О свойствах реакции опорной кривой в задаче о максимизации дальности в сопротивляющейся среде

А. В. ЗАРОДНЮК
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: alenaz_90@inbox.ru

Д. И. БУГРОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: d.bugrov@mech.math.msu.su

О. Ю. ЧЕРКАСОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: oyuche@yandex.ru

УДК 531.552

Ключевые слова: задача о брахистохроне, реакция опоры, вязкое трение, оптимальное управление.

Аннотация

Рассмотрена задача о максимизации горизонтальной координаты точки и связанная с ней задача о брахистохроне. Предполагается, что материальная точка движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести и силы вязкого трения, пропорционального n-й степени скорости. Проведён анализ реакции опорной кривой вдоль экстремали. Эта реакция рассматривается в качестве управляющего воздействия. Установлено, что реакция опоры может менять знак не более одного раза и только с отрицательного значения на положительное.

Abstract

A. V. Zarodnyuk, D. I. Bugrov, O. Yu. Cherkasov, Features of the support reaction in the range maximization problem in a resistant medium, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 2, pp. 147—158.

The horizontal coordinate's maximization problem of a mass-point as well as the corresponding brachistochrone problem is considered. The mass-point is supposed to be moving in a vertical plane under the influence of gravity and viscous drag that is proportional to the nth degree of the velocity. The analysis of the reaction force, which is considered as control along the extremal curve, is provided. It is established that the reaction of the basement can change its sign no more than one time, moreover, it changes only from negative values to positive values.

Фундаментальная и прикладная математика, 2018, том 22, № 2, с. 147—158.
© 2018 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Введение

Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости в однородном поле силы тяжести и в однородной сопротивляющейся среде. Задача состоит в определении характерных свойств реакции опоры вдоль траектории, обеспечивающей максимизацию горизонтальной координаты точки при движении её из заданного начального состояния за фиксированный промежуток времени. Задача максимизации дальности связана с модифицированной задачей о брахистохроне — задаче выбора формы траектории, время движения по которой от начальной заданной точки в вертикальной плоскости до фиксированной вертикальной прямой будет минимальным [5].

Различные обобщения задачи о брахистохроне, находящие своё отражение в учебных курсах и практикумах по теории управления, имеют не только методический интерес. Задачи быстродействия и максимизации горизонтальной дальности актуальны при оптимизации траекторий летательных аппаратов, для которых можно управлять подъёмной силой без изменения силы сопротивления, при построении профиля железнодорожных сортировочных горок, выборе формы эвакуационных трапов, аттракционов типа «американские горки» и т. д. В задачах оптимизации движения после нахождения программной траектории важно определить перегрузки, действующие на движущийся объект и на находящегося на нём человека. Одной из задач пилота является управление движущимся объектом по желаемой траектории движения. Найденные перегрузки как функции времени подлежат воспроизведению на тренажёре в процессе динамической имитации движения. При активном участии пилота в управлении объектом вычислитель тренажёра, используя информацию от органов управления, интегрирует уравнения движения объекта, получая программную траекторию, и по параметрам этой траектории затем формируются управляющие сигналы на исполнительные механизмы тренажёрного стенда, воспроизводящие перегрузки [1].

Задачи о брахистохроне с сухим трением, в которых в качестве управления рассматривалась реакция опорной кривой, исследованы достаточно подробно. В [13] предполагается, что вертикальная составляющая реакции опорной кривой не меняет знак и направлена противоположно по отношению к силе тяжести, траектории выпуклы вниз. Показано, что при нулевой начальной скорости реакция опоры должна быть нулевой вначале, а затем она становится положительно-определённой функцией времени. Тот же вывод о неотрицательности реакции опоры сделан в [3] для специального класса экстремалей, таких что время достижения каждой внутренней точки траектории минимально для этой точки.

Настоящая работа посвящена аналитическому исследованию знака реакции опорной кривой вдоль экстремали для задачи максимизации горизонтальной дальности и задачи о брахистохроне в случае нелинейного вязкого сопротивления и ненулевой начальной скорости.

Постановка задачи

Рассматривается движение материальной точки массы m в вертикальной плоскости в однородном поле силы тяжести и под действием силы вязкого трения, пропорционального скорости в некоторой действительной степени n, $n > 0$.

Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид [6]

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta, \\ \dot{y} = v\sin\theta, \\ \dot{v} = -v^n - \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u - \dfrac{\cos\theta}{v}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x, y — соответственно горизонтальная и вертикальная координаты точки, v — модуль скорости (полагаем $v > 0$), θ — угол наклона траектории, $u = N/(mv)$ — управление, выражающееся через реакцию опорной кривой N. Будем считать, что ограничения на управление отсутствуют. Дифференцирование по безразмерному времени τ обозначено точкой.

Начальные и конечные условия для системы (1) имеют вид

$$\begin{gathered} x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ v(0) = V_0, \\ \theta(0),\ \theta(T),\ y(T),\ v(T) \text{ свободны}, \end{gathered} \tag{2}$$

где V_0 — модуль начальной скорости, (x_0, y_0) — начальные координаты материальной точки.

Целью управления является минимизация функционала

$$J = -x(T) \to \min_{u \in U}, \tag{3}$$

где U — множество кусочно-непрерывных функций. Другими словами, требуется максимизация горизонтальной координаты в момент окончания процесса, время T фиксировано.

Задача (1)—(3) относится к вырожденным задачам оптимального управления [4], для которых необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина выполняются тривиальным образом. Один из распространённых подходов исследования таких задач состоит в том, чтобы вырожденную задачу, нерегулярную с точки зрения общих методов, заменить регулярной задачей, решение которой содержит все элементы для последующего построения искомого решения [12].

Заметим, что управление u в явном виде входит лишь в одно уравнение системы (1), и проведём редукцию этой системы к системе третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta, \\ \dot{y} = v\sin\theta, \\ \dot{v} = -v^n - \sin\theta. \end{cases} \tag{4}$$

Цель управления (3) запишется в виде

$$J = -x(T) \to \min_{\theta \in U}, \tag{5}$$

где θ рассматривается в качестве нового управления, принадлежащего множеству U. В результате редукции произошло расширение множества функций, которому принадлежит θ, по сравнению с системой (1).

Задача (2), (4), (5) является регулярной и может быть исследована с помощью принципа максимума. После решения этой задачи экстремальное управление u задачи (1)—(3) найдётся из четвёртого уравнения системы (1).

Исследование знака реакции

Для исследования задачи (2), (4), (5) применяется принцип максимума Понтрягина [8]. Функция Понтрягина для задачи (2), (4), (5), уравнения для сопряжённых переменных и условия трансверсальности примут вид

$$H = \psi_x v \cos\theta + \psi_y v \sin\theta + \psi_v(-v^n - \sin\theta) = C, \tag{6}$$

где C — неизвестная константа,

$$\begin{cases} \dot\psi_x = 0, \\ \dot\psi_y = 0, \\ \dot\psi_v = nv^{n-1}\psi_v - \psi_x \cos\theta, \end{cases} \tag{7}$$

$$\psi_x(T) = 1, \quad \psi_y(T) = 0, \quad \psi_v(T) = 0. \tag{8}$$

Из соотношения (8) следует $\psi_x(t) = 1$, $\psi_y(t) = 0$ для любого $t \in [0, T]$.

Максимум функции H по θ находится из формул

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \iff -\psi_v \cos\theta - v \sin\theta = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} < 0 \iff \cos\theta > 0. \tag{10}$$

Следуя [5], продифференцируем (9) по времени t согласно (4) и (7). Получим

$$-\dot\psi_v \cos\theta + \dot\theta \psi_v \sin\theta - \dot v \sin\theta + \dot\theta v \cos\theta = 0.$$

Подставив выражения для $\dot v$ и $\dot\psi_v$ из (4) и (7) в предыдущее равенство, перепишем его в виде

$$-(nv^{n-1}\psi_v - \cos\theta)\cos\theta + \dot\theta\psi_v \sin\theta - (-v^n - \sin\theta)\sin\theta + \dot\theta v \cos\theta = 0.$$

Далее, используя формулу для ψ_v из (9)), получим уравнение для θ

$$\dot\theta = \frac{\cos\theta}{v}(1 + (n+1)v^n \sin\theta)$$

с соответствующим краевым условием, полученным из (8): $\theta(T) = 0$.

Итак, задача оптимального управления (2), (4), (5) сведена к краевой задаче для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{v} = -v^n - \sin\theta, & v(0) = V_0, \\ \dot{\theta} = \dfrac{\cos\theta}{v}(1 + (n+1)v^n \sin\theta), & \theta(T) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

с дополнительным условием $\cos\theta > 0$. Аналогичный приём, позволяющий свести оптимальную задачу с нелинейно входящим управлением к краевой для системы дифференциальных уравнений относительно исходных переменных и управления, использовался в [2, 9] для решения оптимальных задач навигации.

Управление, выражающееся через реакцию опорной кривой, с учётом четвёртого уравнения системы (1) запишется в виде

$$u = \dot{\theta} + \frac{\cos\theta}{v}.$$

Подставив в это соотношение выражение для $\dot{\theta}$ из (11), получим выражение управления через v и θ:

$$u(v, \theta) = \frac{\cos\theta}{v}(2 + (n+1)v^n \sin\theta).$$

Таким образом, экстремальное управление в рассматриваемой задаче найдено как функция исходных переменных, иначе говоря, построен синтез экстремального управления. В этом случае поведение экстремальных траекторий можно исследовать с помощью методов теории динамических систем. Качественный анализ экстремальных траекторий позволяет получить целостное представление о них, выявить и обосновать характерные свойства, которые другими авторами были сформулированы в виде гипотез или получены как результаты численного моделирования. Из условия стационарности функции Понтрягина на оптимальной траектории $H = C$ получаем первый интеграл системы (11)

$$H = \frac{v}{\cos\theta}(1 + v^n \sin\theta) = C.$$

Фазовый портрет системы (11) для $n = 1$ представлен на рис. 1. Точка A является точкой типа седла, а точка B — типа устойчивого дикритического узла. Сепаратрисам соответствует значение C, вычисленное из первого интеграла системы (11) для стационарного решения, соответствующего седлу. Фазовый портрет позволяет проанализировать качественные черты решения краевой задачи. Если заданное значение T достаточно велико, то оптимальная траектория складывается из трёх участков. Первый участок соответствует быстрому движению из начальной точки в окрестность седла, второй — медленному дрейфу в окрестности седла и третий — быстрому выходу из окрестности седла в конечную точку. Таким образом, седловая точка представляет собой асимптотическое магистральное решение оптимальной задачи [7]. Движение в магистральном режиме составляет основную часть оптимального процесса по длительности и по приращению функционала и определяется независимо от граничных условий.

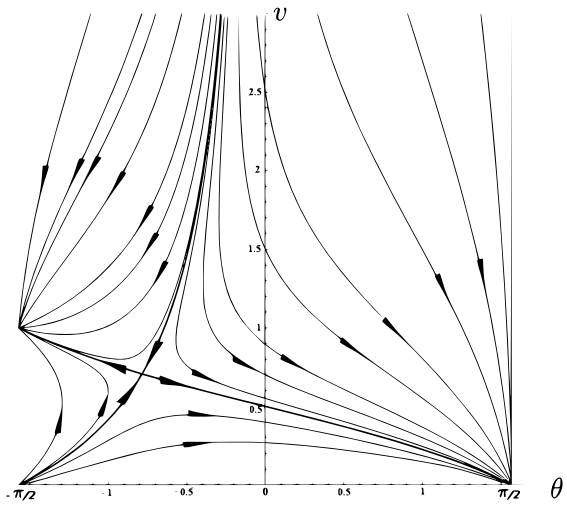

Рис. 1. Фазовый портрет системы (11) для $n = 1$

Наличие седловой точки является иллюстрацией разноустойчивости исходной и сопряжённой систем и является качественным «грубым» свойством краевых задач, к которым сводятся задачи оптимального управления, если траектория проводит избыток времени в ограниченной области подпространства состояний. При $n \neq 1$ фазовый портрет остаётся топологически эквивалентным приведённому. Затемнённая область на рис. 1 представляет собой все возможные начальные условия системы (11), удовлетворяющие краевым условиям задачи. Задание значения константы C определяет траекторию в фазовом пространстве, причём в области допустимых начальных условий на v и θ существует взаимно-однозначное соответствие между траекториями и значениями C. Иначе говоря, задавая значение C, мы фактически задаем конкретную фазовую траекторию. Заметим, что для траекторий, удовлетворяющих условиям краевой задачи, выполнено $C = v(T) > 0$.

Исследуем изменение знака нормальной составляющей реакции опоры N или, что то же самое, знака управления согласно связи $u = N/(mv)$. Найдём количество пересечений интегральной кривой системы (11) с границей областей знакопостоянства функции управления $u(v, \theta)$, что равносильно нахождению количества решений системы

$$\begin{cases} u = \dfrac{\cos\theta}{v}(2 + (n+1)v^n \sin\theta) = 0, \\ H = \dfrac{v}{\cos\theta}(1 + v^n \sin\theta) = C, \end{cases} \qquad (12)$$
$$\cos\theta > 0, \quad v > 0$$

в зависимости от параметра C.

Пусть $n \neq 1$. Выражая $\sin\theta$ из первого уравнения системы и подставляя во второе, получаем следующее уравнение:

$$P(v) = (n-1)^2 v^{2n+2} - C^2(n+1)^2 v^{2n} + 4C^2 = 0, \quad n \neq 1.$$

Принимая во внимание ограничение $\sin\theta < 1$, получаем, что функцию $P(v)$ следует рассматривать при $v \geqslant \hat{v}$, где $\hat{v} = \sqrt[n]{2/(n+1)}$.

Оценим количество корней многочлена $P(v)$. Исследуем функцию $P(v)$ на монотонность. Критические точки $P(v)$ находятся из уравнения

$$P'(v) = 2(n+1)v^{2n-2}\big((n-1)^2 v^2 - (n+1)nC^2\big) = 0.$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим условию $v > 0$, является

$$v_1 = C\sqrt{\frac{n(n+1)}{(n-1)^2}}.$$

Исследование знака производной показывает, что на интервале $(0; v_1)$ функция $P(v)$ убывает, а на множестве $(v_1; +\infty)$ возрастает, поэтому v_1 — точка минимума $P(v)$. Рассмотрим значение $P(v)$ в точке минимума, в точке $\hat{v}$ и на бесконечности:

$$P(+\infty) = +\infty > 0,$$

$$P(\hat{v}) = (n-1)^2\left(\frac{2}{n+1}\right)^{2n+2} > 0, \quad n \neq 1,$$

$$P(v_1) = C^2\left(4 - (n+1)\left(C\sqrt{\frac{n(n+1)}{(n-1)^2}}\right)^{2n}\right).$$

Получаем, что если $v_1 \leqslant \hat{v}$, то $P(v)$ везде положительна, следовательно, смены знака управления не происходит.

Если же $v_1 > \hat{v}$, то имеют место три случая:

1) $P(v_1) > 0$. Тогда $P(v) \neq 0$ при $v \in (\hat{v}, +\infty)$, корней нет, а значит, отсутствуют переключения знака управления вдоль траектории;
2) $P(v_1) = 0$. Тогда существует единственный корень. Одной и той же константе C в фазовой плоскости соответствуют две траектории, располагающиеся по разные стороны от сепаратрис и седла, но лишь одна траектория из каждой пары удовлетворяет условиям краевой задачи (11). Рассматривая взаимное расположений этих траекторий и кривой $u = 0$, получаем, что если это пересечение есть и оно единственно, то оно лежит вне затемнённой области (рис. 2), а значит, и переключений управления вдоль экстремальной траектории в этом случае тоже нет;
3) $P(v_1) < 0$. Тогда $P(v) = 0$ в двух точках и имеется два корня. В этом случае уже имеется пересечение со второй траекторией, соответствующей константе C, т. е. происходит смена знака управления при движении вдоль экстремальной траектории, причём только один раз за всё время движения. Поскольку в конечный момент времени $u(T) = 2/C > 0$, где

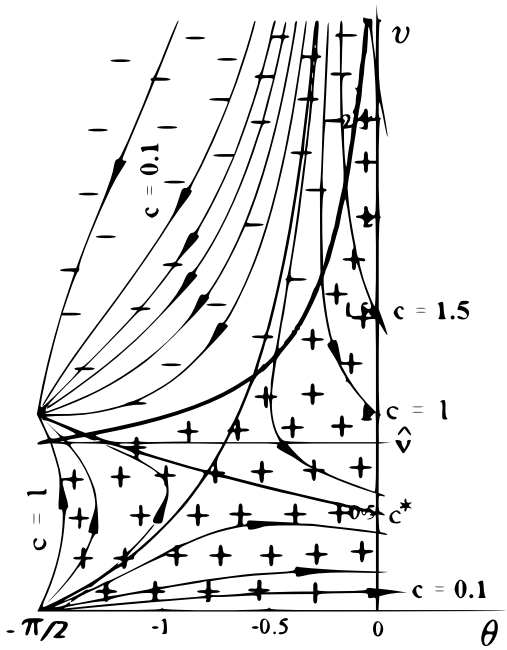

Рис. 2. Знак реакции опоры

$C = v(T)$, получаем, что в этом случае смена знака происходит с минуса на плюс.

Обозначим через $\tilde{C}$ такую C, при которой $P(v_1) = 0$, т. е.

$$\tilde{C} = \sqrt{\frac{4^{1/n}(n-1)^2}{n(n+1)^{1+1/n}}}.$$

Получаем, что для всех $C \leqslant \tilde{C}$ выполнено неравенство $P(v_1) \geqslant 0$ и переключений управления нет, а при $C > \tilde{C}$ выполнено неравенство $P(v_1) < 0$, переключений не более одного.

Обозначим теперь через C^* константу, соответствующую сепаратрисе:

$$C^* = \sqrt{\frac{n}{(n+1)^{1+1/n}}}.$$

Справедливо следующее равенство:

$$\tilde{C} = C^* \sqrt{\frac{4^{1/n}(n-1)^2}{n^2}}.$$

Чтобы понять взаимное расположение сепаратрисы и траектории, соответствующей $\tilde{C}$, сравним значения $\tilde{C}$ и C^* или, что то же самое,

$$\sqrt{\frac{4^{1/n}(n-1)^2}{n^2}} \quad \vee \quad 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \quad \vee \quad 4^{-1/n}.$$

Обозначим через $l(n)$ левую часть последнего неравенства, $l(n) \to +\infty$ при $n \to +0$ и $l(1) = 0$. Далее,

$$l'(n) = 2\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^2}.$$

Производная обращается в нуль лишь при $n = 1$, поэтому функция $l(n)$ убывает при $n \in (0;1)$ и возрастает при всех $n > 1$.

Исследуем функцию, стоящую в правой части, $r(n) = 4^{-1/n}$. Очевидно, $r(n) \to 0$ при $n \to +0$ и $r(1) = 0{,}25$. Поскольку

$$r'(n) = \frac{\ln 4}{\sqrt[n]{4}n^2} > 0$$

для всех $n > 0$, то функция $r(n)$ возрастает при всех $n > 0$. Так как на интервале $n \in (0;1)$ функция $l(n)$ убывает, а функция $r(n)$ возрастает, то существует и единственно значение $n = n^*$, такое что $l(n^*) = r(n^*)$, причём $l(n) > r(n)$ для $n < n^*$ и $l(n) < r(n)$ для всех $n^* < n < 1$. Получаем, что $\tilde{C} > C^*$ при $n < n^*$ и $\tilde{C} < C^*$ для всех $n^* < n < 1$.

Случай $n > 1$, для которого обе функции монотонно возрастают, требует отдельного рассмотрения. Для этого возведём $l(n)$ и $r(n)$ в степень $n/2$,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \quad \vee \quad \frac{1}{2},$$

и далее преобразуем к виду

$$2 \quad \vee \quad \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Воспользуемся обобщённым неравенством Бернулли для выражения, стоящего в правой части:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \geqslant 1+\frac{n}{n-1} = 2+\frac{1}{n-1} > 2.$$

Получаем, что $\tilde{C} > C^*$ для всех $n > 1$.

В итоге имеем, что при $n < n^*$ на всех фазовых экстремальных траекториях, лежащих ниже сепаратрисы, входящей в седло, переключений знака управления происходить не будет, а на тех, что располагаются выше, будет не более одного переключения, причём знак меняется с минуса на плюс. В случае $n \in (n^*;1) \cup (1;+\infty)$ на всех фазовых экстремальных траекториях, лежащих ниже траектории, соответствующей константе $\tilde{C}$, переключений знака управления происходить не будет, а на тех, что располагаются выше, как и в предыдущем случае, будет происходить не более одного переключения, также с минуса на плюс.

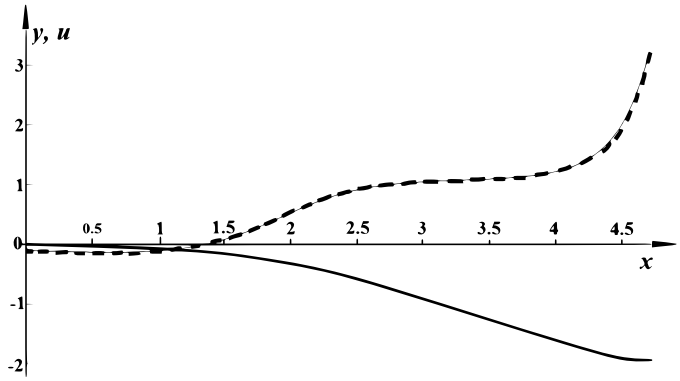

Рис. 3. Траектория движения в вертикальной плоскости (сплошная линия) и график функции управления вдоль этой траектории (пунктирная линия)

Заметим, что в точке θ^*, соответствующей значению абсциссы седла, кривая $u = 0$ лежит выше точки седла для любых допустимых n. Запишем условие $u(v, \theta) = 0$ в виде

$$v(\theta) = \left(\frac{-2}{(n+1)\sin\theta}\right)^{1/n}$$

(на решениях краевой задачи (11) выполнено $\sin\theta < 0$). Поскольку функция $v(\theta)$ монотонно возрастает и в точке $\theta = -\pi/2$ принимает значение $v = \hat{v}$, то при движении фазовой точки по любой из траекторий рассматриваемой области, лежащих ниже прямой $V_0 = \hat{v}$, переключений управления не будет и во всё время движения реакция будет положительной.

Рассмотрим отдельно случай $n = 1$. Тогда многочлен $P(v)$ примет вид

$$P(v) = 4C^2(1 - v^4).$$

Область рассмотрения функции $P(v)$ — луч $[\hat{v}; +\infty)$ — в этом случае преобразуется в луч $[1; +\infty)$ и $P(1) = 0$. Получаем, что в рассматриваемой области выполнено $P(v) \geqslant 0$, и следовательно, не происходит смены знака управления и реакции при движении по экстремальной траектории.

Результаты моделирования представлены на рис. 3 для $v(0) = 0{,}5$, $n = 2$ и $T = 5$. Прерывистой линией обозначен график функции $u(v, \theta)$ вдоль экстремальной траектории, а сплошной — сама экстремальная траектория движения в вертикальной плоскости (x, y).

Выводы

Установлено, что в случае линейного вязкого сопротивления знак реакции опоры при движении вдоль экстремальной траектории — плюс. Для нелинейного вязкого сопротивления, пропорционального скорости в некоторой степени n,

существует пороговое значение скорости, такое что если начальная скорость меньше этого значения, то знак реакции вдоль экстремальной траектории также плюс. Если начальная скорость больше порогового значения, то смена знака реакции возможна не более одного раза, при этом переключение происходит с отрицательного значения на положительное. Полученные выводы согласуются с результатами численного моделирования, представленными в [5, 11], где решались задачи максимизации дальности и минимизации времени для ненулевой начальной скорости, и с [3, 14], где начальная скорость полагалась равной нулю. Изменения реакции опоры в случае одновременного действия сухого и вязкого трения [10] представляет собой сложную задачу, которая требует дальнейшего исследования.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00538 (зависимость знака реакции опоры от закона сопротивления) и гранта РФФИ № 17-08-01366 (зависимость знака реакции опоры от скорости).

Литература

[1] Александров В. В., Воронин Л. И., Глазков Ю. Н., Ишлинский А. Ю., Садовничий В. А. Математические задачи динамической имитации аэрокосмических полетов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995.

[2] Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.

[3] Голубев Ю. Ф. Брахистохрона с трением // Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2010. — № 5. — С. 41—52.

[4] Гурман В. И., Ни Минь Кань. Вырожденные задачи оптимального управления. I // Автомат. и телемех. — 2011. — № 3. — С. 36—50.

[5] Зароднюк А. В., Черкасов О. Ю. Качественный анализ оптимальных траекторий движения материальной точки в сопротивляющейся среде и задача о брахистохроне // Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2015. — № 1. — С. 41—49.

[6] Локшин Б. Я., Черкасов О. Ю. О структуре оптимальных траекторий движения вращающегося тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1990. — № 2. — С. 63—67.

[7] Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. — Минск: Наука и техника, 1986.

[8] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983.

[9] Cherkasov O. Yu., Yakushev A. G. Singular arcs in the optimal evasion against a proportional navigation vehicle // JOTA. — 2002. — Vol. 113, no. 2. — P. 211—226.

[10] Cherkasov O. Yu, Zarodnyuk A. V. Brachistochrone problem with Coulomb friction and viscouse drag: qualitative analysis // Preprints 1st Conf. on Modelling, Identification and Control of Nonlinear System, MICNON 2015, IFAC, St. Petersburg, Russia, 24—26 June. — 2015. — P. 1018—1023.

[11] Jeremić O., Šalinić S., Obradović A., Mitrović Z. On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields // Math. Comput. Modelling. — 2011. — Vol. 54. — P. 2900—2912.

[12] Kelley H. J. A transformation approach to singular subarcs in optimal trajectory and control problems // SIAM J. Control. — 1964. — Vol. 2. — P. 234—240.

[13] Šalinić S. Contribution to the brachistochrone problem with Coulomb friction // Acta Mech. — 2009. — Vol. 208. — P. 97—115.

[14] Vratanar B., Saje. M. On the analytical solution of the brachistochrone problem in a non-conservative field // Int. J. Non-Linear Mech. — 1998. — Vol. 33. — P. 489—505.