата.

Для любых начальных условий по переменным v_y , ω_z , отвечающих условию (16), имеем $v_y \rightarrow 0$, $\omega_z \rightarrow 0$. Тогда в соответствии с (14) получаем $u_{y2} \rightarrow 0$, т. е. на временах $t \sim 1$ ($T \sim T_2$) аппарат входит в режим непроскальзывания задних колёс (в продольном и поперечном направлениях) и его занос полностью прекращается. Таким образом, в рамках модели сухого трения В. Ф. Журавлёва, учитывающей верчение в области контакта колёс с опорной плоскостью, занос аппарата уменьшается скорее, чем для модели кулонова трения, которая учитывает только возможность скольжения колёс.

7. Занос аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колёсами. Модель трения В. Ф. Журавлёва

Для случая блокировки (пробуксовки) задних колёс аналог вырожденной для (12), (14), (15) по μ_1 системы, отвечающей значениям $l = 2$ и $\nu = 1$, получается из системы (17) заменой третьего и четвертого уравнений уравнениями (23) и (28). Как и в разделе 6, будем считать выполненным условие (29). Пренебрегая в полученной системе малым параметром ε и считая параметр ε_1 конечным, приходим к системе уравнений вида (30):

$$v_x = \text{const}, \quad v'_y = -kn_1 \frac{-v_x\delta + v_y + \omega_z a}{|-v_x\delta + v_y + \omega_z a| + \varepsilon_1 c\beta|\omega_z|}, \quad (32)$$

$$\omega'_z = -\frac{a}{i_z^2} kn_1 \frac{-v_x\delta + v_y + \omega_z a}{|-v_x\delta + v_y + \omega_z a| + \varepsilon_1 c\beta|\omega_z|} - \frac{1}{i_z^2} \gamma kn_1 \frac{\varepsilon_1^2 c^2 \omega_z}{\alpha |-v_x\delta + v_y + \omega_z a| + \varepsilon_1 c|\omega_z|}.$$

При $\varepsilon_1 = 0$ ($r = 0$) результат исследования системы (32) совпадает с результатом исследования вырожденной системы из раздела 5.

Рассмотрим случай $\varepsilon_1 \neq 0$ ($r \neq 0$) и построим фазовый портрет системы (32) на плоскости ω_z , v_y . На прямой (25), отвечающей условию непроскальзывания переднего колеса велосипедной модели в поперечном направлении, касательные к фазовым траекториям горизонтальны. Если пренебречь членами $O(\varepsilon_1^3)$, уравнение кривой, на которой касательные к фазовым траекториям вертикальны, имеет вид

$$v_y = -\omega_z a \left(1 + \frac{\varepsilon_1^2 c^2 \beta \gamma}{a^2} \right) + v_x \delta. \quad (33)$$

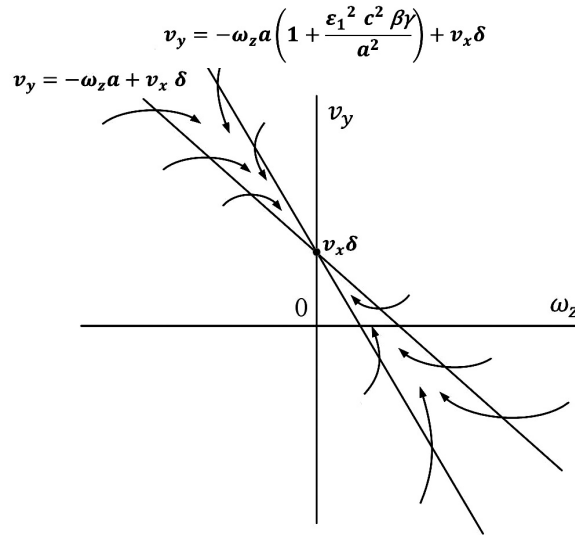


Рис. 5. Приближённый вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колёсами при фиксированном значении $\delta > 0$ для модели трения В. Ф. Журавлёва

Фазовый портрет системы (32) для случая $\delta > 0$ ($\Delta > 0$) показан на рис. 5, фазовый портрет для $\delta < 0$ ($\Delta < 0$) получается из указанного фазового портрета путём параллельного переноса прямых (25), (33) на $2v_x|\delta|$ вниз вдоль оси v_y . Анализ фазовых портретов показывает, что в случае заноса обеих осей аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колёсами, как и для модели кулонова трения, угол поворота передних колёс влияет на занос аппарата. Для любых начальных условий по переменным v_y , ω_z , отвечающих условию (16), имеем $v_y \rightarrow v_x\delta$, $\omega_z \rightarrow 0$. Тогда из (14) получаем $u_{y1} \rightarrow 0$. Тем самым на временах $t \sim 1$ ($T \sim T_2$) аппарат входит в режим непроскальзывания незаблокированных (непробуксовывающих) колёс (в продольном и поперечном направлениях), в данном случае — передних, угловая скорость его корпуса будет полностью погашена, и в случае $\delta \neq 0$ начнется движение, при котором будет происходить преимущественно смещение его центра масс в поперечном направлении. При $\delta = 0$ занос аппарата на временах $t \sim 1$ полностью прекратится.

В рамках модели кулонова трения в момент, когда передние колёса аппарата обретают сцепление с опорной плоскостью, угловая скорость корпуса в общем случае принимает ненулевые значения. Следовательно, для модели трения В. Ф. Журавлёва занос аппарата в целом уменьшается скорее, чем для модели кулонова трения.

Литература

- [1] Андронов В. В., Журавлёв В. Ф. Сухое трение в задачах механики. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010.
- [2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
- [3] Влахова А. В. Математические модели движения колёсных аппаратов. — Ижевск: Ижевский ин-т компьютерных исследований, 2014.
- [4] Влахова А. В., Новожилов И. В. Разделение движений в системах с разрывными правыми частями // Проблемы механики. К 90-летию акад. А. Ю. Ишлинского. — М.: Физматлит, 2003. — С. 187—195.
- [5] Влахова А. В., Новожилов И. В. О заносе колёсного экипажа при «блокировке» и «пробуксовке» одного из колёс // Фундамент. и прикл. матем. — 2005. — Т. 11, вып. 7. — С. 11—20.
- [6] Влахова А. В., Новожилов И. В., Смирнов И. А. Математическое моделирование заноса автомобиля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2007. — № 6. — С. 44—50.
- [7] Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. — М.: Мир, 1989.
- [8] Журавлёв В. Ф., Климов Д. М., Плотников П. К. Новая модель шимми // Изв. РАН. МТТ. — 2013. — № 5. — С. 13—23.
- [9] Кручинин П. А. Сухое трение в модели качения деформируемого колеса // Сб. научно-методических статей. Вып. 30. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2018.
- [10] Новожилов И. В. Фракционный анализ. — М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1995.
- [11] Pacejka H. B. Tyre and Vehicle Dynamics. — Warrendale: Soc. Automotive Eng., 2005.