

Стационарные режимы движения статически неустойчивого робота с двумя соосными деформируемыми колёсами

П. А. КРУЧИНИН

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: pkruh@mech.math.msu.su*

А. А. ЛАСКИН

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: alexelaskin1907@gmail.com*

УДК 531.8

Ключевые слова: статически неустойчивая роботизированная платформа, деформируемое колесо, проскальзывание, стационарное движение.

Аннотация

В настоящее время активно развивается теория и практика разработки колёсных роботизированных систем. При моделировании движения колёсных роботов в большинстве случаев используются классические неголономные модели движения, в которых не учитывается проскальзывание деформируемых колёс. Между тем использование деформируемых колёс может ограничивать возможности применения неголономных моделей при проектировании и анализе алгоритмов управления. Эти вопросы особенно актуальны для статически неустойчивых роботизированных платформ с соосными колёсами, сходными по компоновке с аппаратами типа сегвей. Настоящая работа посвящена описанию движения двухколёсной роботизированной платформы с учётом возможного проскальзывания деформируемых колёс и анализу применимости используемых упрощённых моделей. Предлагаемая модель в дальнейшем может быть использована как для разработки новых алгоритмов управления аппаратом в режиме активного маневрирования, так и для предварительной оценки робастности алгоритмов, построенных с использованием приближённых решений. Настоящая статья посвящена первому этапу такого анализа — построению математической модели движения аппаратов, анализу стационарных режимов их движения и возможности их стабилизации. Показано, что для моделей с деформируемыми колёсами характерны стационарные режимы с наклонами корпуса вперёд. Это существенно отличает предлагаемую модель от традиционно используемых неголономных описаний.

Abstract

P. A. Kruchinin, A. A. Laskin, Steady-state motion of a balancing robot with two coaxial deformable wheels, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 2, pp. 181–193.

At present, the theory of wheeled robotic systems is being actively developed. In modeling the motion of wheeled robots, one mostly uses the classical nonholonomic motion

model, which does not take into account the slip of deformable wheels. Meanwhile, for robots with deformable wheels nonholonomic models can be inadequate for the design and analysis of control algorithms. This can be the case for statically unstable balancing robots with coaxial wheels, similar in design with such vehicles as Segway. Thus, modeling the motion of a two-wheeled robot taking into account the possibility of wheels slip, and analysis of applicability of simplified models are of interest. Such models can be used to develop new control algorithms in active maneuvering, and for preliminary estimates of robustness of algorithms designed using approximate nonholonomic models. This paper focuses on modeling the motion of balancing robots, on analyzing their steady-state motion and on possibilities of their stabilization. It is shown that for models with deformable wheels in the steady-state motion the body has a forward pitch. Such a pitch is not found in most nonholonomic models.

Введение

При описании движения больших транспортных колёсных экипажей (автомобилей, тракторов и т. п.) обычно используют модели, учитывающие деформируемость катящегося колеса. При анализе движения колёсных роботизированных систем, как правило, используют традиционную неголономную модель, в которой деформируемость и проскальзывание колёс не учитываются. Вопросы, связанные с применимостью приближённых неголономных моделей для описания движений статически устойчивых колёсных экипажей, обсуждаются, например, в [5]. Отметим также работы [2, 7, 19], в которых рассматривается проблема построения управления роботизированной платформой с деформируемыми колёсами для различных приближённых моделей.

При моделировании движения статически неустойчивых роботизированных платформ с соосными колёсами, сходными по компоновке с аппаратами типа сегвей, подобные вопросы аккуратно не рассматривались. Такие аппараты вызывают интерес из-за своей манёвренности и компактности. Планируется их использование в развлекательных целях, при уходе за больными, на промышленных предприятиях и в других областях деятельности. Большинство исследований акцентируют внимание на управлении математическими моделями и традиционно не учитывают возможную деформируемость колёс и их проскальзывание. Известные модели движения, разработанные в [4, 11, 13, 17], базируются на предположении об отсутствии проскальзывания жёстких колёс. Между тем на практике подобные системы часто используют деформируемые резиновые колёса [1, 6, 11, 12, 15]. Работа [14] посвящена построению управления для приближённой модели с проскальзыванием колёс, однако аккуратный анализ задачи отсутствует. Таким образом, рассмотрение задачи об учёте деформируемости колёс в модели движения подобного аппарата представляется полезным. Особенно важно отметить необходимость использования подобных моделей в задачах имитации экстремальных ситуаций движения сегвея, управляемого человеком, которые могут рассматриваться в дальнейшем.

Модель двухколёсной роботизированной платформы

Рассмотрим механическую систему, представленную на рис. 1 Эта система представляет собой модель двухколёсной роботизированной платформы [4]. Система состоит из двух круговых однородных дисков радиуса R . Центры этих дисков A_1, A_2 соединены массивным стержнем длиной $2b$, параллельным опорной плоскости, как показано на рис. 1. К стержню A_1A_2 в точке O жёстко прикреплено тело OD с центром масс в точке D . Длина OD равна l . Обозначим массу стержня OD через m_1 , массу одного колеса — m_2 , а массу стержня A_1A_2 — m_3 . Полную массу аппарата обозначим через $m = m_1 + 2m_2 + m_3$.

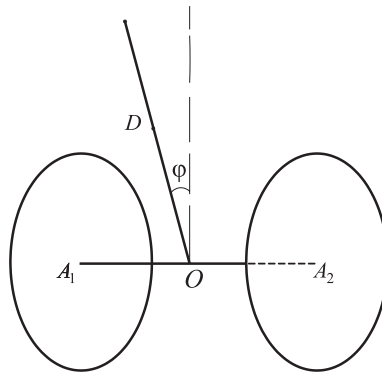


Рис. 1. Модель роботизированной платформы с соосными колёсами

Главные моменты инерции стержня OD равны J_1, J_2, J_3 . Главными осями инерции для него являются ось OD , ось, параллельная A_1A_2 , проходящая через точку D , и ось, ортогональная им. Каждое из колёс имеет момент инерции J_4 относительно оси вращения и J_5 относительно вертикальной оси, проходящей через точку A_i . Изменениями этих моментов инерции, вызванными деформациями колёс, будем пренебрегать. Стержень A_1A_2 обладает моментом инерции J_6 относительно вертикальной оси, проходящей через точку O .

Для описания движения системы введём неподвижную систему координат $Sxyz$ с началом в некоторой точке S опорной плоскости (ось Sz направлена вертикально вверх) и систему координат $O\xi\eta\zeta$, жёстко связанную с аппаратом, где ось $O\zeta$ параллельна оси Oz , ось $O\xi$ сонаправлена с A_1A_2 , а $O\eta$ ортогональна им. Единичные векторы этих осей обозначим соответственно $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$.

Положение системы определим обобщёнными координатами $x, y, \alpha, \varphi, \beta_1, \beta_2$, где x, y — горизонтальные координаты точки O , α — угол поворота оси A_1A_2 в плоскости Oxy , φ — угол наклона стержня OH относительно вертикали, проходящей через точку O , β_1, β_2 — углы поворота колёс вокруг их осей вращения.

Через $\omega_1 = \dot{\beta}_1$ и $\omega_2 = \dot{\beta}_2$ обозначим угловые скорости вращения правого и левого колёс, а через $\omega_r = \dot{\alpha}$ — угловую скорость вращения A_1A_2 относительно вертикальной оси.

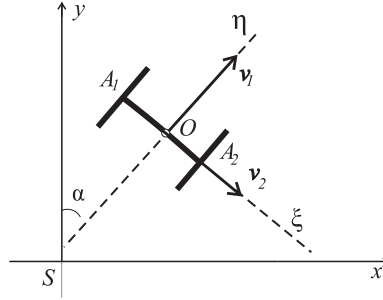


Рис. 2. Введённые обобщённые координаты

Управлением в модели являются моменты M_{d_1} и M_{d_2} , создаваемые двигателями в осях вращения левого и правого колёс.

Соотношения для кинетической энергии и обобщённых сил системы

Кинетическая энергия модели в принятых обобщённых координатах имеет вид

$$T = \frac{1}{2}[(J_2 + m_1 l^2) \sin^2 \varphi + J_3 \cos^2 \varphi + J_6 + 2J_5 + 2m_2 b^2] \omega_r^2 + \frac{1}{2}(J_1 + m_1 l^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_4 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m_1 l \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{x} \sin \alpha + \dot{y} \cos \alpha) + m_1 l \omega_r \sin \varphi (\dot{x} \cos \alpha - \dot{y} \sin \alpha). \quad (1)$$

Потенциальную энергию силы тяжести модели, запишем в виде

$$\Pi = m_1 g l \cos \varphi. \quad (2)$$

Обобщённые силы, отвечающие управляющим моментам, действующим в осях колёс, равны

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= -M_{d_1} - M_{d_2}, \\ Q'_{\beta_i} &= M_{d_i}. \end{aligned} \quad (3)$$

В отличие от предшествующих работ [4, 11, 13, 17], в которых использована обычная неголономная модель, примем модель горизонтальных сил P_i , действующих в контакте i -го колеса с опорной плоскостью, в соответствии с теорией

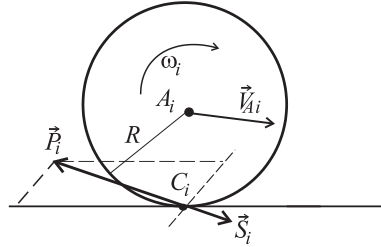


Рис. 3. Силы в контакте

качения деформируемого колеса [10, 16]:

$$\vec{P}_i = -\nu_i N_i \phi(|\vec{S}_i|) \frac{\vec{S}_i}{|\vec{S}_i|}, \quad i = 1, 2, \tag{4}$$

где N_i — нормальная реакция в контакте i -го колеса с поверхностью, \vec{S}_i — вектор относительного проскальзывания, определённый в осях $O\xi\eta\zeta$:

$$\vec{S}_i = (S_{\xi_i}, S_{\eta_i}, 0) = \left(\frac{\vec{v}_{C_i} \cdot \vec{e}_\xi}{\vec{v}_{A_i} \cdot \vec{e}_\eta}, \frac{\vec{v}_{C_i} \cdot \vec{e}_\eta}{\vec{v}_{A_i} \cdot \vec{e}_\eta}, 0 \right), \tag{5}$$

где \vec{v}_{C_i} — скорость точки C_i контакта i -го колеса с опорной плоскостью, \vec{v}_{A_i} — скорость геометрического центра колеса A_i .

Экспериментальную зависимость ϕ от $|\vec{S}|$ будем приближённо моделировать в соответствии с [10] кусочно-линейной функцией, показанной на рис. 4.

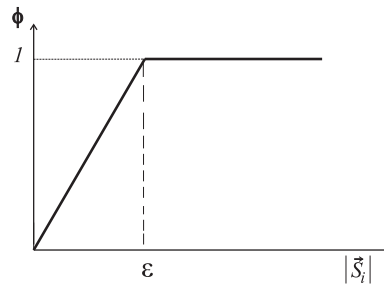


Рис. 4. Кусочно-линейная аппроксимация зависимости $\phi|S_i|$

Будем также учитывать, что асимметрия контактных деформаций приводит к наличию «стабилизирующего» момента M_{S_i} , который в соответствии с [16] зависит от бокового проскальзывания S_{ξ_i} и безразмерной угловой скорости вращения колеса

$$S_{\omega_i} = \frac{\mu\omega_r}{(\vec{v}_{A_i}, \vec{e}_\xi)},$$

где μ — размер контактного пятна. Вообще говоря, от значения S_{ω_i} зависит также величина ε , показанная на рис. 4. Момент вращения колеса [3] может играть значительную роль при наличии быстрых вращательных движений колёс относительно вертикальной оси. Однако в соответствии с [16] при $S_{\omega_i} \ll S_{\xi_i}$ влиянием этих составляющих момента можно пренебрегать [8]. В дальнейшем мы будем рассматривать именно этот случай и приближённо моделировать момент M_{s_i} в виде

$$M_{s_i} = -N_i \chi(|S_{\xi_i}|) \operatorname{sign}(S_{\xi_i}), \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

где функцию $\chi(|S_{\xi_i}|)$ будем приближённо моделировать с помощью кусочно-линейной зависимости, приведённой на рис. 5.

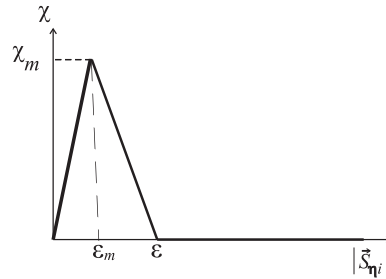


Рис. 5. Кусочно-линейная аппроксимация зависимости $\chi(S_{\eta_i})$

Значениями моментов M_{s_i} при приближённом моделировании движения автомобиля часто пренебрегают [5], так как он значительно меньше момента относительно центра масс поперечной составляющей контактной силы \vec{P}_i . Однако при более аккуратном анализе движения колёсных экипажей [16, 18] этот момент играет значимую роль.

В итоге компоненты обобщённых сил, отвечающие контактным взаимодействиям, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= (Q_x, Q_y, Q_\alpha, Q''_{\beta_1}, Q''_{\beta_2}); \\ Q_x &= -\nu_1 N_1 [\phi_\xi(\vec{S}_1) \cos \alpha + \phi_\eta(\vec{S}_1) \sin \alpha] - \nu_2 N_2 [\phi_\xi(\vec{S}_2) \cos \alpha + \phi_\eta(\vec{S}_2) \sin \alpha], \\ Q_y &= \nu_1 N_1 [\phi_\xi(\vec{S}_1) \sin \alpha - \phi_\eta(\vec{S}_1) \cos \alpha] + \nu_2 N_2 [\phi_\xi(\vec{S}_2) \sin \alpha - \phi_\eta(\vec{S}_2) \cos \alpha], \\ Q_\alpha &= [-\nu_1 N_1 \phi_\eta(\vec{S}_1) + \nu_2 N_2 \phi_\eta(\vec{S}_2)] b - N_1 \chi(|S_{\eta_1}|) \operatorname{sign}(S_{\eta_1}) - N_2 \chi(|S_{\eta_2}|) \operatorname{sign}(S_{\eta_2}), \\ Q''_{\beta_1} &= -\nu_1 N_1 \phi_\eta(\vec{S}_1) R, \\ Q''_{\beta_2} &= -\nu_2 N_2 \phi_\eta(\vec{S}_2) R. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь в соответствии с (2) приняты обозначения

$$\phi_\xi(\vec{S}_i) = \left(\phi(|\vec{S}_i|) \frac{\vec{S}_i}{|\vec{S}_i|}, \vec{e}_\xi \right), \quad \phi_\eta(\vec{S}_i) = \left(\phi(|\vec{S}_i|) \frac{\vec{S}_i}{|\vec{S}_i|}, \vec{e}_\eta \right),$$

где i — номер колеса.

Уравнения движения в полусвязанной системе координат

Для отыскания стационарных режимов запишем уравнения движения в связанной системе координат $O\xi\eta\zeta$. Обобщённые скорости \dot{x} , \dot{y} выразим через проекции v_1 , v_2 скорости точки O на оси связанной системы координат:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha, \\ \dot{y} &= v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha.\end{aligned}\quad (8)$$

Для вывода уравнений движения используем методику Маджи, следуя соотношениям из [9]. В соответствии с (8) обобщённые скорости системы $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{y}, \omega_r, \dot{\varphi}, \omega_1, \omega_2)^T$ и псевдоскорости $\dot{\pi} = (v_1, v_2, \omega_r, \dot{\varphi}, \omega_1, \omega_2)^T$ заданы так, что верно равенство

$$\dot{q} = H\dot{\pi}, \quad H = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\quad (9)$$

Обозначим через $\Theta(q, \dot{\pi})$ выражение кинетической энергии $T(q, \dot{q})$, в которое вместо \dot{q} подставлено его выражения из (9). Тогда

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{1}{2}[(J_2 \sin^2 \varphi + m_1 l^2 \sin^2 \varphi + J_3 \cos^2 \varphi + 2J_5 + 2m_2 b^2 + J_6)\omega_r^2 + \\ &+ (J_1 + m_1 l^2)\dot{\varphi}^2 + J_4(\omega_1^2 + \omega_2^2) + m(v_1^2 + v_2^2)] - \\ &- m_1 l(v_1 \omega_r \sin \varphi + v_2 \dot{\varphi} \cos \varphi).\end{aligned}\quad (10)$$

В этих обозначениях можно записать уравнения в псевдоскоростях:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\Theta}{d\dot{\pi}} \right)^T - H^T \left(\frac{d\Theta}{dq} \right) = H^T Q + \left[\frac{dH^T}{dt} - H^T \left(\frac{dH\dot{\pi}}{dq} \right)^T \right] \left(\frac{dT}{d\dot{q}} \right)^T.\quad (11)$$

Здесь T — знак транспонирования, Q — вектор всех обобщённых сил, записанных как сумма величин, определяемых соотношениями (2), (3) и (7). В результате получим систему уравнений движения

$$\begin{aligned}m(\dot{v}_1 - v_2 \omega_r) - m_1 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_1 l (\omega_r^2 \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= \\ = -\nu_1 N_1 \phi_\eta(\vec{S}_1) - \nu_2 N_2 \phi_\eta(\vec{S}_2), \\ m(\dot{v}_2 + v_1 \omega_r) - m_1 l \ddot{\alpha} \sin \varphi - 2m_1 l \omega_r \dot{\varphi} \cos \varphi &= -\nu_1 N_1 \phi_\xi(\vec{S}_1) - \nu_2 N_2 \phi_\xi(\vec{S}_2), \\ [(J_2 + m_1 l^2) \sin^2 \varphi + J_3 \cos^2 \varphi + 2J_5 + J_6 + 2m_2 b^2] \ddot{\alpha} + 2m_1 l v_2 \dot{\varphi} \cos \varphi + \\ + (J_2 - J_3 + m_1 l^2) \omega_r \dot{\varphi} \sin 2\varphi + m_1 l (\dot{v}_2 + v_1 \omega_r) \sin \varphi &= \\ = b[-\nu_1 N_1 \phi_\eta(\vec{S}_1) + \nu_2 N_2 \phi_\eta(\vec{S}_2)] - N_1 \chi(|S_{\eta_1}|) \text{sign}(S_{\eta_1}) - N_2 \chi(|S_{\eta_2}|) \text{sign}(S_{\eta_2}),\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& (J_1 + m_1 l^2) \ddot{\varphi} - m_1 g l \sin \varphi + m_1 l (\dot{v}_1 - v_2 \omega_r) \cos \varphi - \\
& - \frac{1}{2} (J_2 - J_3 + m_1 l^2) \omega_r^2 \sin 2\varphi = M_{d_1} + M_{d_2}, \\
& J_4 \dot{\omega}_1 = \nu_1 N_1 \phi_\eta(\vec{S}_1) R + M_{d_1}, \\
& J_4 \dot{\omega}_2 = \nu_2 N_2 \phi_\eta(\vec{S}_2) R + M_{d_2}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Соотношения для отыскания нормальных реакций

Для замыкания уравнений движения запишем соотношения для отыскания нормальных реакций N_1 , N_2 . Используем теорему о движении центра масс системы в проекции на вертикальную ось,

$$m_1 l (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = N_1 + N_2 - mg, \tag{13}$$

и теорему об изменении кинетического момента системы относительно подвижной оси, являющейся проекцией оси η и проходящей через точку O_1 — проекцию O на опорную плоскость. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{dK_{r\eta}}{dt} - \omega_r K_{r\xi} = M_{a\eta} + M_{in\eta}. \tag{14}$$

Здесь $K_{r\eta}$ и $K_{r\xi}$ — проекции кинетического момента относительно точки O_1 в относительном движении на оси η и ξ , $M_{a\eta}$ — момент активных сил относительно оси, а $M_{in\eta}$ — момент сил инерции.

Проекция кинетического момента $K_{r\eta}$ и $K_{r\xi}$ равны соответственно

$$\begin{aligned}
K_{r\xi} &= (J_1 + l^2 m_1 + l m_1 R \cos \varphi) \dot{\varphi} - J_4 \omega_1 + J_4 \omega_2, \\
K_{r\eta} &= (J_2 - J_3) \cos \varphi \sin \varphi \omega_r.
\end{aligned} \tag{15}$$

Ось для записи теоремы об изменении кинетического момента выбрана так, чтобы ненулевые значения моментов относительно этой оси создавали только нормальные составляющие реакции опоры:

$$M_{a\eta} = (N_2 - N_1) b. \tag{16}$$

Выражение для момента сил инерции имеет вид

$$M_{in\eta} = m_i a_\xi \zeta_i. \tag{17}$$

Здесь m_i — масса тела, обозначенного номером i , ζ_i — вертикальная координата его центра масс, a_ξ — проекция ускорения точки O_1 на ось ξ . Эта проекция выражается через скорости v_1 , v_2 :

$$a_\xi = \dot{v}_2 + v_1 \omega_r. \tag{18}$$

Подставим это выражение в (17), учитывая, что $\zeta_1 = R + l \cos \varphi$ и $\zeta_2 = \zeta_3 = R$, получим

$$M_{in\eta} = (mR + m_1 l \cos \varphi) (\dot{v}_2 + v_1 \omega_r). \tag{19}$$

В результате после подстановки в (14) выражений (15), (16) и (19) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(J_2 - J_3)\ddot{\alpha} \sin 2\varphi - \frac{1}{2}J_4\omega_r(\omega_1 + \omega_2) - \\ & - [J_1 + l^2m_1 + lm_1R \cos \varphi + (J_3 - J_2) + \cos 2\varphi]\omega_r\dot{\varphi} = \\ & = (N_2 - N_1)b + (mR + m_1l \cos \varphi)(\dot{v}_2 + v_1\omega_r). \end{aligned} \quad (20)$$

Это уравнение вместе с (13) замыкают систему (12), описывающую движение роботизированной платформы.

Стационарное движение по окружности

Рассмотрим стационарный режим движения аппарата, при котором он движется с фиксированным углом наклона φ , в случае когда все остальные псевдоскорости постоянны и характеристика колёс $\phi(|\vec{S}_i|)$ принимает значения в линейной зоне, т. е.

$$\phi(|\vec{S}_i|) \frac{\vec{S}_i}{|\vec{S}_i|} = C\vec{S}_i. \quad (21)$$

Будем рассматривать случай нормального движения колёс без опасности заноса, при котором

$$|\vec{S}_i| = \sqrt{S_{\xi_i}^2 + S_{\eta_i}^2} < \varepsilon. \quad (22)$$

Также будем учитывать условия безотрывного движения колёс. Для этого будем учитывать ограничения для нормальных реакций:

$$N_1 \geq 0, \quad N_2 \geq 0. \quad (23)$$

В результате получим систему уравнений для отыскания параметров стационарного движения

$$\begin{aligned} & -mv_2\omega_r + m_1l\omega_r^2 \sin \varphi = -\nu_1N_1C_1S_{\eta_1} - \nu_2N_2C_2S_{\eta_2}, \\ & mv_1\omega_r = -\nu_1N_1C_1S_{\xi_1} - \nu_2N_2C_2S_{\xi_2}, \\ & m_1lv_1\omega_r \sin \varphi = \\ & = b(-\nu_1N_1C_1S_{\xi_1} + \nu_2N_2C_2S_{\xi_2}) - N_1\chi(|S_{\xi_1}|) \text{sign}(S_{\xi_1}) - N_2\chi(|S_{\xi_2}|) \text{sign}(S_{\xi_2}), \\ & m_1lv_2\omega_r \cos \varphi - m_1gl \sin \varphi - \frac{1}{2}(J_2 - J_3 + m_1l^2)\omega_r^2 \sin 2\varphi = M_{d_1} + M_{d_2}, \\ & M_{d_1} + \nu_1RN_1C_1S_{\eta_1} = 0, \\ & M_{d_2} + \nu_2RN_2C_2S_{\eta_2} = 0, \\ & N_i = \frac{1}{2}mg - (-1)^i \frac{1}{b}[v_1\omega_r(mR + m_1l \cos \varphi) + J_4\omega_r(\omega_1 + \omega_2)], \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$S_{\xi_i} = \frac{v_1 - (-1)^i b\omega_r - R\omega_i}{v_1 - (-1)^i b\omega_r}, \quad S_{\eta_i} = \frac{v_2}{v_1 - (-1)^i b\omega_r}, \quad i = 1, 2.$$

В полученной системе число неизвестных превышает количество уравнений. Для анализа задачи будем считать v_1 и v_2 заданными и решать систему (24) относительно переменных $\alpha_0, \varphi_0, M_1, M_2, \omega_1, \omega_2$.

На рис. 6 приведены значения угла наклона φ в зависимости от значений v_1 и v_2 для стационарного движения при численном решении уравнений (24) при следующих значениях параметров: $l = 0,8$ м, $g = 9,8$ м/с², $C_1 = C_2 = 10$, $J_2 = 17$ кг/м², $J_3 = 0,23$ кг/м², $m_1 = 80$ кг, $m_2 = 5$ кг, $m_3 = 40$ кг, $b = 0,3$ м, $R = 0,3$ м, $\nu = 0,5$, $\chi_m = 0,012$, $\varepsilon_m = 0,02$.

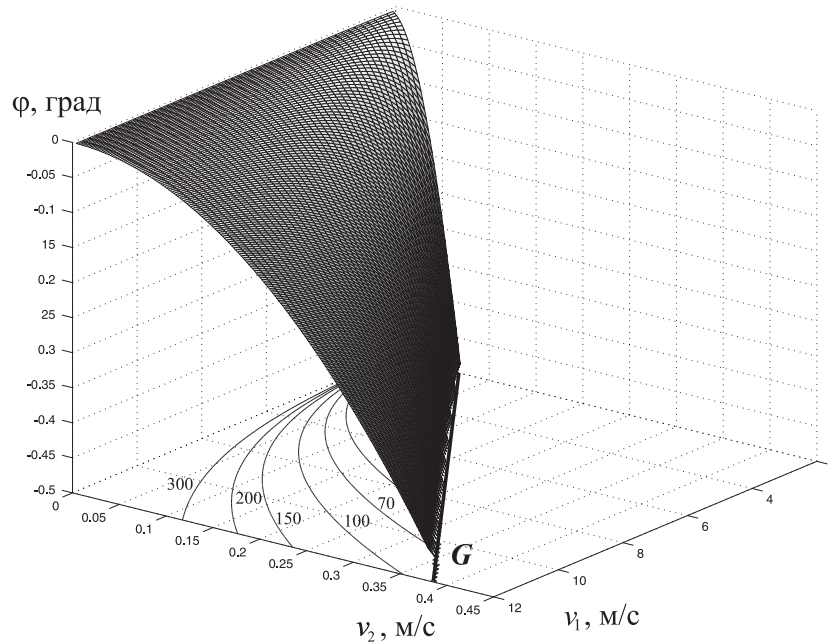


Рис. 6. Поверхность стационарных движений по окружности в пространстве v_1, v_2, φ . Линии уровня на плоскости $v_1 v_2$ соответствуют движению по окружности заданного радиуса

Эти значения приближённо соответствуют модели человека, стоящего на аппарате типа сегвей, движущемся по мокрому асфальту. Линия G на плоскости $v_1 v_2$ приближённо соответствует границе, на которой для приведённых данных нарушается условие (22). При дальнейшем увеличении v_2 возможны стационарные движения со скольжением колёс, однако их стабилизация на практике крайне затруднена из-за слабой зависимости контактных сил от управляющего момента, создаваемого двигателем.

Стационарные режимы движения по окружности для роботизированной платформы отличаются от стационарных движений классической неголономной модели из [4] наличием наклона корпуса. Это объясняется тем, что при движении по окружности аппарата с деформируемыми колёсами вектор скорости центра масс стержня направлен не ортогонально оси A_1A_2 , и соответственно проекция сил инерции на ось η не равна 0. В этой ситуации небольшой наклон корпуса необходим для того, чтобы при стационарном движении момент сил инерции относительно оси A_1A_2 скомпенсировался моментом сил тяжести. Отсюда следует, что при снижении высоты аппарата l наклон корпуса будет увеличиваться. Численное решение показывает, что для низких аппаратов с $l < 0,5$ м такой наклон может достигать величин порядка нескольких градусов.

При изменении параметров задачи граница существования такого стационарного режима деформируется. Вид самой поверхности и её границ существенно не меняется. При увеличении коэффициента трения ν , уменьшении базы b или высоты l существенную роль начнёт играть ограничение (23). Прежде всего это связано с малыми скоростями v_1 , когда существенно снижается радиус кривизны стационарной траектории.

Следует отметить существенное влияние учёта «стабилизирующего» момента на значения углов наклона корпуса. Уменьшение коэффициента χ приводит к значительным снижениям наклона корпуса, однако на практике снижение χ , как правило, порождено снижением коэффициента трения ν , и это обстоятельство в целом должно приводить к незначительным изменениям наклона корпуса роботизированной платформы.

Значения угловой скорости вращения аппарата относительно вертикальной оси для рассмотренных стационарных режимов не превышают величин порядка $1^\circ/\text{с}$ что подтверждает предположения о малом влиянии моментов вращения на решение поставленной задачи. Характерные значения радиусов окружностей, по которым движется платформа, отображены на рис. 6 с помощью изображений линий уровня на плоскости v_1v_2 . Значения в метрах радиусов траекторий, по которым будет двигаться точка O , подписаны на рисунке. Эти линии уровня близки к линиям уровня угла φ , однако несколько отличаются от последних.

Ввиду большой громоздкости мы не будем приводить здесь уравнения в отклонениях от описанных стационарных решений (24) системы (12), (13), (20), однако отметим, что численный анализ показывает управляемость по Калману для линеаризованной системы для всей области рассмотрения параметров.

Таким образом, в дальнейшем для движения платформы с деформируемыми колёсами целесообразно рассматривать задачу о применимости управления, построенного на базе неголономной модели. Практика проектирования управления для реальных систем показывает, что алгоритмы, использующие неголономную модель работоспособны, однако вопрос о реализованных запасах устойчивости и областях притяжения для таких управлений требует более подробного анализа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 14-50-00029.

Литература

- [1] Адамов Б. И. Стабилизация движения сегвея с параметрической неопределённостью и повышение комфортабельности езды пассажира // XV конф. молодых учёных «Навигация и управление движением». — СПб.: Центр. науч.-исслед. ин-т «Электроприбор», 2013. — С. 339—343.
- [2] Алисейчик А. П., Павловский В. Е. Модель и динамические оценки управляемости и комфортабельности движения многоколёсного мобильного робота // Пробл. управления. — 2013. — № 1. — С. 70—78.
- [3] Андронов В. В., Журавлёв В. Ф. Сухое трение в задачах механики. — М.; Ижевск: R & C Dynamics, 2010.
- [4] Белотелов В. Н., Мартыненко Ю. Г. Управление пространственным движением перевёрнутого маятника, установленного на колёсной паре // Изв. РАН. МТТ. — 2006. — № 6. — С. 10—28.
- [5] Влахова А. В. Математические модели движения колёсных аппаратов. — М.; Ижевск: Ижевский ин-т компьют. исслед., 2014.
- [6] Говердовский А. Д. Автоматическое управление балансирующим роботом // Сб. науч. тр. 15-я молодёжная науч.-техн. конф. «Научноёмкие технологии и интеллектуальные системы 2013». — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. — С. 259—265.
- [7] Красинский А. Я., Каюмова Д. Р. О влиянии деформируемости колёс на динамику робота с дифференциальным приводом // Нелинейная динамика. — 2011. — Т. 7, № 4. — С. 803—822.
- [8] Кручинин П. А., Ласкин А. А. О моделях качения деформируемого колеса при описании движения роботизированных платформ // VII Всероссийское совещание-семинар зав. кафедрами и преподавателей теоретической механики, робототехники, мехатроники вузов Российской Федерации. Материалы совещания / Под ред. В. А. Самсонова. — Махачкала: Изд. центр «Мастер», 2016. — С. 62—65.
- [9] Мартыненко Ю. Г. Управление движением мобильных колёсных роботов // Фундамент. и прикл. матем. — 2005. — Т. 11, вып. 8. — С. 29—80.
- [10] Новожилов И. В., Кручинин П. А., Магомедов М. Х. Контактные взаимодействия колеса с опорной поверхностью // Сб. науч.-метод. стат. Теоретическая механика. Вып. 23. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. — С. 86—94.
- [11] Формальский А. М. Управление движением неустойчивых объектов. — М.: Физматлит, 2013.
- [12] Adhikari B., Gurung D., Kunwar G. S., Gyawali P. FPGA control of a mobile inverted pendulum robot // J. Inst. Eng. — 2011. — Vol. 8, no. 1. — P. 188—196.
- [13] Bature A. A., Buyamin S., Ahmad M. N., Muhammad M. A Comparison of controllers for balancing two wheeled inverted pendulum robot // Int. J. Mech. Mechatron. Eng. IJMME-IJENS. — 2014. — Vol. 14, no. 3. — P. 62—68.
- [14] Jones D. R., Stol K. A. Modelling and stability control of two-wheeled robots in low-traction environments // Australasian Conf. on Robotics and Automation, 2010. Brisbane, Australia. — P. 1—9.
- [15] Li Ch., Gao X., Li K. Smooth control the coaxial self-balance robot under impact disturbances // Int. J. Adv. Robotic Syst. — 2011. — Vol. 8, no. 2. — P. 59—67.

- [16] Pacejka H. B. Tyre and Vehicle Dynamics.— Oxford: Butterworth—Heinemann, 2006.
- [17] Salerno A., Angeles J. The control of semi-autonomous two-wheeled robots undergoing large payload-variations // Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 2004. Vol. 2. — P. 1740—1745.
- [18] Sharp R. S., Bettella M. On the construction of a general numerical tyre shear force model from limited data // Proc. of the Inst. of Mech. Eng., Pt. D: J. Automobile Eng. — 2003. — Vol. 217, no. 3. — P. 165—172.
- [19] Yi J., Song D., Zhang J., Goodwin Z. Adaptive trajectory tracking control of skid-steered mobile robots // Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Rome, Italy, 2007. — P. 2605—2610.

