Гарантирующий подход для определения оптимального плана калибровки блока ньютонометров*

А. А. ГОЛОВАН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: aagolovan@yandex.ru

А. И. МАТАСОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: alexander.matasov@gmail.com

УДК 531.01+629.7.05

Ключевые слова: блок ньютонометров, калибровка, гарантирующий подход.

Аннотация

Рассматривается задача стендовой калибровки блока ньютонометров на высокоточном стенде. Кроме инструментальных ошибок собственно блока ньютонометров, принимаются в расчёт и возможные погрешности стенда (накапливающиеся в процессе его эксплуатации). Одна из главных проблем калибровки состоит в выборе оптимального плана угловых положений блока. Для выбора этого плана предлагается использовать гарантирующий подход.

Abstract

A. A. Golovan, A. I. Matasov, Guaranteed approach for determining the optimal design of accelerometer unit calibration, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 2, pp. 133—145.

The calibration problem is considered for the accelerometer unit at a high-precision test bench. Besides instrumental errors of the accelerometer unit itself, possible faults of the test bench (which are accumulated during its operation) are taken into account. One of the main problems is to choose the optimal design of the angular positions of the unit. The guaranteed approach is proposed to determine this optimal design.

1. Введение

Известно, что блок ньютонометров бесплатформенной инерциальной навигационной системы необходимо калибровать [2—9, 11, 12, 14, 15]. Погрешности самого блока определяются ошибками масштабных коэффициентов, перекосами

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00054-а).

Фундаментальная и прикладная математика, 2018, том 22, № 2, с. 133—145.

осей чувствительности ньютонометров и систематическими смещениями нулей. Однако, кроме указанных погрешностей, у высокоточных стендов в процессе функционирования могут возникать дефекты, связанные с перекосом осей вращения и систематическими ошибками измерения углов поворотов вокруг осей. Примерами таких стендов могут быть стенды фирмы «Acutronic» [16]. Тогда, кроме решения собственно задачи калибровки, нужно решать задачу функциональной диагностики стенда. Это делает размерность вектора состояния высокой.

При больших размерностях инженерная интуиция может подвести. Поэтому нужно разработать математическую постановку задачи калибровки для номинально высокоточных стендов с учётом указанных особенностей. В работе предлагается сделать это при помощи гарантирующего подхода. Он позволяет наиболее просто определить оптимальные угловые положения блока на высокоточном стенде, построить оптимальные алгоритмы калибровки и определить предельно достижимые точности оценивания искомых параметров.

Основным результатом данной работы является оптимальный план калибровочных экспериментов. Кроме того, по оценкам параметров погрешностей стенда можно сделать вывод о том, необходимо ли проводить дорогостоящие регламентные работы по регулировке стенда.

2. Постановка задачи

Рассмотрим двухстепенной стенд, состоящий из основания и двух рам: внешней и внутренней.

2.1. Идеальная схема стенда

В идеале основание стенда устанавливается точно в горизонте. Внешняя ось вращения также находится в плоскости горизонта с известной азимутальной ориентаций. При нулевом угле поворота i внешней рамы относительно основания внутренняя ось вращения совпадает с географической вертикалью. Внутренняя и внешняя оси пересекаются в точке M^b и ортогональны.

С внешней рамой связывается система координат $M^b i$ так, что первая ось $M^b i_1$ совпадает с внешней осью вращения, третья ось $M^b i_3$ совпадает с внутренней осью вращения $M^b j_3$, а вторая ось $M^b i_2$ составляет с первой и третьей осями правый ортогональный трёхгранник.

С внутренней рамой связывается правый трёхгранник $M^b j$ так, что при нулевом угле поворота внутренней рамы относительно внешней рамы j он совпадает с трёхгранником $M^b i$ (а при произвольном j имеет с $M^b i$ общую ось $M^b i_3 = M^b j_3$).

На внутренней раме располагается так называемая планшайба, на которой укрепляется бесплатформенная инерциальная навигационная система с блоком акселерометров таким образом, что инструментальные оси блока ньютонометров совпадают с осями трёхгранника $M^b j$.

Устанавливая стенд в различные положения, требуется по измерениям углов (i, j) и сигналов ньютонометров определить параметры модели блока ньютонометров.

2.2. Схема стенда с учётом его погрешностей

Будем считать, что основание стенда установлено не строго в горизонте (например, вследствие «просадки» фундамента). В частности, внешняя ось не строго горизонтальна. Положим, что внешняя и внутренняя оси пересекаются в точке M^b, но не являются строго ортогональными. Введём вертикальную плоскость M^bV, проходящую через географическую вертикаль M^bZ в точке M^b и внешнюю ось вращения стенда, и вектор нормали M^bn к вертикальной плоскости M^bV (лежащей в плоскости горизонта), образующий с M^bZ и внешней осью правый (неортогональный) трёхгранник.

Предположим, что из-за неидеальности установки основания стенда угол азимутальной ориентации A вертикальной полуплоскости плоскости M^bV, содержащей внешнюю ось, относительно географического трёхгранника (отсчитываемый от направления на север по часовой стрелке, если смотреть сверху) известен с малой ошибкой ΔA. Кроме того, из-за неидеальности установки основания стенда внешняя ось вращения отклонена от плоскости горизонта на малый угол $\delta_2^{i_0}$, отсчитываемый в положительном направлении (против часовой стрелки) вокруг нормали M^bn.

С внешней рамой связывается система координат M^bi так, что первая ось M^bi_1 совпадает с внешней осью вращения, третья ось M^bi_3 лежит в плоскости, образованной внешней и внутренней осями (и почти совпадает с внутренней осью вращения), а вторая ось M^bi_2 составляет с M^bi_1 и M^bi_3 правый ортогональный трёхгранник. Из-за неидеальности установки основания стенда в горизонте ось M^bi_3 совпадает с плоскостью M^bV при неизвестном малом значении угла поворота внешней рамы относительно основания $i^* \neq 0$. Угол поворота внешней рамы (трёхгранника M^bi) относительно основания стенда i измеряется с постоянной ошибкой Δi.

С внутренней рамой свяжем систему координат M^bj следующим образом. Ось M^bj_3 совпадает с внутренней осью вращения. В плоскости, образованной внешней и внутренней осями (или, что то же самое, в плоскости, образованной осями M^bi_1, M^bi_3) повернём трёхгранник M^bi вокруг оси M^bi_2 в положительном направлении на малый угол $\delta_2^{j_0}$ так, чтобы ось M^bi_3 совпала с внутренней осью вращения M^bj_3. Таким образом, угол неортогональности внешней и внутренней осей определяется малым углом $\delta_2^{j_0}$. Тогда при нулевом угле поворота внутренней рамы относительно внешней рамы $j = 0$ новое положение оси M^bi_1 определит ось M^bj_1, которую и свяжем с внутренней рамой. Ось M^bj_2 образует с первой и третьей осями правый ортогональный трёхгранник. При произвольном значении угла j трёхгранник M^bj переходит в новое положение вместе с внутренней рамой. Угол поворота внутренней рамы (трёхгранника M^bj) относительно внешней рамы j измеряется с постоянной ошибкой Δj.

Правый ортогональный трёхгранник, связанный с планшайбой, расположенной на внутренней раме, повернут относительно $M^b j$ на малый угол вокруг некоторой неизвестной оси. В свою очередь, инструментальный трёхгранник $M^b z$, по осям которого в идеале должны располагаться оси чувствительности ньютонометров, повернут относительно осей планшайбы на ещё один малый угол вокруг ещё одной неизвестной оси. В результате ориентация инструментального трёхгранника $M^b z$ относительно трёхгранника $M^b j$ характеризуется вектором малого поворота $(\delta_1^{zj}, \delta_2^{zj}, \delta_3^{zj})^{\mathrm{T}}$.

Введём также следующие обозначения:

1) Γ_{11}, Γ_{22}, Γ_{33} — ошибки масштабных коэффициентов ньютонометров;
2) Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{21}, Γ_{23}, Γ_{31}, Γ_{32} — ошибки несоосности ньютонометров;
3) $\Delta f_{z_1}^0$, $\Delta f_{z_2}^0$, $\Delta f_{z_3}^0$ — постоянные смещения нулей ньютонометров;
4) g' — номинальное значение ускорения силы тяжести;
5) Δg — погрешность информации о значении ускорения силы тяжести.

Устанавливая стенд в различные положения, требуется по измерениям углов (i, j) и сигналов ньютонометров определить параметры модели блока ньютонометров и постоянные погрешности стенда.

После громоздких преобразований можно получить зависимости показаний блока ньютонометров от углов поворота рамок стенда. Тогда задачу калибровки можно представить в формальном виде в принятых в теории оценивания обозначениях. Именно, в итоге будем считать, что имеются три группы измерений:

$$\begin{aligned}
\overset{(1)}{z}(i,j) &= \overset{(1)}{H}{}^{\mathrm{T}}(i,j)q + \overset{(1)}{\varrho}(i,j), & \overset{(1)}{z}(i,j) &= \frac{a'_{z_1}(i,j)}{g'}, \\
\overset{(2)}{z}(i,j) &= \overset{(2)}{H}{}^{\mathrm{T}}(i,j)q + \overset{(2)}{\varrho}(i,j), & \overset{(2)}{z}(i,j) &= \frac{a'_{z_2}(i,j)}{g'}, \\
\overset{(3)}{z}(i,j) &= \overset{(3)}{H}{}^{\mathrm{T}}(i,j)q + \overset{(3)}{\varrho}(i,j), & \overset{(3)}{z}(i,j) &= \frac{a'_{z_3}(i,j)}{g'}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\{i, j\}$ — угловые параметры, принимающие значения из $[0, 2\pi]$ каждый, характеризующие угловые положения стенда;

$$\left\{\overset{(1)}{z}(i,j), \overset{(2)}{z}(i,j), \overset{(3)}{z}(i,j)\right\} —$$

нормированные разности показаний трёх ньютонометров $\{a'_{z_1}(i,j),\ a'_{z_2}(i,j),\ a'_{z_3}(i,j)\}$ и их предсказанных по измерениям углов значений;

$$\left\{\overset{(1)}{H}(i,j), \overset{(2)}{H}(i,j), \overset{(3)}{H}(i,j)\right\} —$$

известные векторы из $\mathbb{R}^m$ $(m = 15)$; $q \in \mathbb{R}^m$ — вектор неизвестных параметров, состоящий из ошибок блока;

$$\left\{\overset{(1)}{\varrho}(i,j), \overset{(2)}{\varrho}(i,j), \overset{(3)}{\varrho}(i,j)\right\} —$$

неизвестные ошибки измерений (безразмерные).

Оцениваемые параметры имеют вид

$$
\begin{array}{lll}
q_1 = \delta_2^{i_0}, & q_2 = \Delta i + i^*, & q_3 = \delta_2^{j_0}, \\
q_4 = \Gamma_{13} - \delta_2^{zj}, & q_5 = \Gamma_{11} - \dfrac{\Delta g}{g'}, & q_6 = \Gamma_{12} - \Delta j + \delta_3^{zj}, \\
q_7 = \dfrac{\Delta f_{z1}^0}{g'}, & q_8 = \Gamma_{23} + \delta_1^{zj}, & q_9 = \Gamma_{21} + \Delta j - \delta_3^{zj}, \\
q_{10} = \Gamma_{22} - \dfrac{\Delta g}{g'}, & q_{11} = \dfrac{\Delta f_{z2}^0}{g'}, & q_{12} = \Gamma_{31} + \delta_2^{zj}, \\
q_{13} = \Gamma_{32} - \delta_1^{zj}, & q_{14} = \Gamma_{33} - \dfrac{\Delta g}{g'}, & q_{15} = \dfrac{\Delta f_{z3}^0}{g'}.
\end{array} \tag{2}
$$

а векторы $\overset{(p)}{H}(i,j) \in \mathbb{R}^m$ $(m = 15)$ определяются выражениями

$$
\overset{(1)}{H}(i,j) = \begin{pmatrix} -\cos j \\ -\cos i \sin j \\ -\cos i \cos j \\ \cos i \\ \sin i \sin j \\ \sin i \cos j \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad
\overset{(2)}{H}(i,j) = \begin{pmatrix} \sin j \\ -\cos i \cos j \\ \cos i \sin j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos i \\ \sin i \sin j \\ \sin i \cos j \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad
\overset{(3)}{H}(i,j) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin i \sin j \\ \sin i \cos j \\ \cos i \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}
$$

Таким образом, уравнения (1) описывают континуум всевозможных показаний блока ньютонометров при всех его мыслимых угловых положениях. Требуется по всем измерениям $\overset{(p)}{z}(i,j)$, $p = 1,2,3$, определить все компоненты вектора параметров q.

3. Метод гарантирующего оценивания

В соответствии с гарантирующим подходом к оцениванию [1,10] будем полагать, что ошибки измерений ограничены по абсолютной величине параметром σ:

$$
\left|\overset{(1)}{\varrho}(i,j)\right| \leqslant \sigma, \quad \left|\overset{(2)}{\varrho}(i,j)\right| \leqslant \sigma, \quad \left|\overset{(3)}{\varrho}(i,j)\right| \leqslant \sigma, \quad i,j \in [0, 2\pi].
$$

Рассмотрим линейные оцениватели для $l = a^{\mathrm{T}} q$ вида

$$\hat{l} = \sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{\Phi}(i,j) \overset{(p)}{z}(i,j)\, di\, dj, \qquad (4)$$

где $\overset{(p)}{\Phi}(i,j)$ — некоторые весовые функции. Для оценки ν-й компоненты вектора неизвестных параметров q вектор $a = e^{(\nu)}$, где $e^{(\nu)} \in \mathbb{R}^m$, состоит из нулей, кроме единицы на ν-м месте.

Величина

$$\sup_{q \in \mathbb{R}^m,\ |\overset{(p)}{\varrho}(i,j)| \leqslant \sigma,\ p=1,2,3} |\hat{l} - l|$$

называется гарантированной ошибкой оценки. При выбранном оценивателе это максимальное значение ошибки оценки при всевозможных значениях неопределённых факторов. Будем искать весовые коэффициенты $\overset{(p)}{\Phi}(i,j)$, минимизирующие гарантированную ошибку оценки, т. е. из решения следующей минимаксной задачи:

$$\inf_{\overset{(p)}{\Phi}(i,j),\ p=1,2,3}\ \sup_{q \in \mathbb{R}^m,\ |\overset{(p)}{\varrho}(i,j)| \leqslant \sigma,\ p=1,2,3} |\hat{l} - l|.$$

Такая задача называется задачей оптимального гарантирующего оценивания.

Можно показать, что эта задача сводится к вариационной задаче вида

$$\inf_{\overset{(p)}{\Phi}(i,j),\ p=1,2,3} \sigma \sum_{p=1}^{3} \int \left| \overset{(p)}{\Phi}(i,j) \right| di\, dj \qquad (5)$$

при ограничениях (они называются условиями несмещённости)

$$\sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{H}(i,j) \overset{(p)}{\Phi}(i,j)\, di\, dj = a. \qquad (6)$$

Если векторы $\overset{(p)}{H}(i,j) \in \mathbb{R}^m$ непрерывны, то решение (5), (6) существует и может быть представлено обобщённой импульсной функцией с m импульсами (дельта-функциями Дирака) [1, 13]. При этом величина

$$\sigma \sum_{p=1}^{3} \int \left| \overset{(p)}{\Phi}{}^{0}(i,j) \right| di\, dj,$$

где $\overset{(p)}{\Phi}{}^{0}(i,j)$ — оптимальные весовые коэффициенты, определяет оптимальную гарантированную ошибку оценки параметра l.

Отметим также, что привлечение нелинейных оценивателей вместо (4) не уменьшит гарантированную ошибку оценки [13].

4. Аналитическое решение задачи калибровки

Используя особенности задачи калибровки, найдём её решение аналитически. Для этого заметим сначала, что при оценивании параметра q_ν соответствующая компонента вектора a (с номером ν) в условиях несмещённости (6) равна 1, а остальные компоненты a равны нулю. Рассмотрим ν-ю строку в условиях несмещённости. Поскольку все компоненты векторов $\overset{(p)}{H}(i,j)$ по модулю меньше единицы, то очевидно, что для любого оценивателя, удовлетворяющего условиям несмещённости, имеют место следующие соотношения (для любого $\nu = 1,\dots,m$):

$$\sigma = \left|\sigma \sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{H}_\nu(i,j)\,\overset{(p)}{\Phi}(i,j)\,di\,dj\right| \leqslant \sigma \sum_{p=1}^{3} \int \left|\overset{(p)}{H}_\nu(i,j)\,\overset{(p)}{\Phi}(i,j)\right| di\,dj \leqslant$$
$$\leqslant \sigma \max_p \max_{(i,j)} \left|\overset{(p)}{H}_\nu(i,j)\right| \cdot \sum_{p=1}^{3} \int \left|\overset{(p)}{\Phi}(i,j)\right| di\,dj = \sigma \sum_{p=1}^{3} \int \left|\overset{(p)}{\Phi}(i,j)\right| di\,dj. \quad (7)$$

Это означает, что оптимальная гарантированная ошибка оценки любого параметра q_ν не меньше, чем σ. Поэтому если удастся найти оценку с гарантированной точностью σ, то она оптимальна.

Исследуем формулы (3). В качестве кандидатов на оптимальные значения углов i, j можно взять такие их значения, при которых абсолютная величина соответствующего коэффициента при оцениваемом параметре максимальна. Тогда нетрудно найти следующие оцениватели для q_ν (здесь $\delta\big((i,j)-(i^0,j^0)\big)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке (i^0,j^0)):

$$\overset{(1)}{\Phi}_1(i,j) = \frac{1}{2}\left[\delta\left((i,j) - \left(-\frac{\pi}{2},\pi\right)\right) - \delta\left((i,j) - \left(\frac{\pi}{2},0\right)\right)\right],$$
$$\overset{(2)}{\Phi}_1(i,j) = \overset{(3)}{\Phi}_1(i,j) = 0,$$
$$\overset{(3)}{\Phi}_2(i,j) = \frac{1}{2}\left[\delta\left((i,j) - \left(\frac{\pi}{2},0\right)\right) - \delta\left((i,j) - \left(-\frac{\pi}{2},\pi\right)\right)\right],$$
$$\overset{(1)}{\Phi}_2(i,j) = \overset{(2)}{\Phi}_2(i,j) = 0,$$
$$\overset{(1)}{\Phi}_3(i,j) = \frac{1}{4}\big[-\delta\big((i,j)-(0,0)\big) + \delta\big((i,j)-(0,\pi)\big) +$$
$$+ \delta\big((i,j)-(\pi,0)\big) - \delta\big((i,j)-(\pi,\pi)\big)\big],$$
$$\overset{(2)}{\Phi}_3(i,j) = \overset{(3)}{\Phi}_3(i,j) = 0,$$
$$\overset{(1)}{\Phi}_4(i,j) = \frac{1}{2}\left[\delta\left((i,j) - \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right) - \delta\left((i,j) - \left(\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right],$$
$$\overset{(2)}{\Phi}_4(i,j) = \overset{(3)}{\Phi}_4(i,j) = 0,$$

$$\overset{(1)}{\Phi}_5(i,j)=\frac{1}{2}\left[\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Bigr)\biggr)-\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\Bigr)\biggr)\right],$$

$$\overset{(2)}{\Phi}_5(i,j)=\overset{(3)}{\Phi}_5(i,j)=0,$$

$$\overset{(1)}{\Phi}_6(i,j)=\frac{1}{2}\left[\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\frac{\pi}{2},0\Bigr)\biggr)-\delta\biggl((i,j)-\Bigl(-\frac{\pi}{2},0\Bigr)\biggr)\right],$$

$$\overset{(2)}{\Phi}_6(i,j)=\overset{(3)}{\Phi}_6(i,j)=0,$$

$$\overset{(1)}{\Phi}_7(i,j)=\frac{1}{2}\left[\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Bigr)\biggr)+\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\Bigr)\biggr)\right],$$

$$\overset{(2)}{\Phi}_7(i,j)=\overset{(3)}{\Phi}_7(i,j)=0,$$

$$\overset{(2)}{\Phi}_8(i,j)=\frac{1}{4}\biggl[\delta\biggl((i,j)-\Bigl(0,\frac{\pi}{2}\Bigr)\biggr)-\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\pi,-\frac{\pi}{2}\Bigr)\biggr)+$$
$$+\,\delta\biggl((i,j)-\Bigl(0,-\frac{\pi}{2}\Bigr)\biggr)-\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\pi,\frac{\pi}{2}\Bigr)\biggr)\biggr],$$

$$\overset{(1)}{\Phi}_8(i,j)=\overset{(3)}{\Phi}_8(i,j)=0,$$

$$\overset{(2)}{\Phi}_9(i,j)=\frac{1}{2}\left[\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Bigr)\biggr)-\delta\biggl((i,j)-\Bigl(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Bigr)\biggr)\right],$$

$$\overset{(1)}{\Phi}_9(i,j)=\overset{(3)}{\Phi}_9(i,j)=0,$$

$$\overset{(2)}{\Phi}_{10}(i,j)=\frac{1}{2}\left[\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\frac{\pi}{2},0\Bigr)\biggr)-\delta\biggl((i,j)-\Bigl(-\frac{\pi}{2},0\Bigr)\biggr)\right],$$

$$\overset{(1)}{\Phi}_{10}(i,j)=\overset{(3)}{\Phi}_{10}(i,j)=0,$$

$$\overset{(2)}{\Phi}_{11}(i,j)=\frac{1}{2}\left[\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\frac{\pi}{2},0\Bigr)\biggr)+\delta\biggl((i,j)-\Bigl(-\frac{\pi}{2},0\Bigr)\biggr)\right],$$

$$\overset{(1)}{\Phi}_{11}(i,j)=\overset{(3)}{\Phi}_{11}(i,j)=0,$$

$$\overset{(3)}{\Phi}_{12}(i,j)=\frac{1}{2}\left[\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Bigr)\biggr)-\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\Bigr)\biggr)\right],$$

$$\overset{(1)}{\Phi}_{12}(i,j)=\overset{(2)}{\Phi}_{12}(i,j)=0,$$

$$\overset{(3)}{\Phi}_{13}(i,j)=\frac{1}{2}\left[\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\frac{\pi}{2},0\Bigr)\biggr)-\delta\biggl((i,j)-\Bigl(\frac{\pi}{2},\pi\Bigr)\biggr)\right],$$

$$\overset{(1)}{\Phi}_{13}(i,j)=\overset{(2)}{\Phi}_{13}(i,j)=0,$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(3)}{\Phi}{}_{14}(i,j)=\frac{1}{2}\big[\delta\big((i,j)-(0,0)\big)-\delta\big((i,j)-(\pi,0)\big)\big],\\
&\overset{(1)}{\Phi}{}_{14}(i,j)=\overset{2)}{\Phi}{}_{14}(i,j)=0,\\
&\overset{(3)}{\Phi}{}_{15}(i,j)=\frac{1}{2}\big[\delta\big((i,j)-(0,0)\big)+\delta\big((i,j)-(\pi,0)\big)\big],\\
&\overset{(1)}{\Phi}{}_{15}(i,j)=\overset{(2)}{\Phi}{}_{15}(i,j)=0.
\end{aligned}
$$

Ясно, что гарантированные ошибки оценок для всех этих оценивателей равны σ. А выше было показано, что эти гарантированные значения не меньше, чем σ. Следовательно, приведённые выше оцениватели являются оптимальными.

Таким образом, применяя гарантирующий подход к оцениванию параметров (2), мы аналитически получили следующие формулы для оптимальных гарантирующих оценок и соответствующих им планов (первый аргумент в измерениях указывает значение угла i, а второй — угла j):

$$
\begin{aligned}
&\hat{q}_1=\frac{1}{2}\left[\overset{(1)}{z}\left(-\frac{\pi}{2},\pi\right)-\overset{(1)}{z}\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right],\\
&\hat{q}_2=\frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2},0\right)-\overset{(3)}{z}\left(-\frac{\pi}{2},\pi\right)\right],\\
&\hat{q}_3=\frac{1}{4}\left[-\overset{(1)}{z}(0,0)+\overset{(1)}{z}(0,\pi)+\overset{(1)}{z}(\pi,0)-\overset{(1)}{z}(\pi,\pi)\right],\\
&\hat{q}_4=\frac{1}{2}\left[\overset{(1)}{z}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)-\overset{(1)}{z}\left(\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\right],\\
&\hat{q}_5=\frac{1}{2}\left[\overset{(1)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\overset{(1)}{z}\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\right],\\
&\hat{q}_6=\frac{1}{2}\left[\overset{(1)}{z}\left(\frac{\pi}{2},0\right)-\overset{(1)}{z}\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\right],\\
&\hat{q}_7=\frac{1}{2}\left[\overset{(1)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)+\overset{(1)}{z}\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\right],\\
&\hat{q}_8=\frac{1}{4}\left[\overset{(2)}{z}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)-\overset{(2)}{z}\left(\pi,-\frac{\pi}{2}\right)+\overset{(2)}{z}\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)-\overset{(2)}{z}\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)\right],\\
&\hat{q}_9=\frac{1}{2}\left[\overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\overset{(2)}{z}\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right],\\
&\hat{q}_{10}=\frac{1}{2}\left[\overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2},0\right)-\overset{(2)}{z}\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\right],\\
&\hat{q}_{11}=\frac{1}{2}\left[\overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2},0\right)+\overset{(2)}{z}\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\right],\\
&\hat{q}_{12}=\frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_{13} &= \frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2},0\right) - \overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\right],\\
\hat{q}_{14} &= \frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}(0,0) - \overset{(3)}{z}(\pi,0)\right],\\
\hat{q}_{15} &= \frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}(0,0) + \overset{(3)}{z}(\pi,0)\right].
\end{aligned} \tag{8}
$$

В формулах (8) для оптимальных гарантирующих оценок углы в скобках определяют оптимальный план калибровки, т. е. характеризуют оптимальные положения, в которые нужно поставить стенд. Суммарные оптимальные угловые положения (их число равно $m = 15$) следующие:

$$
\left(\pm\frac{\pi}{2},\pi\right),\quad \left(\pm\frac{\pi}{2},0\right),\quad (0,0),\quad (0,\pi),\quad (\pi,0),\quad (\pi,\pi),\\
\left(0,\pm\frac{\pi}{2}\right),\quad \left(\pi,\pm\frac{\pi}{2}\right),\quad \left(\pm\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\quad \left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right).
$$

Здесь и в (8) для симметрии пишем $-\pi/2$ вместо $3\pi/2$.

4.1. Оценки перекосов

Представляют интерес оценки для перекосов осей чувствительности ньютонометров. С точностью до членов второго порядка малости они определяются следующими формулами [1]:

$$
\Gamma_{12} + \Gamma_{21} = q_6 + q_9, \quad \Gamma_{13} + \Gamma_{31} = q_4 + q_{12}, \quad \Gamma_{23} + \Gamma_{32} = q_8 + q_{13}.
$$

Можно показать, что соответствующие оптимальные (с точки зрения гарантирующего подхода) оценки имеют вид

$$
(\widehat{q_6 + q_9}) = \hat{q}_6 + \hat{q}_9, \quad (\widehat{q_4 + q_{12}}) = \hat{q}_4 + \hat{q}_{12}, \quad (\widehat{q_8 + q_{13}}) = \hat{q}_8 + \hat{q}_{13}. \tag{9}
$$

Отметим, что соотношения (9), в отличие от метода наименьших квадратов, для гарантирующего подхода в общем случае неверны. Но для рассматриваемой задачи они справедливы, хотя это не так очевидно. Докажем этот факт.

Действительно, оценке величины $q_6 + q_9$ в условиях несмещённости (6) соответствует вектор a с двумя единицами на 6-м и 9-м месте (и остальными нулями). Рассмотрим две эти строки в условиях несмещённости (с номерами 6 и 9). Сложив и вычтя их (с сохранением остальных строк (6)), получим ограничения, эквивалентные исходным условиям несмещённости (6). Согласно структуре векторов $\overset{(p)}{H}(i,j)$, определяемых формулами (3), при сложении получится вектор, у которого все компоненты по модулю меньше или равны единице. Это происходит потому, что на соответствующих местах один из складываемых элементов равен нулю. Поэтому аналогично соотношению (7) получим

$$
2\sigma \leqslant \sigma \sum_{p=1}^{3} \int \left|\overset{(p)}{\Phi}(i,j)\right| di\, dj.
$$

Следовательно, оптимальная гарантированная ошибка оценки q_6+q_9 не меньше, чем 2σ. Если показать, что гарантированная ошибка оценки $\hat{q}_6+\hat{q}_9$ не больше, чем 2σ, то это и есть оптимальная гарантированная оценка параметра q_6+q_9.

Действительно, пусть оптимальные оценки q_6 и q_9 имеют вид

$$\hat{q}_6 = \sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{\Phi}_6(i,j) \overset{(p)}{z}(i,j)\, di\, dj, \quad \hat{q}_9 = \sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{\Phi}_9(i,j) \overset{(p)}{z}(i,j)\, di\, dj$$

соответственно, где $\overset{(p)}{\Phi}_6(i,j)$ и $\overset{(p)}{\Phi}_9(i,j)$ — оптимальные несмещённые весовые функции для q_6 и q_9. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned}
&\hat{q}_6+\hat{q}_9-(e^{(6)}+e^{(9)})^{\mathrm{T}}q = \\
&= \left(\sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{\Phi}_6(i,j) \overset{(p)}{H}(i,j)\, di\, dj - e^{(6)} + \sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{\Phi}_9(i,j) \overset{(p)}{H}(i,j)\, di\, dj - e^{(9)}\right)^{\mathrm{T}} q + \\
&+ \sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{\Phi}_6(i,j) \overset{(p)}{\varrho}(i,j)\, di\, dj + \sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{\Phi}_9(i,j) \overset{(p)}{\varrho}(i,j)\, di\, dj. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Так как $\overset{(p)}{\Phi}_6(i,j)$ и $\overset{(p)}{\Phi}_9(i,j)$ — несмещённые оцениватели, то выражение в круглых скобках в (10) равно нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\sup_{q\in\mathbb{R}^m,\ |\overset{(p)}{\varrho}(i,j)|\leqslant\sigma,\ p=1,2,3} \left|\hat{q}_6+\hat{q}_9-(e^{(6)}+e^{(9)})^{\mathrm{T}}q\right| = \\
&= \sup_{|\overset{(p)}{\varrho}(i,j)|\leqslant\sigma,\ p=1,2,3} \left|\sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{\Phi}_6(i,j) \overset{(p)}{\varrho}(i,j)\, di\, dj + \sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{\Phi}_9(i,j) \overset{(p)}{\varrho}(i,j)\, di\, dj\right| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{p=1}^{3} \int \left|\overset{(p)}{\Phi}_6(i,j) \overset{(p)}{\varrho}(i,j)\right| di\, dj + \sum_{p=1}^{3} \int \left|\overset{(p)}{\Phi}_9(i,j) \overset{(p)}{\varrho}(i,j)\right| di\, dj \leqslant \\
&\leqslant \sigma \sum_{p=1}^{3} \int \left|\overset{(p)}{\Phi}_6(i,j)\right| di\, dj + \sigma \sum_{p=1}^{3} \int \left|\overset{(p)}{\Phi}_9(i,j)\right| di\, dj = 2\sigma.
\end{aligned}$$

Такие же соображения верны и для оценок остальных двух параметров из формулы (9).

5. Заключение

Работа посвящена методике применения гарантирующего подхода к калибровке блока ньютонометров БИНС. Построен оптимальный план калибровки для оценки каждого неизвестного параметра. Эту методику предполагается применить для калибровки двухосного стенда фирмы «Acutronic» [16]. Полученные результаты планируется обобщить на случай нелинейных моделей блока, когда параметры блока зависят от знака измеряемого сигнала. Ясно, что указанный подход может быть распространён и на калибровку при помощи трёхосных стендов.

Литература

[1] Акимов П. А., Деревянкин А. В., Матасов А. И. Гарантирующее оценивание и l_1-аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2012.

[2] Болотин Ю. В., Голиков В. П., Ларионов С. В., Требухов А. В. Алгоритм калибровки платформенной инерциальной навигационной системы // Гироскопия и навигация. — 2008. — № 3. — С. 13—27.

[3] Вавилова Н. Б., Парусников Н. А., Сазонов И. Ю. Калибровка бескарданных навигационных систем при помощи грубых одностепенных стендов // Соврем. пробл. матем. и мех. Прикл. исслед. — 2009. — Т. 1. — С. 212—223.

[4] Гусинский В. З., Лесючевский В. М., Литманович Ю. А., Столбов А. А. Алгоритм калибровки трёхосного блока ньютонометров, предназначенного для использования в БИНС // Гироскопия и навигация. — 2000. — № 4 (31). — С. 86.

[5] Драницына Е. В. Калибровка измерительного модуля по навигационному решению БИНС: выбор плана движений стенда // Сб. матер. XXIV Санкт-Петербург. конф. по интегрированным навигационным системам. — СПб., 2017. — С. 235—240.

[6] Егоров Ю. Г., Попов Е. А. Исследование минимально избыточных программ калибровки триады акселерометров // Авиакосмическое приборостроение. — 2016. — № 6. — С. 3—8.

[7] Емельянцев Г. И., Степанов А. П. Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации. — СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2016.

[8] Ермаков В. С., Дунаев Д. А., Широков А. А. и др. Калибровка бесплатформенных инерциальных систем навигации и ориентации // Аэрокосм. техн. Вестн. ПГТУ. — 2004. — № 18. — С. 25—30.

[9] Измайлов Е. А., Лепе С. Н., Молчанов А. В., Поликовский Е. Ф. Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Сб. матер. Юбилейной XV Санкт-Петербургской конф. по интегрированным навигационным системам. — СПб., 2008. — С. 145—154.

[10] Лидов М. Л. К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Косм. исслед. — 1964. — Т. 2, № 5. — С. 713—715.

[11] Cai Q., Yang G., Song N., Lin Y. Systematic calibration for ultra-high accuracy inertial measurement unit // Sensors. — 2016. — Vol. 16, no. 6. — P. 940.

[12] Kim M.-S., Yu S.-B., Lee K.-S. Development of high-precision calibration method for inertial measurement unit // Int. J. Precis. Eng. Manuf. — 2014. — Vol. 15, no. 3. — P. 567—575.

[13] Matasov A. I. Estimators for Uncertain Dynamic Systems. — Berlin: Springer, 2013.

[14] Panahandeh G., Skog I., Jansson M. Calibration of the accelerometer triad of an inertial measurement unit, maximum likelihood estimation and Cramer-Rao bound // Int. Conf. on Indoor Positioning and Indoor Navigation. — Zurich, 2010.

[15] Secer G., Barshan B. Improvements in deterministic error modeling and calibration of inertial sensors and magnetometers // Sensors Actuators A. — 2016. — Vol. 247. — P. 522—538.

[16] www.acutronic.com/ru/produkcija/2-osevye-stendy.html.