Вероятность превышения высокого уровня траекторией гауссовского процесса с дисперсией, достигающей максимума на дискретных множествах

С. Г. КОБЕЛЬКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: sergeyko81@gmail.com

УДК 519.218

Ключевые слова: нестационарные процессы, гауссовские процессы, максимум, метод Пикандса, метод двойных сумм.

Аннотация

Рассматривается вероятность превышения высокого уровня гауссовским локально стационарным процессом, дисперсия которого достигает максимума в нескольких точках отрезка. С помощью метода двойных сумм доказана точная асимптотика данной вероятности. Также для определённого вида процессов рассматривается случай, когда множество точек максимума дисперсии счётно и содержит предельную точку.

Abstract

S. G. Kobelkov, Ruin probability for a Gaussian process with variance attaining its maximum on discrete sets, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 3, pp. 83—90.

Ruin probability for a Gaussian locally stationary process is considered in the case where the process variance attains its maximum in a finite number of points. The double sum method is applied to calculate exact asymptotics of the corresponding probability. Also, we consider a family of processes with variance that has a countable set of maximum points containing a limit point.

1. Введение

Пусть X_t — гауссовский локально стационарный случайный процесс на отрезке $[0,1]$ с дисперсией σ_t^2 и корреляционной функцией $r(t,s)$.

Будем считать, что траектории случайного процесса удовлетворяют неравенству Гёльдера

$$E(X_t - X_s)^2 \leqslant G|t-s|^\gamma$$

для некоторых $G > 0$, $\gamma > 0$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2018, том 22, № 3, с. 83—90.

Предположим, что σ_t достигает своего максимума в единственной внутренней точке отрезка t_0, причём $\sigma_t(t_0) = 1$. Пусть также $r(t,s) = 1 - |t-s|^\alpha + o(|t-s|^\alpha)$ при $t \to t_0$, $s \to t_0$, $\alpha > 0$ и $r(t,s) < 1$ для всех $t \neq s$.

Теорема 1 [2]. *Если $\sigma_t = 1 - a|t-t_0|^\beta + o(|t-t_0|^\beta)$, $t \to t_0$, $\beta > 0, a > 0$, то*

$$P\Big(\sup_{[0,1]} X_t > u\Big) = G_{\alpha,\beta,a}(u)\big(1 + o(1)\big), \quad u \to \infty, \tag{1}$$

где

$$G_{\alpha,\beta,a}(u) = \frac{2H_\alpha \Gamma(\beta)}{\beta a^{1/\beta}} u^{2/\alpha - 2/\beta} \Psi(u),$$

если $\alpha < \beta$. H_α — константа Пикандса [4], $\Psi(u)$ — хвост стандартного нормального распределения.

Если $\alpha = \beta$, то $G_{\alpha,\beta,a}(u) = 2H_\alpha^a \Psi(u)$, где H_α^a — константа Питербарга.

Наконец, если $\alpha > \beta$, то $G_{\alpha,\beta,a}(u) = \Psi(u)$.

В данной работе рассматривается обобщение теоремы 1 на случай, когда дисперсия процесса достигает своего максимума в нескольких точках. Также рассмотрен пример семейства локально стационарных гауссовских процессов, дисперсия которых достигает своего максимума на счётном множестве точек, содержащем предельную точку.

2. Случай конечного числа точек максимума дисперсии

Теорема 2. *Пусть дисперсия локально стационарного гауссовского процесса σ_t^2 достигает своего максимального значения, равного 1, в нескольких внутренних точках $t_1, \ldots, t_N$ отрезка $[0,1]$ и $\sigma(t) = 1 - a_k|t-t_k|^{\beta_k} + o(|t-t_k|^{\beta_k})$ при $t \to t_k$, $a_k > 0$, $\beta_k > 0$, причём корреляция удовлетворяет соотношению $r(t,s) = 1 - |t-s|^{\alpha_k} + o(|t-s|^{\alpha_k})$ для $t \to t_k$, $s \to t_k$ и $r(t,s) < 1$ для $t \neq s$. Тогда*

$$P\Big(\sup_{[0,1]} X_t > u\Big) = \bigg(\sum_{i=1}^N G_{\alpha_i,\beta_i,a_i}(u)\bigg)\big(1 + o(1)\big) \tag{2}$$

при $u \to \infty$.

Заметим, что в (2) слагаемые могут иметь разную асимптотику по u. В таком случае члены суммы меньшего порядка можно опустить.

Доказательство. Положим $N = 2$. Для бóльших N рассмотрение аналогично. Определим $T_0 = 0$, $T_1 = t_* - \varepsilon$, $T_2 = t_* + \varepsilon$, $T_3 = 1$, где t_* и $\varepsilon > 0$ удовлетворяют условию $t_1 < t_* - \varepsilon < t_* + \varepsilon < t_2$; t_1, t_2 — точки максимума дисперсии. Определим события

$$A_i = \Big\{\sup_{[T_{i-1},T_i)} X_t > u\Big\}, \quad i = 1,2,3.$$

Тогда

$$P\Big(\sup_{[0,1]} X_t > u\Big) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - \\ - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3). \quad (3)$$

По теореме 1

$$P(A_1) = G_{\alpha_1,\beta_1,a_1}(u)\big(1+o(1)\big),$$
$$P(A_2) = o\big(\Psi(u)\big),$$
$$P(A_3) = G_{\alpha_2,\beta_2,a_2}(u)\big(1+o(1)\big)$$

при $u \to \infty$. Далее,

$$P(A_1A_2) \leqslant P(A_2), \quad P(A_2A_3) \leqslant P(A_2), \quad P(A_1A_2A_3) \leqslant P(A_2).$$

Таким образом, для доказательства теоремы остаётся показать, что

$$P(A_1A_3) = o\Big(\max\big(P(A_1), P(A_3)\big)\Big)$$

при $u \to \infty$.

Заметим, что

$$P(A_1A_3) \leqslant P\Big(\sup_{t\in[T_0,T_1],\ s\in[T_2,T_3]} X_t + X_s > 2u\Big).$$

Выберем $\delta > 0$, такое что $r(t,s) < 1-\delta$ для всех $t \in [T_0,T_1]$, $s \in [T_2,T_3]$. Оценим последнюю вероятность с помощью неравенства Бореля [2]. Имеем

$$\mathrm{Var}(X_t + X_s) = \sigma_t^2 + \sigma_s^2 + 2r(t,s)\sigma_t\sigma_s \leqslant 4 - 2\delta$$

для $t \in [0,T_1]$, $s \in [T_2,1]$. Следовательно, для некоторого a

$$P\Big(\sup_{t\in[T_0,T_1],\ s\in[T_2,T_3]} X_t + X_s > 2u\Big) \leqslant 2\Psi\left(\frac{2u-a}{\sqrt{4-2\delta}}\right) = o\big(\Psi(u)\big)$$

при $u \to \infty$. □

3. Случай счётного множества точек максимума дисперсии с предельной точкой

Пусть теперь локально стационарный случайный процесс X_t на $[0,1]$ имеет дисперсию $\sigma_t^2 = 1 - t^\beta \sin^2(1/t)$ и корреляционную функцию $r(t,s) = 1 - |t-s|^\alpha + o(|t-s|^\alpha)$, $t \to s$, $\alpha > 0$, $r(t,s) < 1$ при $t \neq s$.

Заметим, что максимум дисперсии достигается в точках вида $t_n = (\pi n)^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$; очевидно, что это множество имеет предельную точку $t = 0$.

Рассмотрим вероятность превышения большого уровня u процессом X_t в окрестности предельной точки:

$$P_s = P\Big(\sup_{[0,s]} X_t > u\Big).$$

Теорема 3. *Если $\alpha < \beta$, то*
$$P_{u^{-2/\beta}} = H_\alpha C u^{2/\alpha-2/\beta}(2\beta)^{-1}\Psi(u)\big(1+o(1)\big), \quad u\to\infty,$$
где
$$C = \int\limits_{-1}^{1} |y|^{-2/\beta}(1-y^2)^{-1/2}\left(\Gamma\left(\frac{1}{\beta},0\right)-\Gamma\left(\frac{1}{\beta},\frac{y^2}{2}\right)\right)dy,$$
$\Gamma(a,x)$ *— верхняя неполная гамма-функция.*

Если же $\alpha > \beta$, то
$$P_{u^{-2/\beta}} = \Psi(u), \quad u\to\infty.$$
Если $\alpha = \beta$, то
$$P_{u^{-2/\beta}} = \Psi(u)\tilde H_\alpha(1), \quad u\to\infty,$$
где
$$\tilde H_\alpha(1) = E\exp\left(\max_{[0,1]}\left(\chi(t)-t^\alpha-t^\alpha\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right),$$
$\chi(t)$ *— дробное броуновское движение с показателем Хёрста α.*

Доказательство. Для нахождения асимптотики искомой вероятности воспользуемся методом двойных сумм [2].

Рассмотрим сначала случай $\alpha < \beta$. Разобьём отрезок $[0, u^{-2/\beta}]$ на непересекающиеся промежутки Δ_i длиной $Tu^{-2/\alpha}$, где $T > 0$. Согласно методу двойных сумм найдём асимптотику
$$\sum_i P\Big(\sup_{\Delta_i} X_t > u\Big)$$
при $u\to\infty$ и затем докажем, что асимптотика P_{t_u} совпадает с ней. Для этого множество промежутков Δ_i разобьём на две группы: близкие к предельной точке $t = 0$ и остальные. В первой группе будут промежутки Δ_i, $i\in I$, для которых выполняется неравенство $t < u^{-2/\beta}\ln^{-1}u$. Соответственно,
$$\sum_{i\in I} P\Big(\sup_{\Delta_i} X_t > u\Big) \leqslant \sum_{i\in I} P\left(\sup_{\Delta_i}\frac{X_t}{\sigma_t} > \frac{u}{\sup\limits_{\Delta_i}\sigma_t}\right), \tag{4}$$
$$\sum_{i\in I} P\Big(\sup_{\Delta_i} X_t > u\Big) \geqslant \sum_{i\in I} P\left(\sup_{\Delta_i}\frac{X_t}{\sigma_t} > \frac{u}{\inf\limits_{\Delta_i}\sigma_t}\right). \tag{5}$$
Асимптотика вероятностей
$$P\left(\sup_{\Delta_i}\frac{X_t}{\sigma_t} > \frac{u}{\inf\limits_{\Delta_i}\sigma_t}\right), \quad P\left(\sup_{\Delta_i}\frac{X_t}{\sigma_t} > \frac{u}{\sup\limits_{\Delta_i}\sigma_t}\right)$$
может быть найдена по теореме Пикандса [4], а именно:
$$P\left(\sup_{\Delta_i}\frac{X_t}{\sigma_t} > \frac{u}{\inf\limits_{\Delta_i}\sigma_t}\right) = H_\alpha(T)\Psi\left(\frac{u}{\inf\limits_{\Delta_i}\sigma_t}\right)\big(1+o(1)\big) \tag{6}$$

при $u \to \infty$, где $H_\alpha(T)$ — константа Пикандса [4]. Аналогичное соотношение выполняется и для

$$P\left(\sup_{\Delta_i} \frac{X_t}{\sigma_t} > \frac{u}{\sup\limits_{\Delta_i} \sigma_t}\right).$$

Далее,

$$\inf_{\Delta_i} \sigma_t^2 = 1 - \sup_{\Delta_i} t^\beta \sin^2\left(\frac{1}{t}\right).$$

В свою очередь,

$$\sup_{\Delta_i} t^\beta \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) \leqslant u^{-2} \ln^{-\beta} u.$$

Следовательно,

$$\Psi\left(\frac{u}{\inf\limits_{\Delta_i} \sigma_t}\right) = \Psi(u)\big(1 + o(1)\big) \tag{7}$$

при $u \to \infty$. Аналогично

$$\Psi\left(\frac{u}{\sup\limits_{\Delta_i} \sigma_t}\right) = \Psi(u)\big(1 + o(1)\big).$$

Суммируя полученные асимптотические соотношения по i и положив, например, $T = \ln u$, получаем

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\sum\limits_{i\in I} P\Big(\sup\limits_{\Delta_i} X_t > u\Big)}{H_\alpha u^{2/\alpha} u^{-2/\beta} \ln^{-1} u \Psi(u)} \leqslant 1,$$

где

$$H_\alpha = \lim_{T\to\infty} \frac{H_\alpha(T)}{T}.$$

Аналогичное неравенство справедливо в обратную сторону для $\liminf\limits_{u\to\infty}$. Таким образом, асимптотика

$$\sum_{i\in I} P\Big(\sup_{\Delta_i} X_t > u\Big) = H_\alpha u^{2/\alpha} u^{-2/\beta} \ln^{-1} u \Psi(u)\big(1 + o(1)\big) \tag{8}$$

оказывается такой же, как если бы процесс X_t был стационарным на отрезке $[0, u^{-2/\beta} \ln^{-1} u]$.

Посмотрим, что будет происходить с оставшейся суммой по Δ_i, $i \notin I$. Применив соотношения (4)—(6), получим, что необходимо найти асимптотику суммы

$$H_\alpha(T) \sum_{i\notin I} \Psi\left(\frac{u}{\inf\limits_{\Delta_i} \sigma_t}\right) = \frac{H_\alpha(T)}{T} u^{2/\alpha} \sum_{i\notin I} T u^{-2/\alpha} \Psi\left(\frac{u}{\inf\limits_{\Delta_i} \sigma_t}\right).$$

Легко заметить, что последняя сумма представляет собой интегральную сумму, следовательно,

$$H_\alpha(T)\sum_{i\notin I}\Psi\left(\frac{u}{\inf\limits_{\Delta_i}\sigma_t}\right)=\frac{H_\alpha(T)}{T}u^{2/\alpha}\int\limits_{u^{-2/\beta}\ln^{-1}u}^{u^{-2/\beta}}\Psi\left(\frac{u}{\sigma_t}\right)dt\bigl(1+o(1)\bigr)$$

при $u\to\infty$. Последний интеграл можно разбить на сумму интегралов по участкам δ_k, где $\sin(1/t)$ является монотонной, а именно отрезкам вида $t\in$ $\in[(\pi k+\pi/2)^{-1},(\pi k-\pi/2)^{-1}]$.

Заметим, что на рассматриваемых промежутках

$$\frac{u^2}{\sigma_t^2}=u^2\left(1+t^\beta\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\right)+o(1) \tag{9}$$

при $u\to\infty$. В свою очередь,

$$u^2t^\beta\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)=u^2t_k^\beta\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)+o(1),$$

где t_k — левая точка интервала разбиения δ_k, так как $|\delta_k|\leqslant 2t_k^2$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\delta_k}\Psi\left(\frac{u}{\sigma_t}\right)dt&=\\&=\int\limits_{\delta_k}\frac{1}{\sqrt{2\pi u^2(1+t_k^\beta\sin^2(1/t))}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\left(1+t_k^\beta\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right)dt\bigl(1+o(1)\bigr)=\\&=\Psi(u)\int\limits_{\delta_k}\exp\left(-\frac{u^2t_k^\beta}{2}\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt\bigl(1+o(1)\bigr)\end{aligned}$$

при $u\to\infty$.

В последнем интеграле сделаем замену $y=\sin(1/t)$ и воспользуемся тем, что $|t^2-t_k^2|\leqslant 4t_k^3$ на δ_k:

$$\int\limits_{\delta_k}\exp\left(-\frac{u^2t_k^\beta}{2}\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt=t_k^2\int\limits_{-1}^{1}\exp\left(-\frac{u^2t_k^\beta}{2}y^2\right)(1-y^2)^{-1/2}\,dy\bigl(1+o(1)\bigr). \tag{10}$$

Суммируя соотношения (10), получим

$$\int\limits_{u^{-2/\beta}\ln^{-1}u}^{u^{-2/\beta}}\Psi\left(\frac{u}{\sigma_t}\right)dt=\Psi(u)\sum_k t_k^2\int\limits_{-1}^{1}\exp\left(-\frac{u^2t_k^\beta}{2}y^2\right)(1-y^2)^{-1/2}\,dy\bigl(1+o(1)\bigr). \tag{11}$$

Так как длина $|\delta_k|$ асимптотически равна t_k^2 при $u\to\infty$, сумма в правой части (11) асимптотически является интегральной суммой, таким образом,

$$\frac{H_\alpha(T)}{T}u^{2/\alpha}\int\limits_{u^{-2/\beta}\ln^{-1}u}^{u^{-2/\beta}}\Psi\left(\frac{u}{\sigma_t}\right)dt =$$

$$= \frac{H_\alpha}{T}u^{2/\alpha}\Psi(u)\int\limits_{u^{-2/\beta}\ln^{-1}u}^{u^{-2/\beta}}\int\limits_{-1}^{1}e^{-u^2t^\beta y^2/2}(1-y^2)^{-1/2}\,dy\,dt =$$

$$= \frac{H_\alpha(T)}{T}u^{2/\alpha}\Psi(u)u^{-2/\beta}(2\beta)^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}|y|^{-2/\beta}(1-y^2)^{-1/2}\left(\Gamma\left(\frac{1}{\beta}, y^2\ln^{-\beta}\frac{u}{2}\right)-\Gamma\left(\frac{1}{\beta},\frac{y^2}{2}\right)dy\right)\big(1+o(1)\big),$$

где Γ — неполная верхняя гамма-функция. Поскольку она непрерывна, полагая $T=\ln u$, получаем

$$\frac{H_\alpha(T)}{T}u^{2/\alpha}\int\limits_{u^{-2/\beta}\ln^{-1}u}^{u^{-2/\beta}}\Psi\left(\frac{u}{\sigma_t}\right)dt = H_\alpha C u^{2/\alpha-2/\beta}(2\beta)^{-1}\Psi(u)\big(1+o(1)\big), \quad (12)$$

где

$$C=\int\limits_{-1}^{1}|y|^{-2/\beta}(1-y^2)^{-1/2}\left(\Gamma\left(\frac{1}{\beta},0\right)-\Gamma\left(\frac{1}{\beta},\frac{y^2}{2}\right)\right)dy.$$

Заметим, что асимптотика «стационарной части» (8) пренебрежимо меньше асимптотики (12). Следовательно,

$$\sum_i P\Big(\sup_{\Delta_i} X_t > u\Big) = H_\alpha C u^{2/\alpha-2/\beta}(2\beta)^{-1}\Psi(u)\big(1+o(1)\big).$$

Доказательство того, что двойная сумма является асимптотически малой по сравнению с (12), повторяет соответствующие рассуждения из теоремы D2 [2].

Таким образом, соотношение (12) является асимптотикой вероятности $P_{u^{-2/\beta}}$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha > \beta$. Заметим, что для локально стационарного процесса X_t/σ_t

$$P\bigg(\sup_{[0,u^{-2/\beta}]}\frac{X_t}{\sigma_t} > u\bigg) = \Psi(u)\big(1+o(1)\big), \quad u\to\infty,$$

так как $u^{-2/\beta}=o(u^{-2/\alpha})$. Следовательно,

$$\Psi(u)\leqslant P\bigg(\sup_{[0,u^{-2/\beta}]}\frac{X_t}{\sigma_t} > \frac{u}{\inf\limits_{[0,u^{-2/\beta}]}\sigma_t}\bigg) =$$

$$= \Psi\bigg(\frac{u}{\inf\limits_{[0,u^{-2/\beta}]}\sigma_t}\bigg)\big(1+o(1)\big)\leqslant\Psi(u)\big(1+o(1)\big)$$

при $u \to \infty$. Таким образом вероятность $P_{u^{-2/\beta}}$ асимптотически совпадает с вероятностью превышения высокого уровня стандартной нормальной случайной величиной.

Наконец, рассмотрим случай $\alpha = \beta$. Проводя рассуждения, аналогичные лемме D1 из [2], получаем

$$P\left(\sup_{[0,u^{-2/\beta}]} \frac{X_t}{\sigma_t(1 + t^\alpha \sin^2(1/t)/2)} > u\right) = \Psi(u)\tilde{H}_\alpha(1)\bigl(1 + o(1)\bigr)$$

при $u \to \infty$, где

$$\tilde{H}_\alpha(1) = E\exp\left(\max_{[0,1]}\left(\chi(t) - t^\alpha - \frac{t^\alpha \sin^2(1/t)}{2}\right)\right),$$

$\chi(t)$ — дробное броуновское движение с показателем Хёрста α. Тогда

$$\begin{aligned} P_{u^{-2/\beta}} &\geqslant \\ &\geqslant P\left(\max_{[0,u^{-2/\beta}]} \frac{X_t}{\sigma_t(1 + t^\alpha \sin^2(1/t)/2)} > \sup_{[0,u^{-2/\beta}]} \frac{u}{\sigma_t(1 + t^\alpha \sin^2(1/t)/2)}\right) = \\ &= \Psi\left(\frac{u}{\inf\limits_{[0,u^{-2/\beta}]} \sigma_t(1 + t^\alpha \sin^2(1/t)/2)}\right)\tilde{H}_\alpha(1)\bigl(1 + o(1)\bigr) = \Psi(u)\tilde{H}_\alpha(1)\bigl(1 + o(1)\bigr) \end{aligned}$$

при $u \to \infty$; обратное неравенство аналогично. □

Литература

[1] Питербарг В. И. О работе Пикандса «Вероятности пересечения для гауссовского стационарного процесса» // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1972. — № 5. — С. 25—30.

[2] Питербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

[3] Питербарг В. И., Присяжнюк В. П. Точная асимптотика вероятности большого размаха гауссовского стационарного процесса // Теория вероятн. и её примен. — 1981. — Т. 26, № 3. — С. 480—495.

[4] Pickands J. Upcrossing probabilities for Gaussian stationary processes // Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — Vol. 145. — P. 51—73.