Большие выбросы гауссовских нестационарных процессов в дискретном времени

И. А. КОЗИК
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: igor.kozik@mail.ru

В. И. ПИТЕРБАРГ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: piter@mech.math.msu.su

УДК 519.218

Ключевые слова: гауссовские процессы, большие выбросы траекторий, дискретное время, непрерывное время, дробное броуновское движение, задача о разорении.

Аннотация

Приведены точные асимптотики вероятностей высоких выбросов гауссовских процессов в дискретном времени при уменьшении шага дискретизации. Обсуждается близость полученных асимптотик к соответствующим в непрерывном времени. Приведены примеры, относящиеся к дробному броуновскому движению и задаче разорения.

Abstract

I. A. Kozik, V. I. Piterbarg, High excursions of Gaussian nonstationary processes in discrete time, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 2, pp. 159—169.

Exact asymptotic behavior is given for high excursion probabilities of Gaussian processes in discrete time as the corresponding lattice pitch unboundedly decreases. The proximity of the asymptotic behavior to that in continuous time is discussed. Examples are given related to fractional Brownian motion and the corresponding ruin problem.

1. Введение

Математические модели реальных процессов строятся, как правило, в непрерывном времени. Это позволяет применять соответствующий математический аппарат, например теорию дифференциальных уравнений, теорию случайных процессов, в том числе управляемых случайных процессов, в полном объёме. В частности, теория управления активно развивается для моделей в непрерывном времени. Однако при использовании моделей на практике неизбежно возникает вопрос об их численной реализации, что влечёт переход к дискретному времени. Немедленно возникает задача об устойчивости результатов, полученных в непрерывном времени, к дискретизации времени и о выборе оптимального шага дискретизации. В контексте объекта исследований в данной заметке упомянем работы [4, 6].

В настоящей работе исследуются асимптотики вероятностей высоких выбросов гауссовского нестационарного процесса $X(t)$, заданного на равномерной решётке $\mathcal{R}$ конечного интервала $[0, T]$ действительной прямой $\mathbb{R}$, в зависимости в том числе от шага решётки. То есть рассматривается вероятность

$$P_X(T, u, \mathcal{R}) := P\Big(\max_{t\in[0,T]\cap\mathcal{R}} X(t) > u\Big) \tag{1}$$

для различных типов поведения корреляции и дисперсии процесса X. При этом, имея в виду, что выброс траектории гауссовского процесса происходит, как правило, на единственном бесконечно уменьшающемся с ростом u интервале, предполагаем шаг решётки также стремящимся к нулю с определёнными ниже скоростями. Оказывается, что асимптотика вероятности (1) зависит как от локальных свойств процесса в окрестности точки (точек) максимума дисперсии процесса, так и от степени сгущения решётки при росте высоты выбросов.

Асимптотические методы исследования вероятностей высоких выбросов гауссовских процессов в непрерывном времени достаточно хорошо развиты (см. [8] и библиографию в этой монографии, а также [1]). Что касается соотношений этих вероятностей в дискретном и непрерывном времени, то имеется лишь работа [7], где рассмотрены стационарные гауссовские процессы.

В настоящей работе рассмотрена соответствующая задача для нестационарных гауссовских процессов, рассмотренных в [2] (см. также [1, 8]). Доказательства в основном основаны на идеях, изложенных в [1, 2, 7, 8] для непрерывного времени. Таким образом, мы изучаем вероятности высоких выбросов гауссовских процессов с единственной точкой максимума дисперсии, наблюдаемых на сгущающейся решётке.

В следующем разделе приводится основной результат работы. Затем приведены необходимые результаты для случая стационарных процессов. Заметим, что они лишь частично доказаны в [7]. В разделе 4 приведено доказательство основной теоремы. Наконец, в разделе 5 рассмотрены примеры.

2. Постановка задачи. Формулировка основного результата

Пусть $X(t)$, $t \in [0, T]$, — гауссовский процесс с нулевым средним, дисперсией $\sigma^2(t) = EX^2(t)$ и корреляционной функцией $r(s, t) = EX(s)X(t)/\sigma(s)\sigma(t)$. Предположим, что дисперсия достигает своего абсолютного максимума в единственной точке $t_0 \in [0, T]$.

Введём следующие условия на процесс $X(t)$.

E1. Существуют положительные a, β, такие что $\sigma(t) = 1 - a|t - t_0|^{\beta}\bigl(1 + o(1)\bigr)$ при $t \to t_0$.

E2. Найдётся $\alpha \in (0, 2]$, такое что $r(s, t) = 1 - |t - s|^{\alpha}\bigl(1 + o(1)\bigr)$ при $s, t \to t_0$.

E3. Существуют положительные g, G, такие что для всех s, t выполнено $E\bigl(X(t) - X(s)\bigr)^2 \leqslant G|t - s|^{g}$.

Из условия E3 следует,что существует версия процесса X с почти наверное непрерывными траекториями, которую мы и будем далее рассматривать.

Мы изучим три типа решётки

$$\mathcal{R} = \{kbu^{-2/\gamma},\ k \in \mathbb{Z}\}$$

на действительной прямой $\mathbb{R}$ при $\alpha \in (0, 2]$:

1) *плотная решётка* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathrm{d}}$, для которой $b = 1$ и $\gamma < \alpha$;
2) *решётка Пикандса* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathrm{p}}$, для которой $b > 0$ и $\gamma = \alpha$;
3) *разреженная решётка* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathrm{s}}$, для которой $b = 1$ и $\gamma > \alpha$.

Эти типы решёток иллюстрируют, как видно из формулировки основного результата, спектр различных ситуаций: густая решётка не пропускает высокие выбросы, решётка Пикандса пропускает тем меньше выбросов, чем меньше b, наконец, разреженная решётка существенно меняет асимптотику вероятности (1), т. е. пропускает высокие выбросы с вероятностью, стремящейся к единице.

Обозначим

$$H_{\alpha}^{a}(\Lambda_1, \Lambda_2) := E \exp\Bigl(\max_{t \in [-\Lambda_1, \Lambda_2]} \chi(t) - a|t|^{\alpha}\Bigr); \quad H_{\alpha}(\Lambda) := H_{\alpha}^{0}(0, \Lambda).$$

Здесь $\chi(t) = \sqrt{2}B_{\alpha/2}(t) - |t|^{\alpha}$, где $B_{\alpha/2}(t)$ — дробное броуновское движение с показателем Хёрста $\alpha/2$. Определение дробного броуновского движения приводится ниже, в п. 5.1. Известно [1], что

$$\begin{aligned} H_{\alpha} &:= \lim_{\Lambda \to \infty} \frac{H_{\alpha}(\Lambda)}{\Lambda} \in (0, \infty), \\ H_{\alpha}^{a} &:= \lim_{\Lambda \to \infty} H_{\alpha}^{a}(\Lambda, \Lambda) \in (0, \infty), \\ H_{\alpha}^{0,a} &:= \lim_{\Lambda \to \infty} H_{\alpha}^{a}(0, \Lambda) \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Введём теперь аналогичные константы для дискретного времени:

$$H_{\alpha}^{a}(\Lambda_1, \Lambda_2, b) = E \exp\Bigl(\max_{kb \in [-\Lambda_1, \Lambda_2]} \chi(kb) - a|kb|^{\alpha}\Bigr),$$

$a, b > 0$ определены выше. Также известно [7], что

$$0 < H_{\alpha,b} = \lim_{\Lambda \to \infty} H_{\alpha}^{0}(0, \Lambda, b)/\Lambda < \infty.$$

Наконец, обозначим $\Psi(u) = \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}u$ асимптотику хвоста стандартного нормального распределения, $K = \Gamma(1/\beta)/(a^{1/\beta}\beta)$.

Теорема 1. *Предположим, что дисперсия гауссовского процесса* $X(t)$, $t \in$ $\in [0,T]$, *достигает своего максимального значения в единственной внутренней точке* t_0 *отрезка* $[0,T]$. *Предположим также, что выполнены условия* E1—E3. *Пусть разреженная решётка содержит точку* t_0. *Тогда если* $t_0 \in (0,T)$ (*внутренняя точка*), *то при* $u \to \infty$ *имеют место следующие соотношения.*

(i) *Если* $\beta > \alpha$, *то для плотной решётки*

$$P_X(T,u,\mathcal{R}_\mathrm{d}) = 2KH_\alpha u^{2/\alpha-2/\beta}\Psi(u)\big(1+o(1)\big);$$

для решётки Пикандса

$$P_X(T,u,\mathcal{R}_\mathrm{p}) = 2KH_{\alpha,b}u^{2/\alpha-2/\beta}\Psi(u)\big(1+o(1)\big);$$

для разреженной решётки

$$P_X(T,u,\mathcal{R}_\mathrm{s}) = 2Ku^{2/\gamma-2/\beta}\Psi(u)\big(1+o(1)\big).$$

(ii) *Если* $\beta = \alpha$, *то для плотной решётки*

$$P_X(T,u,\mathcal{R}_\mathrm{d}) = H_\alpha^a\Psi(u)\big(1+o(1)\big);$$

для решётки Пикандса

$$P_X(T,u,\mathcal{R}_\mathrm{p}) = H_{\alpha,b}^a\Psi(u)\big(1+o(1)\big),$$

при этом

$$H_{\alpha,b}^a := \lim_{\Lambda\to\infty} H_\alpha^a(\Lambda,\Lambda,b) \in (0,\infty);$$

для разреженной решётки

$$P_X(T,u,\mathcal{R}_s) = \Psi(u)\big(1+o(1)\big).$$

(iii) *Если* $\beta < \alpha$, *то*

$$P_X(T,u,\mathcal{R}) = \Psi(u)\big(1+o(1)\big)$$

для всех решёток.

В случае когда $t_0 = 0$ *и выполнены все остальные вышеприведённые условия, асимптотические соотношения* (i) *для всех трёх решёток имеют место при делении правой части на* 2; *асимптотические соотношения* (ii) *для плотной решётки и решётки Пикандса имеют место с заменой* H_α^a *на* $H_\alpha^{0,a}$, *и* $H_{\alpha,b}^a$ *на*

$$H_{\alpha,b}^{0,a} := \lim_{\Lambda\to\infty} H_\alpha^a(0,\Lambda,b),$$

при этом $H_{\alpha,b}^{0,a} \in (0,\infty)$; *асимптотические соотношения* (iii) *и третье соотношение в* (ii) *не меняются. Эти же утверждения имеют место в случае* $t_0 = T$.

Замечание 1. При помощи стандартного анализа, пользуясь непрерывностью с вероятностью единица траекторий дробного броуновского движения, нетрудно показать, что $H_{\alpha,b} \to H_\alpha$ и $H_{\alpha,b}^a \to H_\alpha^a$ при $b \to 0$. То есть асимптотика вероятности $P\Big(\max\limits_{t\in[0,T]} X(t) > u\Big)$ хорошо аппроксимируется асимптотикой вероятности (1) при малых b. В то же время в случае $\beta > \alpha$ вероятность (1) для разреженной решётки стремится к нулю бесконечно быстрее, чем для других двух решёток. Это означает, что высокие выбросы пропускаются с вероятностью, стремящейся к единице при росте u.

Замечание 2. В случае когда разреженная решётка не содержит точку t_0, из доказательства теоремы видно, что асимптотика весьма существенно искажается, она экспоненциально быстрее стремится к нулю.

3. Стационарные гауссовские процессы

Пусть $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и единичной дисперсией, корреляционная функция которого $r(t)$ удовлетворяет условиям

$$r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha),\ t \to 0,\ \alpha > 0; \quad r(t) < 1 \text{ для всех } t > 0. \tag{2}$$

Доказательства следующих двух утверждений, которые используются в доказательстве теоремы 1, частично содержатся в [7].

Лемма 1. *Пусть для ковариационной функции $r(t)$ гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним выполнено условие* (2). *Тогда для любого $\Lambda > 0$ при $u \to \infty$ имеют место следующие соотношения: для плотной решётки*

$$P_\xi(\Lambda u^{-2/\alpha}, u, \mathcal{R}_\mathrm{d}) = H_\alpha(\Lambda)\Psi(u)\bigl(1 + o(1)\bigr);$$

для решётки Пикандса

$$P_\xi(\Lambda u^{-2/\alpha}, u, \mathcal{R}_\mathrm{p}) = H_\alpha(b, \Lambda)\Psi(u)\bigl(1 + o(1)\bigr);$$

для разреженной решётки

$$P_\xi(\Lambda u^{-2/\alpha}, u, \mathcal{R}_\mathrm{s}) = \Psi(u)\bigl(1 + o(1)\bigr).$$

Теорема 2. *Пусть для ковариационной функции $r(t)$ гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним выполнено условие* (2). *Тогда при $u \to \infty$ имеют место следующие соотношения: для плотной решётки*

$$P_\xi(T, u, \mathcal{R}_\mathrm{d}) = H_\alpha T u^{2/\alpha}\Psi(u)\bigl(1 + o(1)\bigr);$$

для решётки Пикандса

$$P_\xi(T, u, \mathcal{R}_\mathrm{p}) = H_{\alpha,b} T u^{2/\alpha}\Psi(u)\bigl(1 + o(1)\bigr);$$

для разреженной решётки

$$P_\xi(T, u, \mathcal{R}_\mathrm{s}) = T u^{2/\gamma}\Psi(u)\bigl(1 + o(1)\bigr).$$

При этом T может убывать к нулю при $u \to \infty$ таким образом, что $Tu^{2/\alpha} \to \infty$. Число T также может стремиться к бесконечности, лишь бы для него были выполнены условия теоремы и правая часть соответствующего асимптотического соотношения стремилась к нулю.

4. Доказательство теоремы 1

Доказательство в целом следует доказательству теоремы 10.1 из [1]. Для краткости обозначим через $\mathcal{R}$ нужную решётку из трёх. Замена времени $t \mapsto t - t_0$ позволяет считать, что $t_0 = 0$, при этом $t \in T := [-t_0, T - t_0]$. В связи с этим аргумент T в $P_X(T, u, \mathcal{R})$ может обозначать соответствующее множество.

Шаг 1: выделение информативного интервала. Обозначим $\delta = u^{-2/\beta} \ln^{2/\beta} u$ и $A = T \setminus [-\delta, \delta]$. Аналогично доказательству в [1] получаем, что для всех решёток

$$P_X(T, u, \mathcal{R}) = P_X([-\delta, \delta], u, \mathcal{R})\bigl(1 + o(1)\bigr) \tag{3}$$

при $u \to \infty$. В случае когда t_0 — граничная точка, вместо $[-\delta, \delta]$ берём $[0, \delta]$.

Шаг 2: анализ стандартного процесса. Рассмотрим гауссовский процесс

$$Y(t) = \frac{\xi(t)}{1 + b|t|^\beta}, \quad t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad b > 0,$$

где $\xi(t)$ — гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $r(t) = \exp(-d|t|^\alpha)$, $d > 0$. Сначала мы найдём асимптотическое поведение вероятности

$$P\Bigl(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} Y(t) > u\Bigr)$$

при $u \to \infty$ и затем, пользуясь неравенством Слепяна [1] и выбирая соответствующим образом параметры b и d, получим асимптотически близкие верхнюю и нижнюю границы для вероятности справа в (3), откуда будет следовать утверждение теоремы. В случае граничной точки максимума дисперсии вместо интервала $[-\delta, \delta]$ берётся интервал $[0, \delta]$.

1. Случай $\alpha < \beta$. Выберем $\kappa \in (\alpha, \beta)$ и обозначим $\Delta = u^{-2/\kappa}$, $\Delta_k = [k\Delta, (k+1)\Delta] \cap \mathcal{R}$. Введём события

$$A_k = \Bigl\{\max_{t \in \Delta_k} \xi(t) \geqslant u_k\Bigr\}, \quad A'_k = \Bigl\{\max_{t \in \Delta_k} \xi(t) \geqslant u'_k\Bigr\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где

$$u_k = \begin{cases} u(1 + b|(k+1)\Delta|^\beta) & \text{при } k < 0, \\ u(1 + b(k\Delta)^\beta) & \text{при } k \geqslant 0, \end{cases}$$

$$u'_k = \begin{cases} u\bigl(1 + b\bigl((k+1)\Delta\bigr)^\beta\bigr) & \text{при } k \geqslant 0, \\ u(1 + b|k\Delta|^\beta) & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

Запишем неравенство Бонферрони:

$$\sum_{-\delta/\Delta - 1 \leqslant k \leqslant \delta/\Delta} P(A_k) \geqslant P\Bigl(\max_{t \in [-\delta, \delta]} Y(t) > u\Bigr) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{-\delta/\Delta \leqslant k \leqslant \delta/\Delta - 1} P(A'_k) - \sum P(A_k A_l), \tag{4}$$

где двойная сумма берётся по всем парам непересекающихся интервалов. Для вероятностей в простых суммах вместо теоремы Пикандса [1, лекция 9] используется её аналог в дискретном времени, теорема 2. Вероятности в двойной сумме мажорируются для случаев плотной решётки и решётки Пикандса аналогичными вероятностями для интервалов $[k\Delta, (k+1)\Delta]$, это уже проделано в доказательстве теоремы 10.1 из [1], что даёт требуемый результат. Для разреженной решётки получаем

$$\begin{aligned}\Delta \sum_{0\leqslant k\leqslant \delta/\Delta} u_k^{2/\gamma}\Psi(u_k) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2} u^{2/\gamma-2/\beta} \times \\ &\times \Delta_1 \sum_{0\leqslant k\leqslant \delta/\Delta} (1+bu^{-2}(k\Delta_1)^{\beta})^{2/\gamma-1} \exp\left(-b(k\Delta_1)^{\beta} - \frac{1}{2}b^2u^{-2}(k\Delta_1)^{2\beta}\right),\end{aligned}$$

где $\Delta_1 = u^{2/\beta-2/\kappa}$. По теореме Лебега о мажорированной сходимости последняя сумма эквивалентна интегральной сумме по точкам $x_k = k\Delta_1$, что даёт её сходимость к $b^{-1/\beta}\beta^{-1}\Gamma(1/\beta)$. Аналогичный переход более подробно описан в доказательстве теоремы 10.1. Очевидно, что к этому же пределу стремятся остальные три суммы, формирующие одинарные суммы в (4). В случае граничной t_0 сумм будет две, а не четыре. Двойная сумма в (4) в этом случае сводится к сумме двумерных гауссовских вероятностей, оценка элементарна. С учётом замечания выше о переходе к процессу X получаем утверждение (i) теоремы.

2. Случай $\alpha = \beta$. Нам понадобится обобщение леммы 1 на нестационарные процессы. Доказательство следующей леммы аналогично соответствующему доказательству для непрерывного времени [1].

Лемма 2. *Пусть для гауссовского процесса $X(t)$ выполнены условия* E1—E3 *с $\alpha = \beta$. Для любых $\Lambda_1, \Lambda_2 \geqslant 0$ при $u \to \infty$ выполнено следующее: для плотной решётки*

$$P_X(u^{-2/\alpha}[-\Lambda_1, \Lambda_2], u, \mathcal{R}_{\mathrm{d}}) = H_\alpha^a(\Lambda_1, \Lambda_2)\Psi(u)\big(1+o(1)\big);$$

для решётки Пикандса

$$P_X(u^{-2/\alpha}[-\Lambda_1, \Lambda_2], u, \mathcal{R}_{\mathrm{p}}) = H_\alpha^a(\Lambda_1, \Lambda_2, b)\Psi(u)(1+o(1);$$

для разреженной решётки

$$P_X(u^{-2/\alpha}[-\Lambda_1, \Lambda_2], u, \mathcal{R}_{\mathrm{s}}) = \Psi(u)\big(1+o(1)\big).$$

Продолжим доказательство теоремы. Положим теперь $\Delta = \Lambda u^{-2/\alpha}$. Для всех достаточно больших u выполнено

$$P_X([-\delta, \delta], u, \mathcal{R}_{\mathrm{p}}) \geqslant P(A_{-1} \cup A_0)$$

и

$$P_X([-\delta,\delta],u,\mathcal{R}_{\mathrm{p}}) \leqslant P(A_{-1}\cup A_0) + \sum_{k=-[\delta/\Delta\}-1,k\neq 0,-1}^{[\delta/\Delta\}+1} P(A_k),$$

где $A_k = \Big\{\max\limits_{\Delta_k} X(t) \geqslant u\Big\}$. Вероятности под суммой, как и в предыдущем случае, мажорируются соответствующими вероятностями в непрерывном времени, и далее доказательство малости суммы для плотной решётки и решётки Пикандса повторяет соответствующее место в доказательстве теоремы 10.1. В случае внутренней точки t_0 выбираем $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$, в случае граничной точки берём $P(A_0)$ вместо $P(A_{-1}\cup A_0)$ и $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = \Lambda$. Сумма также изменится очевидным образом. Для разреженной решётки доказательство проводится по соответствующей схеме доказательства теоремы 10.1.

3. Случай $\alpha > \beta$. В этом случае $\delta = o(u^{-2/\alpha})$ при $u \to \infty$. Поэтому, рассуждая как в доказательстве (i), получаем (см. [1]), что для произвольного $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших u имеют место следующие неравенства (для любой решётки $\mathcal{R}$ из трёх с учётом того, что разреженная решётка содержит точку максимума дисперсии):

$$1 \leqslant \lim_{u\to\infty} \frac{P\Big(\max\limits_{t\in[-\varepsilon u^{-2/\alpha},\varepsilon u^{-2/\alpha}]\cap\mathcal{R}} \xi(t) > u\Big)}{\Psi(u)} \leqslant H_\alpha(\varepsilon).$$

где для второго неравенства мы увеличили вероятность, перейдя к непрерывному времени, и увеличили дисперсию, что завершает доказательство теоремы, поскольку $H_\alpha(\varepsilon)\downarrow 1$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

5. Примеры

5.1. Дробное броуновское движение

Стандартным дробным броуновским движением $B_H(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $H\in(0,1]$, называется гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$EB_H(s)B_H(t) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

Случай $H = 1$ в этой части можно исключить как тривиальный: B_1 — прямая со случайным наклоном. В [1, 8] исследована вероятность (1) для $X = B_H$ в непрерывном времени. Применим к этой вероятности теорему 1, имея в виду, что $\alpha = 2H$, $\beta = 1$. Заметим, что максимум дисперсии этого процесса на отрезке $[0,1]$ равен 1 и достигается в точке $t = 1$, крайней точке отрезка.

Рассмотрим сначала случай $H < 1/2$ и, чтобы применить теорему, заменим время: $t' = 2^{-1/2H}(1-t)$. Обращение времени удобно, поскольку сжатие необходимо только на множестве $t\in[1-\delta,1]$, без изменения значения максимума дисперсии. Теперь $a = 2^{1+1/2H}H$. Обозначим $K := H^{-1}2^{-1-1/2H}$.

Утверждение 1. *Пусть $H < 1/2$ и $u \to \infty$. Тогда имеют место следующие соотношения: для плотной решётки*

$$P_{B_H}([0,1], u, \mathcal{R}_{\mathrm{d}}) = KH_{2H}u^{1/H-2}\Psi(u)\big(1+o(1)\big);$$

для решётки Пикандса

$$P_{B_H}([0,1], u, \mathcal{R}_{\mathrm{p}}) = KH_{2H,b}u^{1/H-2}\Psi(u)\big(1+o(1)\big);$$

для разреженной решётки если $1 \in \mathcal{R}$, то

$$P_{B_H}([0,1], u, \mathcal{R}_{\mathrm{s}}) = Ku^{2/\gamma-2}\Psi(u)\big(1+o(1)\big).$$

Если $H = 1/2$, то $B_{1/2}(t)$ — стандартное броуновское движение. Для этого случая применима часть (ii) теоремы 1 с заменой $t' = (1-t)/2$ (см. комментарий к замене выше). С учётом значения константы $H_1^1 = 2$, вычисленной в [1], получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть $u \to \infty$. При $H = 1/2$ для плотной решётки асимптотика совпадает с соответствующей асимптотикой для броуновского движения:*

$$P_{B_{1/2}}([0,1], u, \mathcal{R}_{\mathrm{d}}) = 2\Psi(u)\big(1+o(1)\big);$$

для решётки Пикандса

$$P_{B_{1/2}}([0,1], u, \mathcal{R}_{\mathrm{p}}) = 2H_{1,b}^{0,1}\Psi(u)\big(1+o(1)\big);$$

для разреженной решётки

$$P_{B_{1/2}}([0,1], u, \mathcal{R}_{\mathrm{s}}) = \Psi(u)\big(1+o(1)\big).$$

Наконец, рассмотрим случай $H > 1/2$.

Утверждение 3. *При $H > 1/2$ для всех трёх решёток, если при этом разреженная сетка содержит единицу, выполняется соотношение*

$$P_{B_H}([0,1], u, \mathcal{R}) = \Psi(u)\big(1+o(1)\big), \quad u \to \infty.$$

5.2. Задача о разорении для дробного броуновского движения

Рассмотрим следующую модель доходов, например, страховой компании:

$$K(t) = u + B_H(t) + ct, \quad t \geqslant 0.$$

Здесь u моделирует начальный капитал, $B_H(t)$ — совокупный доход компании (поступления + выплаты). Модель хорошо работает в условиях сильной зависимости доходов и расходов по времени [3], ct, $c > 0$, — регулярные поступления (сумма премий страхователей). Разорением называют событие $\{K(t) < 0\}$ в какой-то момент времени. Задача о разорении в контексте настоящей работы состоит в оценивании вероятности этого события при большом начальном капитале u по наблюдениям в дискретном времени:

$$P(\exists\, t \in \mathcal{R}\colon K(t) < 0), \quad u \to \infty.$$

Заметим, что для $H=1$ дробное броуновское движение вырожденно, представляет собой прямую со случайным (гауссовским) наклоном, и задача разорения становится тривиальной. Предположим поэтому, что $H<1$.

Применим теорему 1 к вероятности

$$P(\exists\, t\in\mathcal{R},\ t>0\colon K(t)<0)=P\Big(\sup_{t\in\mathcal{R}_+} B_H(t)-ct>u\Big),$$

где $\mathcal{R}_+=\mathcal{R}\cap(0,\infty)$, и мы использовали симметрию гауссовских распределений с нулевым средним. Имеем [5], что

$$\begin{aligned}P\Big(\sup_{t\in\mathcal{R}_+} B_H(t)-ct>u\Big)&=P\left(\sup_{t\in\mathcal{R}_+}\frac{B_H(t)}{t^H}>\frac{u+ct}{t^H}\right)=\\&=P\left(\sup_{su\in\mathcal{R}_+}\frac{B_H(us)}{u^Hs^H}>\frac{u+cus}{u^Hs^H}\right)=P\left(\sup_{s\in u^{-1}\mathcal{R}_+}\frac{u^{-H}B_H(us)s^H}{s^H(1+cs)}>u^{1-H}\right)=\\&=P\left(\sup_{t\in u^{-1}\mathcal{R}_+}\frac{B_H(t)}{1+ct}>u^{1-H}\right).\end{aligned}$$

Во втором равенстве была сделана замена времени $t=us$, в четвёртом использована автомодельность процесса $B_H(t)$. После второго равенства процесс рассматривается на решётке $u^{-1}\mathcal{R}_+$. Рассмотрим теперь гауссовский случайный процесс под последней вероятностью, обозначим его $Y(t)$. Среднее этого процесса равно нулю, дисперсия равна

$$EY^2(t):=\sigma^2(t)=\frac{t^{2H}}{(1+ct)^2}.$$

В [5] найден максимум функции $\sigma(t)$ и точка, где он достигается, $t_0=H/c(1-H)$, и это единственная точка максимума. Вычисляя вторую производную в точке t_0 и произведя (для применения теоремы) замену времени $t'=2^{-1/2H}t_0^{-1}t$, получаем, как и в [5], что

$$\frac{\sigma(t')}{\sigma(t'_0)}=1-2^{1/H-1}H(1-H)(t'-t'_0)^2+O\big((t'-t'_0)^3\big),\tag{5}$$

и для корреляционной функции

$$r(s',t')=1-|t'-s'|^{2H}\big(1+o(1)\big)\quad\text{при}\quad s',t'\to t'_0=2^{-1/2H}.$$

Итак, получаем, что $\alpha=2H$, $\beta=2$ и $a=2^{1/H-1}H(1-H)$. То есть имеет место первый случай (i) теоремы ($\alpha=2H<2=\beta$).

Теперь можно применить теорему 1, взяв $T>t'_0$. Заметим, как и в [5], что

$$P\left(\sup_{t\in[T,\infty)\cap\mathcal{R}}\frac{B_H(t)}{1+ct}>u^{1-H}\right)\leqslant P\left(\sup_{t\geqslant T}\frac{B_H(t)}{1+ct}>u^{1-H}\right).$$

Правая часть оценена в [5], где показано, что для произвольно большого C можно выбрать число T столь большим, чтобы

$$P\left(\sup_{t\geqslant T}\frac{B_H(t)}{1+ct}>u^{1-H}\right)=O(e^{-Cu^{2-2H}})$$

при $u\to\infty$. С учётом этого замечания согласно теореме 1 получаем для вероятности $P_R=P(\exists\, t\in\mathcal{R}_+\colon K(t)<0)$ следующие асимптотики при $u\to\infty$. Обозначим

$$K=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{(1-3H)/2H}H^{1/2}(1-H)^{1/2}},\quad \hat{u}=\frac{u^{1-H}}{\sigma(t_0)},\quad\text{где}\quad \sigma(t_0)=\frac{H^H}{c^H(1-H)^{H-1}}.$$

Утверждение 4. *Пусть $u\to\infty$. Тогда для плотной решётки*

$$P_R=H_{2H}K\hat{u}^{(1-H)/H}\Psi(\hat{u})\big(1+o(1)\big);$$

для решётки Пикандса

$$P_R=H_{2H,b}K\hat{u}^{(1-H)/H}\Psi(\hat{u})\big(1+o(1)\big);$$

для разреженной решётки

$$P_R=K\hat{u}^{(2-\gamma)/\gamma}\Psi(\hat{u})\big(1+o(1)\big).$$

Авторы благодарят рецензента за важные и полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-49-00079) и частичной поддержке ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

Литература

[1] Питербарг В. И. Двадцать лекций о гауссовских процессах. — М.: МЦНМО, 2015.

[2] Питербарг В. И., Присяжнюк В. П. Асимптотика вероятности большого выброса для гауссовского нестационарного процесса // Теор. вер. и матем. стат. — 1978. — Т. 18. — С. 121—133.

[3] Bayer Ch., Friz P., Gatheral J. Pricing under rough volatility // Quantitative Finance. — 2016. — Vol. 16, no. 6. — P. 887—904.

[4] Borovkov K., Mishura Y., Novikov A., Zhitlukhin M. Bounds for expected maxima of Gaussian processes and their discrete approximations // Stoch. Int. J. Probab. Stoch. Process. — 2017. — Vol. 89, no. 1. — P. 21—37.

[5] Hüsler J., Piterbarg V. Extremes of a certain class of Gaussian processes // Stoch. Proc. Their Appl. — 1999. — Vol. 83. — P. 257—271.

[6] Makogin V. Simulation paradoxes related to a fractional Brownian motion with small Hurst index // Modern Stoch. Theory Appl. — 2016. — Vol. 3. — P. 181—190.

[7] Piterbarg V. I. Discrete and continuous time extremes of Gaussian processes // Extremes. — 2004. — Vol. 7, no. 2. — P. 161—177.

[8] Piterbarg V. I. Asymptotic Methods in Theory of Gaussian Random Processes and Fields. — Providence: Amer. Math. Soc., 2012. — (Transl. Math. Monogr.; Vol. 148).