Анализ чувствительности некоторых прикладных моделей теории вероятностей*

Е. В. БУЛИНСКАЯ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ebulinsk@yandex.ru

Б. И. ШИГИДА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: borshigida@gmail.com

УДК 519.21

Ключевые слова: модели, анализ чувствительности, устойчивость, оптимальность.

Аннотация

В последние два десятилетия в актуарной математике появлялись новые модели, вводились различные понятия разорения (банкротства) страховой компании и другие функции, характеризующие качество функционирования компании. Для того чтобы оптимизировать поведение компании, используются различные типы финансовых решений, такие, как выплата дивидендов, перестрахование, инвестирование. Исходя из этого, важно знать, что изучаемая модель устойчива по отношению к изменению параметров случайного процесса, который используется в этой модели. Цель данной статьи — описание методов, применяемых для исследования таких задач, а также изложение последних результатов для некоторых моделей страхования. Также включены численные результаты.

Abstract

E. V. Bulinskaya, B. I. Shigida, Sensitivity analysis of some applied probability models, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 3, pp. 19—35.

During the last two decades, new models were developed in actuarial sciences. Different notions of insurance company ruin (bankruptcy) and other objective functions evaluating the company performance were introduced. Several types of decision (such as dividend payment, reinsurance, investment) are used for optimization of company functioning. Therefore, it is necessary to be sure that the model under consideration is stable with respect to parameter fluctuation and perturbation of underlying stochastic processes. The aim of this paper is the description of methods for investigation of these problems and presentation of recent results concerning some insurance models. Numerical results are also included.

*Работа частично поддерживалась грантом РФФИ № 17-01-00468.

© 2018 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

1. Введение

Страхование — это механизм передачи риска, который подразумевает полное или частичное возмещение убытков, возникших из-за не зависящих от страхователя событий. После заключения страхового контракта страховщик компенсирует страхователю определённые убытки, если они возникли из-за определённых событий в течение определённого периода времени, в то время как страхователь платит страховые премии. Отсюда ясно, что возникают два денежных потока (премии и возмещения) и описывающие их математические модели имеют тип «вход-выход». Достаточно очевидна связь с такими областями прикладной теории вероятностей, как теория массового обслуживания, теория запасов и многие другие. Поэтому методы, применяемые в одной области, могут оказаться полезными и в других.

Актуарная математика — это дисциплина, которая оценивает риски в страховании, финансах и других областях исследования, используя математические и статистические методы (см., например, [31]). История актуарной математики длинна и интересна (см., например, [14]). Здесь мы только напомним, что её начало связывают с появлением таблиц смертности Э. Галлея в 1693 году. Ещё одно важное достижение первого (детерминистического) периода — это введение в 1738 году функций полезности Д. Бернулли. Второй (стохастический) период характеризуется теорией коллективного риска, начало которой положил Ф. Лундберг и которую позже развил Г. Крамер. В третьем (финансовом) периоде происходит соединение стохастических актуарных моделей с современной финансовой теорией и использованием высокоскоростных компьютеров. Этот период очень короткий (не более трёх десятилетий) по сравнению с предыдущими двумя. Наступление четвёртого (современного) периода было анонсировано П. Эмбрехтсом в 2005 году (см., например, [3]). Важнейшая черта этого периода — появление общеорганизационного управления рисками и необходимость работать не только с рисками катастроф и финансовыми рисками, но и с операционными и стратегическими рисками (см. [17]).

Чтобы описать любую модель типа вход-выход, мы должны определить входной поток $P(t)$ (премии), выходной поток $S(t)$ (требования) и горизонт планирования $T \leqslant \infty$. Обычно капитал страховой компании $X(t)$ в момент t задаётся выражением

$$X(t) = x + P(t) - S(t), \tag{1}$$

где x — начальный капитал. Классическая модель Крамера—Лундберга, так же как и модель Спарре Андерсена, имеет смешанный характер. Премии не случайны: $P(t) = ct$, где $c > 0$ — постоянная скорость поступления премий. Суммарные же страховые выплаты от нуля до времени t случайны и имеют вид

$$S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n.$$

Здесь Y_n — это n-я выплата, $N(t)$ — количество выплат до момента t. В модели Крамера—Лундберга $N(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а для модели Спарре Андерсена $N(t)$ — какой-то процесс восстановления (не обязательно пуассоновский). В обеих моделях Y_n являются неотрицательными н. о. р. случайными величинами, независимыми с $N(t)$.

В страховании жизни возникают двойственные модели, в которых вместо (1) имеем

$$X(t) = x - ct + S(t).$$

У этой модели есть и другие интерпретации. Например, мы можем считать, что заданный случайный процесс моделирует капитал какой-либо компании, задействованный в исследовательской работе (см., например, [6]). Компания непрерывно выделяет деньги на исследования, а доходы приходят время от времени и являются случайными (например, награда за патент или внезапное увеличение продаж), и их появление происходит в соответствии с пуассоновским процессом. Похожая модель использовалась в [8] для описания функционирования венчурной инвестиционной компании.

Для оптимизации работы компании нужно выбрать целевую функцию (критерий, меру риска) и определить множество допустимых финансовых решений. Самые популярные подходы — надёжностный и стоимостной. Одна из причин этого — двойственная природа страховой компании. Сначала существовали только общества взаимного страхования, целью которых была передача и перераспределение рисков. Позже всё чаще стали встречаться акционерные компании. Таким образом, главная задача страховой компании — возмещение убытков держателей страхового полиса. Это значит, что компании необходимо иметь достаточно денег, чтобы удовлетворить все требования. Другими словами, важно максимизировать вероятность неразорения, то есть надёжность компании. Надёжностный подход, введённый Крамером и Лундбергом, всё ещё очень популярен (см., например, [4]).

Второстепенная, но очень важная, задача — это выплата дивидендов акционерам компании. Благодаря новаторской работе [20] в актуарной математике в середине прошлого века стал использоваться стоимостной подход. С тех пор ожидаемые дисконтированные дивиденды до разорения широко используются как целевая функция, которую нужно максимизировать (см., например, [5]). Минимизация издержек, возникающих из-за использования банковских кредитов и из-за инфляции, была рассмотрена в [11] для моделей с дискретным временем.

Также стоит упомянуть так называемую функцию Гербера—Шиу, оценивающую убыток из-за разорения, и её обобщения (см., например, [9]). Использование таких функций показывает, что возможно объединение указанных подходов.

Другие задачи, интересные для любой страховой компании, — выбор политики андеррайтинга, принципов вычисления премий и резервов для защиты от банкротства (см., например, [1, 29]). Также очень важными решениями являются выплата дивидендов, перестрахование и инвестиции.

2. Новые целевые функции

Рассмотрение проблем платёжеспособности (см., например, [33]) привело к появлению таких понятий, как парижское разорение, абсолютное разорение, омега-модели. Из-за практической важности эти задачи всё больше привлекают внимание специалистов в теории риска.

Парижское разорение происходит, если капитал компании опустится ниже определённого критического уровня (красная зона) и будет находиться ниже его в течение промежутка времени длины d. В каком-то смысле это более подходящая мера риска, чем классическое разорение, это даёт компании какое-то время, чтобы привести финансы в порядок (см., например, [18, 28]). В другом типе парижского разорения вместо фиксированной задержки разорения d используется случайная задержка. В этих двух типах отсчёт задержки разорения начинается каждый раз, когда капитал входит в красную зону. В [25] предложено не запускать новый отсчёт много раз, а использовать полное время нахождения ниже критического уровня, это составляет третий тип парижского разорения.

Одна из первых работ, в которых рассматривается абсолютное разорение, — это [22]. Когда капитал ниже нуля, страховщик может занять денег по специальной дефицитной ставке, в это время оплачивая свои долги из доходов от премий; тогда капитал может вернуться в положительную область. Но когда капитал ниже какого-то определённого критического уровня, он уже не может стать положительным. Говорят, что в этот момент произошло абсолютное разорение (см., например, [21]).

В омега-модели делается различие между разорением (отрицательный капитал) и банкротством (выход из бизнеса). Предполагается, что даже с отрицательным капиталом компания может продолжать работать как обычно, до тех пор пока не наступит банкротство. Вероятность банкротства задаётся функцией $\omega(x)$, где x — значение отрицательного капитала. Символ, которым эта функция обозначается, дал название такой модели (см., например, [2]).

Первая цель данной статьи — провести асимптотический анализ и оптимизацию для некоторых моделей описанного выше типа. Точнее, мы вводим новый индикатор производительности страховой компании, а именно первый момент η_l^X, когда капитал провёл выше нуля промежуток времени длиннее l без перерыва. Для модели Крамера—Лундберга выводится явный вид преобразования Лапласа величины η_l^X как функции от параметров модели.

Вторая цель — исследовать устойчивость модели по отношению к изменению параметров. В предположении, что размеры выплат имеют экспоненциальное распределение с параметром α, мы проводим анализ чувствительности $P\big(\tau_d^X > \eta_l^X\big)$, т. е. вероятности того, что η_l^X произойдёт раньше парижского разорения с детерминированной задержкой d. Для этого мы используем локальные и глобальные методы из [32]. Сначала мы строим диаграммы рассеивания по отношению ко всем параметрам λ, c, α, x, d и l с помощью метода Монте-Карло. Этот же метод используется для подсчёта показателей чувствительности Соболя первого порядка и показателей полного эффекта.

3. Модель Крамера—Лундберга с парижским разорением

Мы рассматриваем классическую модель Крамера—Лундберга, т. е. капитал компании описывается (1), где N_t — пуассоновский процесс с параметром λ. Также предполагается, что выполняется условие чистой прибыли $c > \lambda\mu$, здесь c — это скорость поступления премий, μ — математическое ожидание размера страховой выплаты.

Следуя [19], для исследования парижского разорения с фиксированной задержкой d мы вводим две случайные величины

$$g_t^X = \sup\{s < t \mid \operatorname{sign}(X_s)\operatorname{sign}(X_t) \leqslant 0\},$$
$$d_t^X = \inf\{s > t \mid \operatorname{sign}(X_s)\operatorname{sign}(X_t) \leqslant 0\},$$

где $\sup\{\varnothing\} = 0$, $\inf\{\varnothing\} = \infty$ и

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Между g_t^X и d_t^X процесс имеет тот же знак, что во время t.

3.1. Новый показатель производительности страховой компании

Теперь мы можем ввести следующее определение.

Определение 1. Момент парижского разорения τ_d^X — это первый момент, когда процесс X непрерывно находился ниже нуля в течение промежутка длины d, т. е.

$$\tau_d^X = \inf\bigl\{t > 0 \mid 1_{\{X_t<0\}}(t - g_t^X) \geqslant d\bigr\}.$$

Очевидно, $P\bigl(\tau_d^X < \infty\bigr)$ и $P\bigl(\tau_d^X \leqslant t\bigr)$ — вероятности полного парижского разорения и парижского разорения за конечное время соответственно.

Для упрощения последующих рассуждений мы предполагаем, что размеры выплат имеют экспоненциальное распределение с параметром α, а именно их плотность $p(x)$ равна $\alpha e^{-\alpha x}$ для $x \geqslant 0$. Тогда условие чистой прибыли может быть записано в виде $c > \lambda/\alpha$. В большей части статьи считается, что начальный капитал x равен 0.

Введём вспомогательный процесс Z_t^X с двумя состояниями:

$$Z_t^X = \begin{cases} 1, & X_t > 0, \\ 2, & X_t < 0. \end{cases}$$

В этом определении мы намеренно игнорируем ситуацию, когда $X_t = 0$. Причина этого — равенство

$$\int_0^t 1_{\{X_u=0\}}\,du = 0.$$

Легко переписать определённые выше случайные величины в терминах процесса Z^X:

$$g_t^X = \sup\bigl\{s < t \mid Z_t^X \neq Z_s^X\bigr\}, \quad d_t^X = \inf\bigl\{s > t \mid Z_t^X \neq Z_s^X\bigr\},$$
$$\tau_d^X = \inf\bigl\{t > 0 \mid 1_{\{Z_t^X=2\}}(t - g_t^X) \geqslant d\bigr\}$$

и ввести время $V_t^X = t - g_t^X$, проведённое Z^X в текущем состоянии. Нетрудно установить, что двумерный процесс $\bigl(Z_t^X, V_t^X\bigr)$ марковский. Тогда Z_t^X полумарковский с пространством состояний $\{1, 2\}$, где состояние 1 соответствует нахождению X выше нуля, а 2 — ниже нуля.

Чтобы найти переходные вероятности Z^X, мы рассматриваем две последовательности случайных величин $U_{i,k}^X$, $i = 1, 2$, $k \geqslant 1$. Здесь $U_{i,k}^X$ — время, проведённое в состоянии i в течение k-го посещения этого состояния. Для любых i и k существует такое t, что $U_{i,k}^X = V_{d_t^X}^X = d_t^X - g_t^X$. Поскольку X — составной пуассоновский процесс с экспоненциальными скачками, каждая из последовательностей $U_{1,k}^X$ и $U_{2,k}^X$ состоит из н. о. р. случайных величин, более того, эти последовательности независимы. Поэтому мы можем определить переходную плотность Z^X следующим соотношением:

$$p_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < U_{i,k}^X < t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad j \neq i.$$

Вероятность того, что процесс проведёт в состоянии i не больше t, задаётся соотношением

$$P_{ij}(t) = \int_0^t p_{ij}(u)\,du = P\bigl(U_{i,k}^X < t\bigr) = 1 - \bar{P}_{ij}(t) = 1 - P\bigl(U_{i,k}^X > t\bigr).$$

Отметим, что по закону больших чисел для процесса X, при условии чистой прибыли, $X(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ с вероятностью 1. Поэтому возможно, что процесс Z^X останется навсегда в состоянии 1 в течение k-го захода в это состояние при любом $k \geqslant 1$, т. е. $P\bigl(U_{1,k}^X = \infty\bigr) > 0$.

Чтобы вычислить $p_{ij}(t)$, мы используем преобразование Лапласа этой функции:

$$\hat{P}_{ij}(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta t} p_{ij}(t)\,dt = E\bigl(e^{-\beta U_{i,k}^X}\bigr).$$

Для работы с $U_{2,k}^X$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, полезно рассматривать момент остановки

$$T_x = \inf\{t > 0,\ X_t = 0 \mid X_0 = x,\ x < 0\}.$$

Лемма 1. *Справедливо следующее равенство*:

$$E\big(e^{-\beta T_x}\big) = e^{\upsilon_\beta^+ x},$$

где

$$\upsilon_\beta^+ = \frac{\sqrt{(c\alpha+\beta+\lambda)^2 - 4c\alpha\lambda} - (c\alpha-\beta-\lambda)}{2c}.$$

Доказательство. Результат основан на [23]. □

Определение 2. Модифицированная функция Бесселя первого рода задаётся соотношением

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)},$$

где ν — порядок функции.

Чтобы сформулировать две следующие леммы, доказанные в [19], нам нужна только $I_1(z)$.

Лемма 2. *Переходная плотность* $p_{21}(t)$ *равна*

$$p_{21}(t) = \sqrt{\frac{c\alpha}{\lambda}}\, e^{-(\lambda+c\alpha)t} t^{-1} I_1\big(2t\sqrt{c\lambda\alpha}\big).$$

Доказательство. По определению X и $U_{2,k}^X$ можно получить следующую цепочку равенств:

$$\hat{P}_{21}(\beta) = E\big(e^{-\beta U_{2,k}^X}\big) = \int_0^\infty e^{-\beta T_{-x}} \alpha e^{-\alpha x}\,dx = \int_0^\infty e^{-\upsilon_\beta^+ x} \alpha e^{-\alpha x}\,dx =$$
$$= 2c\alpha\big(\sqrt{(c\alpha+\beta+\lambda)^2 - 4c\alpha\lambda} + (c\alpha+\beta+\lambda)\big)^{-1}.$$

Использовалось, что каждая экскурсия ниже нуля начинается с отрицательного перескока величиной $|x|$, который сам по себе имеет экспоненциальное распределение с параметром α, а экскурсия имеет длину T_x.

Используя [7], легко установить утверждение леммы. Действительно, если преобразование Лапласа

$$\hat{F}(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta t} f(t)\,dt$$

функции $f(t)$ имеет вид

$$\hat{F}(\beta) = \big((\beta^2 - a^2)^{1/2} + \beta\big)^{-n},$$

то

$$f(t) = na^{-n} t^{-1} I_n(at).$$

В нашем случае выражение $\hat{P}_{21}(\beta)$ имеет именно такой вид (с точностью до дополнительного множителя $2c\alpha$) при $n = 1$, $a = 2\sqrt{c\alpha\lambda}$ и $c\alpha + \beta + \lambda$ вместо β.

Используя свойства обратного преобразования Лапласа, мы получаем желаемый вид $p_{21}(t)$. □

Лемма 3. *Переходная плотность* $p_{12}(t)$ *равна*

$$p_{12}(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{c\alpha}}\, e^{-(\lambda+c\alpha)t} t^{-1} I_1\big(2t\sqrt{c\lambda\alpha}\,\big).$$

Доказательство. Чтобы исследовать промежутки пребывания выше нуля, полезно ввести следующий момент остановки:

$$T_0 = \inf\{t > 0,\ X_t < 0 \mid X_0 = 0\}.$$

Используя [24] и независимость размера перескока ниже нуля и времени пребывания выше нуля, т. е. T_0 и X_{T_0}, имеем

$$E\big(e^{-\beta T_0}\big) E\big(e^{\upsilon_\beta^- X_{T_0}}\big) = 1,$$

где

$$\upsilon_\beta^- = \frac{-\sqrt{(c\alpha+\beta+\lambda)^2 - 4c\alpha\lambda} - (c\alpha - \beta - \lambda)}{2c}. \tag{2}$$

Поскольку $|X_{T_0}|$ распределена экспоненциально с параметром α, имеем

$$\hat{P}_{12}(\beta) = E\big(e^{-\beta U_{1,k}^X}\big) = E\big(e^{-\beta T_0}\big) = \left[\int\limits_0^\infty e^{-\upsilon_\beta^- x} \alpha e^{-\alpha x}\, dx\right]^{-1} =$$
$$= 2\lambda\big(\sqrt{(\beta+\lambda+c\alpha)^2 - 4c\lambda\alpha} + \beta + \lambda + c\alpha\big)^{-1}. \tag{3}$$

Беря обратное преобразование Лапласа и снова используя формулы из [7], мы заканчиваем доказательство. □

Чтобы получить новую меру производительности страховой компании, вводим, как в [15], следующее определение.

Определение 3. Обозначим через

$$\eta_l^X = \inf\big\{t > 0 \mid 1_{\{Z_t^X = 1\}}(t - g_t^X) \geqslant l\big\}$$

первый момент, когда капитал компании находился выше нуля в течение промежутка длиннее l без перерыва.

Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема 1. *Для процесса* X_t *с* $x = 0$ *справедлив следующий результат*:

$$E\big(e^{-\beta\eta_l^X} I\big\{\tau_d^X > \eta_l^X\big\}\big) = \frac{e^{-\beta l}\bar{P}_{12}(l)}{1 - \tilde{P}_{21}(\beta)\tilde{P}_{12}(\beta)}, \tag{4}$$

где

$$\bar{P}_{12}(l) = 1 - \sqrt{\frac{\lambda}{c\alpha}} \int\limits_0^l e^{-(\lambda+c\alpha)t} t^{-1} I_1(2t\sqrt{\lambda c\alpha})\, dt,$$

$$\tilde{P}_{21}(\beta) = \sqrt{\frac{c\alpha}{\lambda}} \int\limits_0^d e^{-(\beta+\lambda+c\alpha)t} t^{-1} I_1(2t\sqrt{\lambda c\alpha})\, dt,$$

$$\tilde{P}_{12}(\beta) = \sqrt{\frac{\lambda}{c\alpha}} \int\limits_0^l e^{-(\beta+\lambda+c\alpha)t} t^{-1} I_1(2t\sqrt{\lambda c\alpha})\, dt,$$

а $I_1(\cdot)$ — *модифицированная функция Бесселя первого рода.*

Доказательство. Положим

$$B_k = \{\eta_l^X \text{ достигается в течение } k\text{-го нахождения в состоянии } 1\}.$$

Тогда ясно, что

$$B_k \cdot \{\tau_d^X > \eta_l^X\} = \{U_{1,1} < l\} \cdot \ldots \cdot \{U_{1,k-1} < l\} \cdot \{U_{1,k} \geqslant l\} \times \\ \times \{U_{2,1} < d\} \cdot \ldots \cdot \{U_{2,k-1} < d\}.$$

Используя, что при $k \geqslant 1$ на множестве B_k имеем

$$\eta_l^X = \sum_{n=1}^{k-1} (U_{1,n}^X + U_{2,n}^X) + l$$

(пустая сумма равна по определению нулю), получаем

$$E\big(e^{-\beta\eta_l^X} I\{\tau_d^X > \eta_l^X\}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(e^{-\beta\left(\sum_{n=1}^{k-1}(U_{1,n}^X + U_{2,n}^X)+l\right)} I_{B_k} I\{\tau_d^X > \eta_l^X\}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta l} \left(\int\limits_0^l e^{-\beta t} p_{12}(t)\, dt\right)^{k-1} \left(\int\limits_0^d e^{-\beta t} p_{21}(t)\, dt\right)^{k-1} \bar{P}_{12}(l) =$$

$$= \frac{e^{-\beta l}\bar{P}_{12}(l)}{1 - \int\limits_0^l e^{-\beta t} p_{12}(t)\, dt \int\limits_0^d e^{-\beta t} p_{21}(t)\, dt} = \frac{e^{-\beta l}\bar{P}_{12}(l)}{1 - \tilde{P}_{21}(\beta)\tilde{P}_{12}(\beta)}. \qquad \square$$

Следствие 1. *Для процесса* X_t *с* $X_0 = x = 0$

$$P\big(\tau_d^X > \eta_l^X\big) = \frac{\bar{P}_{12}(l)}{1 - P_{21}(d)P_{12}(l)}.$$

Доказательство. Очевидно, утверждение следует из теоремы 1, если положить $\beta = 0$ в (4) и использовать соотношения $\tilde{P}_{12}(0) = P_{12}(l)$ и $\tilde{P}_{21}(0) = P_{21}(d)$. $\square$

Теперь мы должны рассмотреть случай $x > 0$. Тогда $U_{1,1}^X$ имеет распределение, отличающееся от распределений $U_{1,k}^X$, $k \geqslant 2$.

Лемма 4. *Пусть $X_0 = x > 0$. Тогда плотность распределения $U_{1,1}^X$ — следующая функция*:

$$g_{12}(t) = \frac{\lambda e^{-\alpha x} e^{-(c\alpha+\lambda)t}}{ct+x}\Bigg(xI_0\big(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\,\big) + \\ + \frac{ct}{\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}} I_1\big(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\big)\Bigg), \quad t \geqslant 0. \quad (5)$$

Доказательство. В [19] показано, что

$$E\big(e^{-\beta U_{1,1}^X} \mid X_0 = x\big) = \frac{\alpha + v_\beta^-}{\alpha} e^{v_\beta^- x},$$

где v_β^- определено так же, как в (2). Итак, нам нужно найти обратное преобразование Лапласа функции

$$\hat{\rho}(\beta) := \frac{\alpha + v_\beta^-}{\alpha} e^{v_\beta^- x}.$$

Положим $a := 2\sqrt{c\alpha\lambda}$, $s := \sqrt{p^2 - a^2}$ и

$$g(p) := -\frac{e^{-\alpha x}}{2c\alpha} p e^{-(x/(2c))p}.$$

Зная, что обратное преобразование Лапласа pe^{-p} — это $\delta'(u-1)$, мы легко видим, что

$$\mathcal{L}^{-1} g =: f(u) = -\frac{e^{-\alpha x}}{2c\alpha}\delta'\left(u - \frac{x}{2c}\right).$$

Здесь δ обозначает дельта-функцию Дирака, следовательно, δ' понимается как обобщённая производная.

Пусть $g_1(p) := g(s-p) - g(0) = g(s-p)$. Обозначим $\mathcal{L}^{-1} g_1 =: f_1(t)$. Из [7, формула 5.1.(16)] известно, что

$$f_1(t) = at^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (t+2u)^{-1/2} I_1\big[at^{1/2}(t+2u)^{1/2}\big] u f(u)\, du.$$

Теперь нам нужно вычислить интеграл. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает действие обобщённой функции на тестовую. Имеем

$$\left\langle -\frac{e^{-\alpha x}}{2c\alpha}\delta'\left(u - \frac{x}{2c}\right), (t+2u)^{-1/2} I_1\big[at^{1/2}(t+2u)^{1/2}\big] u \right\rangle = \\ = \frac{e^{-\alpha x}}{2c\alpha}\left\langle \delta\left(u - \frac{x}{2c}\right), \frac{d}{du}\big((t+2u)^{-1/2} I_1[at^{1/2}(t+2u)^{1/2}]u\big)\right\rangle =$$

$$= \frac{e^{-\alpha x}}{2c\alpha}\left\langle \delta\left(u - \frac{x}{2c}\right), \frac{1}{2(t+2u)^{3/2}}\left(au\sqrt{t(t+2u)}I_0\left[a\sqrt{t(t+2u)}\,\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2(t+u)I_1\left[a\sqrt{t(t+2u)}\,\right] + au\sqrt{t(t+2u)}I_2\left[a\sqrt{t(t+2u)}\,\right]\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{e^{-\alpha x}}{4\sqrt{c}\alpha(ct+x)^{3/2}}\Big(x\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}I_0\big(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct)+x}\,\big) +$$

$$+ (2ct+x)I_1\big(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\,\big) + x\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}I_2\big(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\big)\Big).$$

Таким образом,

$$f_1(t) = \frac{\sqrt{\lambda}e^{-\alpha x}}{2\sqrt{\alpha}(ct+x)^{3/2}\sqrt{t}}\Big(x\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}I_0\big(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\,\big) +$$

$$+ (2ct+x)I_1\big(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\,\big) + x\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}I_2\big(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\,\big)\Big).$$

Пусть $g_2(p) := g_1(c\alpha+\lambda+p) = \hat{\rho}(p)$ (последнее равенство легко проверяется). Тогда

$$\mathcal{L}^{-1}g_2 = \mathcal{L}^{-1}\hat{\rho} =: \rho(t) = e^{-(c\alpha+\lambda)t}f_1(t).$$

Используя определение I_ν, можно показать, что $z\big(I_0(2z) - I_2(2z)\big) = I_1(2z)$. Тогда

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{\lambda}e^{-\alpha x}e^{-(c\alpha+\lambda)t}}{2\sqrt{\alpha}(ct+x)^{3/2}\sqrt{t}}\Big(2x\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}I_0\big(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\,\big) -$$

$$- xI_1\big(\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\,\big) + (2ct+x)I_1\big(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\,\big)\Big) = g_{12}(t). \quad \square$$

Теорема 2. *Для X_t с $X_0 = x > 0$ имеем*

$$E\big(e^{-\beta\eta_l^X}I\{\tau_d^X > \eta_l^X\}\big) = e^{-\beta l}\left(\bar{G}_{12}(l) + \frac{\tilde{G}_{12}(\beta)\tilde{P}_{21}(\beta)\bar{P}_{12}(l)}{1-\tilde{P}_{21}(\beta)\tilde{P}_{12}(\beta)}\right),$$

где

$$g_{12}(t) = \frac{\lambda e^{-\alpha x}e^{-(c\alpha+\lambda)t}}{ct+x} \times$$

$$\times\left(xI_0\big(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\big) + \frac{ct}{\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}}I_1\big(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\big)\right), \quad t \geqslant 0,$$

$$\bar{G}_{12}(l) = \int\limits_l^\infty g_{12}(t)\,dt,$$

$$\tilde{G}_{12}(\beta) = \int\limits_0^l e^{-\beta t}g_{12}(t)\,dt.$$

Доказательство. Из леммы 4

$$p_{U^X_{1,1}}(t) = g_{12}(t), \quad t \geqslant 0.$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned}
&E\big(e^{-\beta\eta_l^X} I\{\tau_d^X > \eta_l^X\}\big) = \\
&\quad = E\big(e^{-\beta\eta_l^X} I\{\tau_d^X > \eta_l^X\} I\{U^X_{1,1} \geqslant l\}\big) + E\big(e^{-\beta\eta_l^X} I\{\tau_d^X > \eta_l^X\} I\{U^X_{1,1} < l\}\big) = \\
&\quad = e^{-\beta l} P\big(U^X_{1,1} \geqslant l\big) + E\big(e^{-\beta\eta_l^X} I\{\tau_d^X > \eta_l^X\} I\{U^X_{1,1} < l,\ U^X_{2,1} < d\}\big) = \\
&\quad = e^{-\beta l} P\big(U^X_{1,1} \geqslant l\big) + E\big(e^{-\beta U^X_{1,1}} I\{U^X_{1,1} < l\}\big) E\big(e^{-\beta U^X_{2,1}} I\{U^X_{2,1} < d\}\big) \times \\
&\quad \times E\big(e^{-\beta\eta_l^{\tilde X}} I\{\tau_d^{\tilde X} > \eta_l^{\tilde X}\}\big) = e^{-\beta l}\bar G_{12}(l) + \tilde G_{12}(\beta)\tilde P_{21}(\beta)\frac{e^{-\beta l}\bar P_{12}(l)}{1 - \tilde P_{21}(\beta)\tilde P_{12}(\beta)},
\end{aligned}$$

где $\tilde X$ — такой же процесс с $\tilde X_0 = 0$. Для последнего равенства использовалась теорема 1. □

Следствие 2. *Для процесса X_t с $X_0 = x > 0$*

$$P\big(\tau_d^X > \eta_l^X\big) = \bar G_{12}(l) + \frac{G_{12}(l)P_{21}(d)\bar P_{12}(l)}{1 - P_{21}(d)P_{12}(l)}.$$

3.2. Анализ чувствительности

Теперь мы анализируем чувствительность вероятности, полученной в следствии 2, по отношению к малым флуктуациям параметров.

3.2.1. Диаграммы рассеивания

Вероятность $P\big(\tau_d^X > \eta_l^X\big)$ — это функция шести параметров λ, c, α, x, d, l. Рассматривая эти параметры как независимые случайные величины, равномерно распределённые соответственно на отрезках $[0{,}5, 1{,}5]$, $[2{,}0, 4{,}0]$, $[0{,}55, 0{,}95]$, $[1{,}5, 2{,}5]$, $[2{,}0, 16{,}0]$, $[2{,}0, 16{,}0]$, мы генерируем $N = 20\,000$ значений данной функции, используя язык программирования Python. Тогда мы получаем шесть диаграмм рассеивания (рис. 1). Серым цветом обозначены точки, в которых не выполняется условие чистой прибыли. Из графиков можно видеть, что первые три параметра влияют больше всего, в то время как модель практически нечувствительна к изменениям x на выбранном отрезке, остальные два параметра также мало влияют на результат. Поскольку функция довольно сложна, для ясности картины N выбрано очень большим. Не так легко сказать, какие из трёх параметров в этом случае оказывают наибольшее влияние.

3.2.2. Индексы чувствительности Соболя

Рассмотрим вывод модели $Y = h(X_1, \ldots, X_k)$ как функцию k параметров. В случае когда присутствует неопределённость в значениях параметров, важно установить параметры (или группы параметров) с наибольшим влиянием и

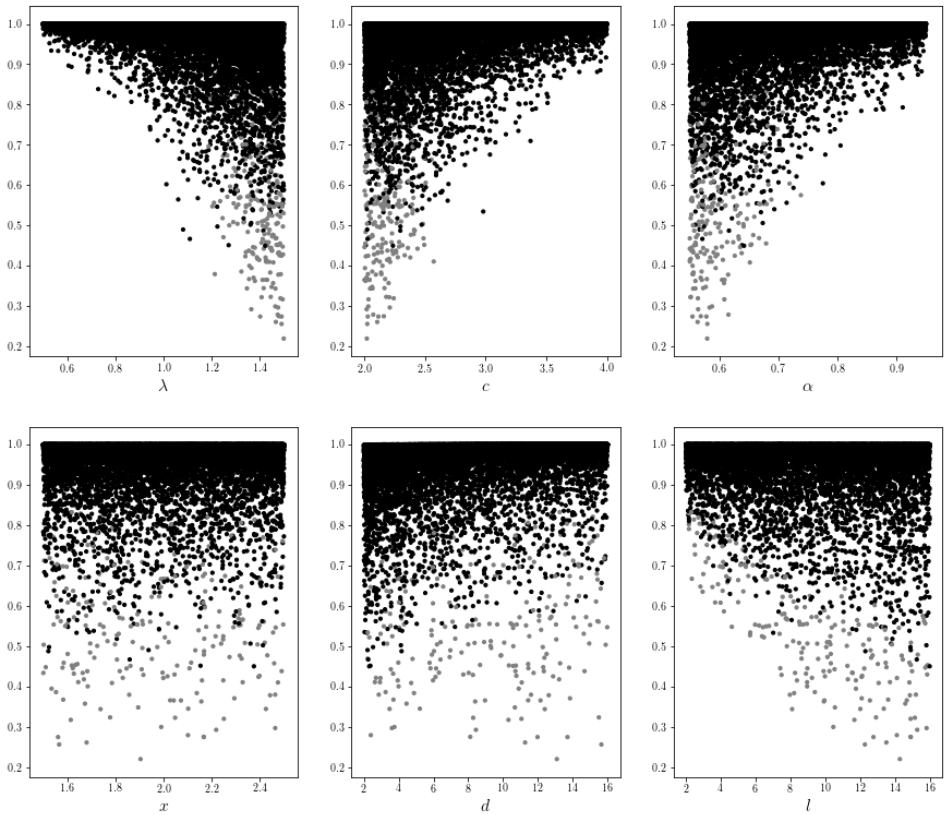

Рис. 1. Диаграммы рассеивания, соответствующие λ, c, α, x, d, l

те параметры, влияние которых пренебрежимо и которые поэтому можно просто зафиксировать в какой-то точке. Для этого мы можем использовать метод разложения Соболя.

Возьмём квадратично-интегрируемую в k-мерном единичном гиперкубе функцию h. И. М. Соболь рассматривает разложение h в сумму слагаемых возрастающей размерности

$$h = h_0 + \sum_i h_i + \sum_i \sum_{j>i} h_{ij} + \ldots + h_{12\ldots k}, \tag{6}$$

в которой каждое слагаемое тоже квадратично-интегрируемая в области определения функция от параметров, которые указаны в индексе, т. е. $h_i = h_i(X_i)$, $h_{ij} = h_{ij}(X_i, X_j)$ и т. д.

Это разложение не единственно, для данной модели h слагаемые можно выбрать бесконечным числом способов. Однако И. М. Соболь доказал, что если

каждое слагаемое имеет нулевое среднее, то все слагаемые попарно ортогональны. Отсюда следует, что они могут быть единственным образом выбраны как условные математические ожидания вывода модели Y. В частности, $h_0 = E(Y)$, $h_i = E(Y \mid X_i) - E(Y)$, $h_{ij} = E(Y \mid X_i, X_j) - h_i - h_j - E(Y)$.

Дисперсии слагаемых в разложении (6) — меры риска, которые мы и хотим найти. В частности, $V\big(h_i(X_i)\big)$ — это $V[E(Y \mid X_i)]$, поэтому, разделив на безусловную дисперсию $V(Y)$, получаем показатель чувствительности первого порядка:

$$S_i = \frac{V[E(Y \mid X_i)]}{V(Y)}.$$

Показатель первого порядка показывает главный вклад каждого входящего параметра в дисперсию результата.

Приведём разложение дисперсии, называемое ANOVA-HDMR:

$$V(Y) = \sum_i V_i + \sum_i \sum_{j>i} V_{ij} + \ldots + V_{12\ldots k}.$$

Из него немедленно получаем

$$\sum_i S_i + \sum_i \sum_{j>i} S_{ij} + \sum_i \sum_{j>i} \sum_{l>j} S_{ijl} + \ldots + S_{123\ldots k} = 1.$$

Показатель полного эффекта показывает полный вклад параметра X_i в дисперсию вывода модели, т. е. показатель первого порядка плюс все показатели бóльших порядков, которые отвечают за зависимости между параметрами. В этот раз мы возьмём условные математическое ожидание и дисперсию по всем параметрам, кроме одного, т. е. по $X_{\sim i}$, и получим

$$S_{T_i} = \frac{E[V(Y \mid X_{\sim i})]}{V(Y)} = 1 - \frac{V[E(Y \mid X_{\sim i})]}{V(Y)}.$$

В нашем случае

$$Y = P\big(\tau_d^X > \eta_l^X\big) = h(\lambda, c, \alpha, x, d, l),$$

поэтому $X_1 = \lambda$, $X_2 = c$, $X_3 = \alpha$, $X_4 = x$, $X_5 = d$ и $X_6 = l$.

Использовав для вычисления показателей алгоритм, предложенный А. Салтелли (см. [32]), мы получили следующие численные результаты:

$$\begin{aligned}
S_\lambda &= 0.110283, & S_{T_\lambda} &= 0.614771,\\
S_c &= 0.287198, & S_{T_c} &= 0.423226,\\
S_\alpha &= 0.184212, & S_{T_\alpha} &= 0.363177,\\
S_x &= 0.004655, & S_{T_x} &= -0.001089,\\
S_d &= 0.041623, & S_{T_d} &= 0.072961,\\
S_l &= 0.013070, & S_{T_l} &= 0.060872.
\end{aligned}$$

Эти показатели подтверждают высказанные нами выше выводы о влиянии первых трёх параметров. Отрицательное значение индекса означает, что ошибка вычислений больше, чем действительное значение.

4. Выводы и направления для дальнейшего исследования

Мы коротко обсудили новые модели, которые появились в последние два десятилетия, и задачи, которые важны для их применения.

Для омега-модели, двойственной модели страхования Крамера—Лундберга (см. [27]), ожидаемые дисконтированные дивиденды в стратегии с барьером можно получить как решения интегродифференциального уравнения. Поэтому можно получить условия устойчивости решений по Ляпунову. Ещё один подход к устойчивости этих моделей по отношению к изменениям распределений — применение вероятностных метрик в соответствии с [30]. Также была рассмотрена оптимизация политики дивидендов. Эти результаты будут опубликованы позже.

Для моделей с дискретным временем мы используем те же методы, что в [10, 12,13,16]. Из-за недостатка места мы не смогли даже точно сформулировать эти результаты и привести численные данные и графики.

Литература

[1] Abdallah A., Boucher J. P., Cossette H. Modeling dependence between loss triangles with hierarchical Archimedean copulas // ASTIN Bull. — 2015. — Vol. 45. — P. 577—599.

[2] Albrecher H., Gerber H. U., Shiu E. S. W. The optimal dividend barrier in the Gamma-Omega model // Europ. Actuar. J. — 2011. — Vol. 1. — P. 43—55.

[3] D'Arcy S. P. On becoming an actuary of the fourth kind // Proc. Casualty Actuar. Soc. — 2005. — Vol. 177. — P. 745—754.

[4] Asmussen S., Albrecher H. Ruin Probabilities. — New Jersey: World Scientific, 2010.

[5] Avanzi B. Strategies for dividend distribution: A review // North Am. Actuar. J. — 2009. — Vol. 13, no. 2. — P. 217—251.

[6] Avanzi B., Gerber H. U., Shiu E. S. W. Optimal dividends in the dual model // Insurance Math. Econ. — 2007. — Vol. 41, no. 1. — P. 111—123.

[7] Bateman H. Table of Integral Transforms. Vol. I. — New York: McGraw-Hill, 1954.

[8] Bayraktar E., Egami M. Optimizing venture capital investment in a jump diffusion model // Math. Methods Operat. Res. — 2008. — Vol. 67, no. 1. — P. 21—42.

[9] Breuer L., Badescu A. A generalised Gerber–Shiu measure for Markov-additive risk processes with phase-type claims and capital injections // Scand. Actuar. J. — 2014. — No. 2. — P. 93—115.

[10] Bulinskaya E. V. Systems stability and optimal control // J. Math. Sci. — 1998. — Vol. 92, no. 3. — P. 3857—3872.

[11] Bulinskaya E. V. On a cost approach in insurance // Rev. Appl. Ind. Math. — 2003. — Vol. 10, no. 2. — P. 376—386.

[12] Bulinskaya E. V. Sensitivity analysis of some applied models // Pliska Stud. Math. Bulgar. — 2007. — Vol. 18. — P. 57—90.

[13] Bulinskaya E. V. Stochastic insurance models: their optimality and stability // Advances in Data Analysis / Skiadas Ch. H., ed. — Boston: Birkhäuser, 2010. — P. 129—140.

[14] Bulinskaya E. New research directions in modern actuarial sciences // Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics — Selected Contributions in Honor of Valentin Konakov / Panov V., ed. — Berlin: Springer, 2017. — (Springer Ser. Math. Stat.).

[15] Bulinskaya E. Stability problems in modern actuarial sciences // Proc. of the Int. Conf. ACMPT-2017, 23—26 October 2017, Moscow. — 2017. — P. 435—439.

[16] Bulinskaya E., Gusak J. Optimal control and sensitivity analysis for two risk models // Commun. Statistics Simulat. Comput. — 2016. — Vol. 45, no. 5. — P. 1451—1466.

[17] Cruz M. G., Peters G. W., Shevchenko P. V. Fundamental Aspects of Operational Risk and Insurance Analytics: A Handbook of Operational Risk. — Wiley, 2015.

[18] Czarna I., Palmowski Z. Ruin probability with Parisian delay for a spectrally negative Lévy risk process // J. Appl. Probab. — 2011. — Vol. 48. — P. 984—1002.

[19] Dassios A., Wu Sh. Parisian ruin with exponential claims. — `stats.lse.ac.uk/angelos/docs/exponentialjump.pdf`.

[20] De Finetti B. Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio // Transactions of the XV-th Int. Congress of Actuaries. Vol. 2. — 1957. — P. 433—443.

[21] Fu D., Guo Y. On the compound Poisson model with debit interest under absolute ruin // Int. J. Sci. Res. — 2016. — Vol. 5, no. 6. — P. 1872—1875.

[22] Gerber H. U. Der Einfluss von Zins auf die Ruinwahrscheinlichkeit // Mitteil. Verein. schweiz. Versich. — 1971. — Bd. 71, no. 1. — S. 63—70.

[23] Gerber H. U. When does the surplus reach a given target? // Insurance Math. Econ. — 1990. — Vol. 9. — P. 115—119.

[24] Gerber H. U., Shiu E. S. W. The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin // Insurance Math. Econ. — 1997. — Vol. 21. — P. 129—137.

[25] Guérin H., Renaud J.-F. On distribution of cumulative Parisian ruin. — `arXiv:1509.06857v1[math.PR]`.

[26] Landriault D., Renaud J.-F., Zhou X. Insurance risk models with Parisian implementation delays // Methodol. Comput. Appl. Probab. — 2014. — Vol. 16, no. 3. — P. 583—607.

[27] Liu D., Liu Z. Dividend problems with a barrier strategy in the dual risk model until bankruptcy // J. Appl. Math. — 2014. — 184098.

[28] Lkabous M. A., Czarna I., Renaud J.-F. Parisian ruin for a refracted Lévy process. — `arXiv:1603.09324[math.PR]`.

[29] Quang P. D. Ruin probability in a generalized risk process under interest force with homogenous Markov chain premiums // Int. J. Stat. Probab. — 2013. — Vol. 2, no. 4. — P. 85—92.

[30] Rachev S. T., Klebanov L., Stoyanov S. V., Fabozzi F. The Methods of Distances in the Theory of Probability and Statistics. — New York: Springer, 2013.

[31] Rachev S. T., Stoyanov S. V., Fabozzi F. J. Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, Portfolio Optimization. — Hoboken: Wiley, 2008.

[32] Saltelli A., Ratto M., Campolongo T., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S. Global Sensitivity Analysis. The Primer. — Wiley, 2008.

[33] Sandström A. Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers: Theory and Practice. — Chapman and Hall/CRC Press, 2011.