

Слабая ошибка схемы Эйлера для вырожденных диффузий с негладкими коэффициентами

А. А. КОЖИНА

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: aakozhina@hse.ru

УДК 519.216.2

Ключевые слова: диффузионные процессы, вырожденные по Колмогорову диффузии, схема Эйлера, параметрикс.

Аннотация

Изучена слабая ошибка схемы Эйлера для вырожденных по Колмогорову диффузий с негладкими коэффициентами.

Abstract

A. A. Kozhina, *Weak error for the Euler scheme approximation of degenerate diffusions with nonsmooth coefficients*, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 22 (2018), no. 3, pp. 91–118.

We study the weak error associated with the Euler scheme of Kolmogorov like degenerate diffusion processes with nonsmooth bounded coefficients. More precisely, we consider the case of Hölder continuous homogeneous coefficients.

1. Введение

Мы изучаем решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) вида

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t, Y_t) dt + \sigma(X_t, Y_t) dW_t, \\ dY_t = X_t dt, \quad t \in [0, T], \end{cases} \quad (1)$$

где коэффициенты $b: \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma: \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ — ограниченные и непрерывные по Гёльдеру по пространственным переменным функции (последнее условие предположительно может быть ослаблено для коэффициента тренда b) и W — винеровский процесс на некотором вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, $T > 0$ — фиксированный неслучайный временной горизонт. Кроме того, предположим, что $a(x, y) := \sigma \sigma^*(x, y)$ удовлетворяет условию равномерной эллиптичности.

Уравнения такого типа были впервые представлены в оригинальной статье [6] А. Н. Колмогорова. В указанной работе А. Н. Колмогоров вывел точное

Фундаментальная и прикладная математика, 2018, том 22, № 3, с. 91–118.

© 2018 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

представление для переходной плотности решения СДУ в случае постоянных коэффициентов.

Однако, за исключением крайне специфических моделей, СДУ вида (1) не решаются аналитически. Аппроксимационные схемы являются одним из наиболее естественных подходов к решению данной проблемы. Широко используется метод Эйлера—Маруямы, описанный в [16], являющийся аналогом схемы Эйлера из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для фиксированного натурального числа N и $T > 0$ мы определяем решётку по времени $\{0, t_1, \dots, t_N\}$ с заданным шагом $h := T/N$, т. е. $t_i = ih$ для $i = 0, \dots, N$.

В таком случае схема аппроксимации может быть задана следующей динамикой:

$$\begin{cases} X_t^h = x + \int_0^t b(X_{\phi(s)}^h, Y_{\phi(s)}^h) ds + \int_0^t \sigma(X_{\phi(s)}^h, Y_{\phi(s)}^h) dW_s, \\ Y_t^h = y + \int_0^t X_s^h ds \end{cases} \quad (2)$$

для $\phi(t) = t_i$ для всех $t \in [t_i, t_{i+1})$. Отметим, что введённая схема хорошо обусловлена, несмотря на то что невырожденная компонента схемы присутствует в интеграле. На каждом шаге по времени приращения $(X_t^h, Y_t^h)_{t \in [t_i, t_{i+1}]}$, $i \geq 0$, являются гауссовскими величинами.

Для многих приложений, таких, как, например, расчёт цены деривативов в финансовой математике, часто необходимо вычислить именно так называемую *слабую ошибку* между объектами, введёнными в (1) и (2). Обозначим

$$Z_t := (X_t, Y_t), \quad Z_t^h := (X_t^h, Y_t^h).$$

Определим для *некоторого класса* тестовых функций f

$$\mathcal{E}_W(T, z, h, f) := \mathbb{E}_z[f(Z_T^h)] - \mathbb{E}_z[f(Z_T)]. \quad (3)$$

Основным инструментом анализа слабой ошибки $\mathcal{E}_W(T, z, h, f)$ является соотношение между $\mathbb{E}_z[f(Z_T^h)]$ и решением параболического уравнения в частных производных второго порядка. Данное соотношение задаётся хорошо известной формулой Фейнмана—Каца. В наших предположениях с использованием стандартных обозначений $u(t, z) := \mathbb{E}[f(Z_T^{t,z})]$

$$\begin{cases} (\partial_t + L_t)u(t, z) = 0, & (t, z) \in [0, T) \times \mathbb{R}^m, \\ u(T, z) = f(z), & z \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$L_t u(t, z) = \langle b(t, z), \nabla_z u(t, z) \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr}(a(t, z) D_z^2 u(t, z)),$$

$a(t, z) := \sigma \sigma^*(t, z)$ — генератор, ассоциированный с (1).

Исторически изучение слабой ошибки получило своё развитие в двух основных направлениях. Случай гладких коэффициентов b, σ, f без дополнительных предположений о невырожденности был рассмотрен подробно в [20].

Для случая, когда b, σ обладают специальными свойствами (например, генератор, ассоциированный с (1) гипоеллиптичен) и гладкостью, можно отметить работы [3, 4], в которых авторы оценивают величину слабой ошибки (3) для ограниченных борелевских функций f и масс Дирака, ссылаясь на результаты работ [12, 13].

Стоит отметить, что метод, применённый в указанных выше работах, хотя и позволяет работать со многими случаями вырожденных уравнений, требует гладкости коэффициентов. Одним из подходов, который применим для уравнений с негладкими коэффициентами, является метод, разработанный в предположениях равномерной эллиптичности [8, 9]. Указанный подход основан на идее разложения решения СДУ в ряды параметрикса. Теми же авторами был рассмотрен и случай мер Дирака в (3).

Разложение параметрикса, состоящее в приближении переходной плотности процесса с переменными коэффициентами соответствующими переходными плотностями процессов с постоянными коэффициентами, и ранее успешно использовалось во многих приложениях. В невырожденном случае мы можем отметить работу [5], в которой авторы представили оценку для переходной плотности невырожденной диффузии с ограниченными коэффициентами, непрерывными по Гёльдеру, эквивалентную некоторой гауссовской плотности. Такая оценка была в дальнейшем использована в [10] для контроля слабой ошибки схемы Эйлера. Данный результат обобщает оценки, полученные в [18].

Метод параметрикса для вырожденного по Колмогорову случая (1) был рассмотрен в [2, 11, 21] при различных предположениях на исходные коэффициенты.

Адаптируя технику, представленную в [11], где авторы рассматривали случай коэффициентов, непрерывных по Липшицу, можно получить оценки переходной плотности для модели вида (1), в том числе и в случае непрерывных по Гёльдеру коэффициентов. Данный подход детально рассмотрен в [1]. Имея оценки для плотности, можно рассчитать слабую ошибку в случае негладких коэффициентов с помощью сглаживания коэффициентов, свёртывая их с гладким ядром. Оценки для разности переходных плотностей исходной диффузии и диффузии, удовлетворяющей уравнению со сглаженными коэффициентами, были получены в [1]. Аналогично можно вывести оценки и для схемы Эйлера с возмущёнными коэффициентами (см. раздел 5.1).

Наш основной результат сформулирован в разделе 2. В разделе 3 мы приводим метод сглаживания коэффициентов исходного уравнения, необходимый для применения техники параметрикса в условиях негладких коэффициентов. Доказательство технически важного результата устойчивости схем Эйлера для вырожденных по Колмогорову диффузий приведено вместе с основными необходимыми определениями в разделе 5. Доказательство теоремы 2, использующейся в разделе 4, приведено в приложении.

2. Постановка проблемы. Основной результат

Введём следующие предположения на модель.

(A1) (ограниченность) Компоненты функций $b(x, y)$ и $\sigma(x, y)$ ограниченные и измеримые, т. е. существует константа K , такая что

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^{2d}} |b(x, y)| + \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^{2d}} |\sigma(x, y)| \leq K.$$

(A2) (равномерная эллиптичность) Матрица $a := \sigma\sigma^*$ равномерно эллиптическая: существует $\Lambda \geq 1$ для всех $(x, y, \xi) \in (\mathbb{R}^d)^3$,

$$\Lambda^{-1}|\xi|^2 \leq \langle a(x, y)\xi, \xi \rangle \leq \Lambda|\xi|^2.$$

(A3) (непрерывность по Гёльдеру) Для некоторых $\gamma \in (0, 1]$, $0 < \kappa < \infty$

$$|b(x, y) - b(x', y')| + |\sigma(x, y) - \sigma(x', y')| \leq \kappa(|x - x'|^\gamma + |y - y'|^{\gamma/2}).$$

Заметим, что из последнего условия из-за ограниченности σ следует, что диффузионная матрица a также является $(\gamma, \gamma/2)$ -непрерывной по Гёльдеру по переменным x и y соответственно.

Будем говорить, что совокупность условий (A) выполнена, если выполнены условия (A1)–(A3).

Замечание 1. Условия (A) гарантируют хорошую обусловленность мартигальной проблемы для генератора, соответствующего СДУ вида (1), что, в свою очередь, влечёт слабую хорошую обусловленность (1). Случай $b = 0$ следует напрямую из [17]. Слабая хорошая обусловленность будет фактически верна для любых $(\gamma_1, \gamma_2) \in (0, 1]$, соответствующих индексам непрерывности по Гёльдеру для переменных x, y , в (A3) (см. [17, теорема 2.1]). Аналогично хорошая обусловленность будет иметь место для (1) в случае ограниченного измеримого коэффициента b .

Ключевым моментом в [17] является использование так называемого сглаживающего эффекта по времени ядра параметрикса, который обнаруживается для уравнений с ограниченным трендом в невырожденной компоненте (см. [17, теорема 2.1]).

Будем обозначать через C константы, зависящие от параметров в условиях (A) и от T . Обозначение c мы будем использовать для констант, которые зависят только от (A), но не зависят от T . Значения C и c могут меняться от строки к строке.

Наш основной результат представлен в следующей теореме.

Теорема 1. Предположим, что выполнены условия (A), фиксируем $T > 0$. Для любой тестовой функции $f \in C^{\beta, \beta/2}(\mathbb{R}^{2d})$ (β - и $\beta/2$ -непрерывной по Гёльдеру по первой и второй переменной соответственно), $\beta \in (0, 1]$, существует константа $C > 0$, такая что для $\mathcal{E}_W$, определённой в (3),

$$|\mathcal{E}_W(T, z, h, f)| \leq Ch^{\gamma/2}(1 + |x|^{\gamma/2}).$$

Для доказательства теоремы 1 необходимо получить оценку производных переходной плотности.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A). Тогда для любых $t \in [0, T]$ и $|\alpha| \leq 2$ существуют константы $C \geq 1$, $c \in (0, 1]$, такие что

$$|D_x^\alpha p(t, (x, y), (x', y'))| \leq \frac{C}{t^{|\alpha|/2}} p_{c,K}(t, (x, y), (x', y')),$$

где для заданных $c > 0$ и $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{2d}$

$$p_{c,K}(t, (x, y), (x', y')) := \frac{c^d 3^{d/2}}{(2\pi t^2)^d} \exp \left(-c \left[\frac{|x' - x|^2}{4t} + 3 \frac{|y' - y - (x + x')t/2|^2}{t^3} \right] \right). \quad (5)$$

Доказательство теоремы 1 представлено в разделе 4 ниже после описания процедуры сглаживания коэффициентов, представленной в разделе 3. Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

Замечание 2. Результат теоремы 2 представляет интерес сам по себе. Насколько мы знаем, в данной работе представлены первые поточечные границы для производных переходной плотности (1) по невырожденной компоненте в случае коэффициентов, непрерывных по Гёльдеру. Данный результат, по сути, является обобщением на случай уравнений Колмогорова границ, полученных в [5]. Описание поведения производных переходной плотности решения (1), взятых по вырожденной компоненте, при минимальных предположениях на гладкость коэффициентов уравнения остаётся открытой проблемой.

3. Процедура сглаживания коэффициентов

В условиях гёльдеровости коэффициентов стандартные методы расчёта слабой ошибки к модели напрямую не применимы. Для того чтобы преодолеть данную трудность, необходимо воспользоваться процедурой сглаживания исходных коэффициентов.

Опишем процедуру сглаживания. Для некоторого малого параметра ε мы сглаживаем коэффициенты СДУ и тестовую функцию f следующим образом:

$$\begin{aligned} b_\varepsilon(x, y) &:= b \star \rho_\varepsilon(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} b(u, v) \rho_\varepsilon(x - u, y - v) du dv, \\ \sigma_\varepsilon(x, y) &:= \sigma \star \rho_\varepsilon(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sigma(u, v) \rho_\varepsilon(x - u, y - v) du dv, \\ f_\varepsilon(x, y) &:= f \star \rho_\varepsilon(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(u, v) \rho_\varepsilon(x - u, y - v) du dv, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\star$ — процедура пространственной свёртки, ρ_ε — ядро свёртки, т. е.

$$\rho_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-3d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon^2}\right),$$

$$\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}), \quad \int_{\mathbb{R}^{2d}} \rho(x, y) dx dy = 1, \quad |\text{supp}(\rho)| \subset K$$

для некоторого компакта $K \subset \mathbb{R}^{2d}$.

Используя введённые обозначения и предположения об ограниченности и гёльдеровской непрерывности коэффициентов, можно показать, что

$$|b - b_\varepsilon| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^{2d}} (b(x, y) - b(x - u\varepsilon, y - v\varepsilon^2)) \rho(u, v) du dv \right|.$$

Из непрерывности по Гёльдеру b следует, что

$$\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d}} |(b - b_\varepsilon)(x, y)| \leq C_\rho \varepsilon^\gamma, \quad C_\rho := \kappa \int_{\mathbb{R}^{2d}} (|u|^\gamma + |v|^{\gamma/2}) \rho(u, v) du dv.$$

Аналогичный анализ может быть проведён для функций σ_ε и f_ε , так как σ_ε и f_ε удовлетворяют условию непрерывности по Гёльдеру. В итоге

$$|b - b_\varepsilon| + |\sigma - \sigma_\varepsilon| \leq C\varepsilon^\gamma, \quad |f - f_\varepsilon| \leq C\varepsilon^\beta. \quad (7)$$

Определим расстояние $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{d}((x, y), (x', y')) := |x - x'| + |y' - y|^{1/2} \quad \text{для всех } (x, y), (x', y') \in (\mathbb{R}^d)^2.$$

Измеримая функция f лежит в классе $C_{b, \mathbf{d}}^\gamma(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$, если

$$|f|_{\mathbf{d}, \gamma} := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| + [f]_{\mathbf{d}, \gamma}, \quad [f]_{\mathbf{d}, \gamma} := \sup_{(x, y) \neq (x', y') \in \mathbb{R}^{2d}} \frac{|f(x, y) - f(x', y')|}{\mathbf{d}^\gamma((x, y), (x', y'))},$$

$$|f|_{\mathbf{d}, \gamma} < +\infty.$$

Получаем следующую оценку на близость коэффициентов:

$$\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d}} |b(x, y) - b_\varepsilon(x, y)| \leq C\varepsilon^\gamma,$$

$$\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d}} |f(x, y) - f_\varepsilon(x, y)| \leq C\varepsilon^\beta,$$

$$\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d}} |(\sigma - \sigma_\varepsilon)|_{\mathbf{d}, \eta} \leq C_\eta(\varepsilon^\gamma + \varepsilon^{\gamma-\eta}) \leq C_\eta \varepsilon^{\gamma-\eta} \quad \text{для всех } \eta \in (0, \gamma).$$

После определения процедуры сглаживания нам необходимо оценить чувствительность переходных плотностей диффузий и аппроксимационных схем к подобным возмущениям коэффициентов. Оценки чувствительности к малым изменениям коэффициентов представлены ниже в теоремах 3 и 4. Результаты данных теорем дают нам возможность использовать следующее разложение

слабой ошибки при доказательстве основного результата в разделе 4:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_W(T, (x, y), h, f) &= \mathbb{E}[f(X_T^{h,0,(x,y)}, Y_T^{h,0,(x,y)})] - \mathbb{E}[f(X_T^{0,(x,y)}, Y_T^{0,(x,y)})] = \\
 &= \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_T^{\varepsilon,0,(x,y)}, Y_T^{\varepsilon,0,(x,y)})] - \mathbb{E}[f(X_T^{0,(x,y)}, Y_T^{0,(x,y)})] + \\
 &+ \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_T^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_T^{\varepsilon,h,0,(x,y)})] - \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_T^{\varepsilon,0,(x,y)}, Y_T^{\varepsilon,0,(x,y)})] + \\
 &+ \mathbb{E}[f(X_T^{h,0,(x,y)}, Y_T^{h,0,(x,y)})] - \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_T^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_T^{\varepsilon,h,0,(x,y)})] =: \\
 &=: \sum_{k=1}^3 \mathcal{E}^{1k,\varepsilon}(T, (x, y), h, f),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где через $(X_T^{\varepsilon,0,(x,y)}, Y_T^{\varepsilon,0,(x,y)})$ мы обозначаем решения уравнений и схемы, полученные заменой исходных коэффициентов на $b_\varepsilon, \sigma_\varepsilon$. Основное преимущество такого разложения состоит в том, что оно позволяет свести случай оценки слабой ошибки аппроксимации для уравнений с негладкими коэффициентами к хорошо изученному случаю гладких коэффициентов.

Рассмотрим более подробно аналоги для диффузии (1) и схемы (2) с возмущёнными коэффициентами:

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = b_\varepsilon(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) dt + \sigma_\varepsilon(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) dW_t, \\ dY_t^\varepsilon = X_t^\varepsilon dt, \quad t \in [0, T], \end{cases} \tag{9}$$

и соответственно

$$\begin{cases} X_t^{\varepsilon,h} = x + \int_0^t b_\varepsilon(X_{\phi(s)}^{\varepsilon,h}, Y_{\phi(s)}^{\varepsilon,h}) ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(X_{\phi(s)}^{\varepsilon,h}, Y_{\phi(s)}^{\varepsilon,h}) dW_s, \\ Y_t^{\varepsilon,h} = y + \int_0^t X_s^{\varepsilon,h} ds \end{cases} \tag{10}$$

для $t \in [0, t_j]$, $0 < j \leq N$, где $\phi(t) = t_i$ для всех $t \in [t_i, t_{i+1})$.

В предположениях (A) введём величины, с помощью которых будем описывать близость плотностей. Положим для $\varepsilon > 0$

$$\Delta_{\varepsilon,b} := |b(\cdot, \cdot) - b_\varepsilon(\cdot, \cdot)|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Так как $\sigma, \sigma_\varepsilon$ обе $(\gamma, \gamma/2)$ -непрерывны по Гёльдеру, ввиду условия (A3) можно определить

$$\Delta_{\varepsilon,\sigma,\gamma} := |\sigma(\cdot, \cdot) - \sigma_\varepsilon(\cdot, \cdot)|_{\mathbf{d},\gamma}, \tag{11}$$

где $\gamma \in (0, 1]$.

Введём сумму

$$\Delta_{\varepsilon,\gamma} := \Delta_{\varepsilon,\sigma,\gamma} + \Delta_{\varepsilon,b}, \tag{12}$$

которую будем использовать в приведённых ниже оценках для чувствительности переходных плотностей диффузий и схем с возмущёнными коэффициентами.

Теорема 3. Зафиксируем $T > 0$. Тогда в условиях (А) существуют константы $C > 1$, $c \in (0, 1]$, такие что для всех $0 < t \leq T$, $((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R}^{2d})^2$

$$|p^\varepsilon - p|(t, (x, y), (x', y')) \leq C \Delta_{\varepsilon, \gamma} p_{c, K}(t, (x, y), (x', y')),$$

где $p^\varepsilon(t, (x, y), (\cdot, \cdot))$, $p(t, (x, y), (\cdot, \cdot))$ — соответствующие переходные плотности в момент времени t решений уравнений (9), (1), стартующих из (x, y) в момент времени 0.

Аналогом теоремы 3 для схемы Эйлера является следующая теорема.

Теорема 4. Зафиксируем $T > 0$ и определим сетку по времени $\Lambda_h := \{(t_i)_{i \in [1, N]}\}$, $N \in \mathbb{N}^*$. В условиях (А) существуют константы $C \geq 1$, $c \in (0, 1]$, такие что для всех $0 < t_j \leq T$, $t_j := jh$, $((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R}^{2d})^2$

$$|p_h^\varepsilon - p_h|(t_j, (x, y), (x', y')) \leq C \Delta_{\varepsilon, \gamma} p_{c, K}(t_j, (x, y), (x', y')),$$

где $p_h^\varepsilon(t, (x, y), (\cdot, \cdot))$, $p_h(t, (x, y), (\cdot, \cdot))$ — переходные плотности в момент времени t схем (10), (2), стартующих из (x, y) в момент времени 0.

Теорема 3 может быть доказана аналогично теореме 1 в [1]. Единственное отличие состоит в том, что в [1] авторы рассматривают условия непрерывности по Гёльдеру с одним и тем же индексом по обоим переменным в (А3), т. е. что для некоторых $\gamma \in (0, 1]$, $0 < \kappa < \infty$

$$|b(x, y) - b(x', y')| + |\sigma(x, y) - \sigma(x', y')| \leq \kappa(|x - x'| + |y - y'|)^\gamma.$$

Однако данное отличие от наших предположений не влияет на ход доказательства. Дальнейшие детали могут быть найдены в [1].

Доказательство теоремы 4 представлено в разделе 5.

С использованием теорем 3 и 4 можно получить оценку близости переходных плотностей, соответствующих СДУ со сглаженными и несглаженными коэффициентами. В условиях (А) существуют константы $C_\eta \geq 1$, $c \leq 1$, такие что для всех $0 \leq i < j \leq N$, $(x, y), (x', y') \in (\mathbb{R}^{2d})^2$

$$|(p - p^\varepsilon)(t_j, (x, y), (x', y'))| \leq C_\eta \varepsilon^\gamma p_{c, K}(t_j, (x, y), (x', y')), \quad (13)$$

где p^ε — переходная плотность (9). Аналогичные оценки приведены в приложении для схемы Эйлера (2) и её возмущённой версии (10):

$$|(p_h - p_h^\varepsilon)(t_j, (x, y), (x', y'))| \leq C_\eta \varepsilon^\gamma p_{c, K}(t_j, (x, y), (x', y')). \quad (14)$$

4. Доказательство основного результата

Выше мы обсудили чувствительность переходных плотностей вырожденных диффузий и соответствующих схем Эйлера к процедуре сглаживания исходных коэффициентов. Теперь воспользуемся разложением, приведённым в (8), и перейдём к оценке слабой ошибки в теореме 1.

Обозначим

$$v(t, x, y) := \mathbb{E}[f(X_T^{t, (x, y)}, Y_T^{t, (x, y)})] = \int_{\mathbb{R}^{2d}} p(T - t, (x, y), (x', y')) f(x', y') dx' dy'.$$

Заметим, что из хорошей обусловленности мартингальной проблемы следует, что v является слабым решением уравнения

$$\begin{cases} (\partial_t v + Lv)(t, x, y) = 0, \\ v(T, x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2d}, \end{cases} \quad (15)$$

где L — генератор, ассоциированный с (1) в момент времени t , т. е. для всех $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R})$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{2d}$

$$L\varphi(x, y) = \langle b(x, y), \nabla_x \varphi(x, y) \rangle + \langle x, \nabla_y \varphi(x, y) \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr}(a(x, y) D_x^2 \varphi(x, y)).$$

Несмотря на то что теорема 2 даёт нам оценку для производных по пространству невырожденной компоненты, для вырожденной модели нельзя утверждать, что v является классическим решением (15). Кроме того, получение поточечных оценок для производных по вырожденной компоненте является достаточно трудной задачей в рамках предположений гёльдеровости коэффициентов. Стоит отметить, что с подобными трудностями столкнулись и авторы работ [15] и [19].

Используя разложение слабой ошибки в (8), получим на первом шаге оценку для $\mathcal{E}^{11, \varepsilon}(T, (x, y), h, f)$, разделив выражение на две части:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{11, \varepsilon}(T, (x, y), h, f) &= \\ &= \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_T^{\varepsilon, 0, (x, y)}, Y_T^{\varepsilon, 0, (x, y)})] - \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_T^{0, (x, y)}, Y_T^{0, (x, y)})] + \\ &+ \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_T^{0, (x, y)}, Y_T^{0, (x, y)})] - \mathbb{E}[f(X_T^{0, (x, y)}, Y_T^{0, (x, y)})] =: \\ &=: (\mathcal{E}^{111, \varepsilon} + \mathcal{E}^{112, \varepsilon})(T, (x, y), h, f). \end{aligned}$$

Отметим, что в [1, 14] приведены оценки для переходных плотностей вырожденных диффузий и схем Эйлера соответственно, полученные в гёльдеровых предположениях на коэффициенты модели. Используя данные оценки и неравенство (7), получаем

$$|\mathcal{E}^{112, \varepsilon}| \leq C \int_{\mathbb{R}^{2d}} p_{c, K}(T, (x, y), (x', y')) |(f_\varepsilon - f)(x', y')| dx' dy' \leq C\varepsilon^\beta. \quad (16)$$

С другой стороны, согласно результату (13), полученному относительно устойчивости решений к малым возмущениям коэффициентов, имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}^{111, \varepsilon}| &\leq C_\eta \varepsilon^\gamma \int_{\mathbb{R}^{2d}} p_{c, K}(T - t, (x, y), (x', y')) |f_\varepsilon(x', y')| dx' dy' \leq \\ &\leq C_\eta \varepsilon^\gamma \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(p_{c, K}(T - t, (x, y), (x', y')) |f_\varepsilon(x', y') - f_\varepsilon(x' - x, y' - y - x(T - t))| + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_{c,K}(T-t, (x, y), (x', y')) |f_\varepsilon(x' - x, y' - y - x(T-t))| \Big) dx' dy' \leq \\
& \leq C_\eta \varepsilon^\gamma \left(1 + \left| R_{T-t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|^\beta \vee \left| R_{T-t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|^{\beta/2} \right), \tag{17}
\end{aligned}$$

где

$$R_u := \begin{pmatrix} I_d & 0_d \\ uI_d & I_d \end{pmatrix}.$$

Мы использовали неравенство Юнга для последней оценки. В итоге

$$\mathcal{E}^{11,\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \tag{18}$$

Результат об устойчивости возмущённых схем (14) аналогично даёт оценку

$$\mathcal{E}^{13,\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \tag{19}$$

Для слагаемого $\mathcal{E}^{12,\varepsilon}$ применим анализ, связанный с теорией уравнений в частных производных. Такой подход впервые был представлен для невырожденных уравнений и их аппроксимационных схем с гёльдеровыми коэффициентами в [18], где авторы использовали оценки Шаудера для получения необходимых неравенств. Данная техника, в частности, требует гладкости от тестовых функций модели (а именно, $f \in C^{2+\gamma}$ для γ -непрерывных по Гёльдеру коэффициентов b, σ). Указанный метод получил развитие в [10], где авторы использовали оценки для решения уравнения теплопроводности напрямую, рассматривая β -непрерывные по Гёльдеру тестовые функции для $\beta \in (0, 1]$.

Ключевым моментом в [10] являлось то, что с помощью процедуры регуляризации авторы могли получить поточечные оценки для производных функции:

$$\begin{aligned}
v_\varepsilon(t, x, y) &:= \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_T^{\varepsilon,t,(x,y)}, Y_T^{\varepsilon,t,(x,y)})] = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}} p_\varepsilon(T-t, (x, y), (x', y')) f_\varepsilon(x', y') dx' dy'
\end{aligned}$$

а также равномерные оценки по ε при малых ε для производных по пространству функции v_ε по невырожденной компоненте.

Так как $f_\varepsilon, b_\varepsilon, \sigma_\varepsilon$ — гладкие функции, то из гладкости v_ε и марковского свойства (см. [20]) следует, что v_ε удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\begin{cases} (\partial_t v_\varepsilon + L_\varepsilon v_\varepsilon)(t, x, y) = 0, \\ v_\varepsilon(T, x, y) = f_\varepsilon(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2d}, \end{cases}$$

где L_ε — генератор, соответствующий СДУ, полученному заменой коэффициентов в (1) на $b_\varepsilon, \sigma_\varepsilon$, т. е. для всех $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R})$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{2d}$

$$L_\varepsilon \varphi(x, y) = \langle b_\varepsilon(x, y), \nabla_x \varphi(x, y) \rangle + \langle x, \nabla_y \varphi(x, y) \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr}(a_\varepsilon(x, y) D_x^2 \varphi(x, y)).$$

Для дальнейшего анализа нам необходимо применить формулу Ито на каждом из интервалов к схеме (2), рассмотренной как процесс Ито. Получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{12,\varepsilon} &= \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_T^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_T^{\varepsilon,h,0,(x,y)})] - \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_T^{\varepsilon,0,(x,y)}, Y_T^{\varepsilon,0,(x,y)})] = \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}[v_\varepsilon(t_{i+1}, X_{t_{i+1}}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{t_{i+1}}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) - v_\varepsilon(t_i, X_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)})] = \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \partial_s v_\varepsilon(s, X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) + \right. \right. \\
&\quad + \nabla_x v_\varepsilon(s, X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) b_\varepsilon(X_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) + \\
&\quad + X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)} \nabla_y v_\varepsilon(s, X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Tr}\left(D_x^2 v_\varepsilon(s, X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) a(X_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)})\right) \Big\} ds \Big] = \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \{\partial_s v_\varepsilon + L_\varepsilon v_\varepsilon\}(X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) ds \right] + \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \nabla_x v_\varepsilon(X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) \times \right. \right. \\
&\quad \times \left(b_\varepsilon(X_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) - b_\varepsilon(X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Tr}\left(D_x^2 v_\varepsilon(X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) \times \right. \\
&\quad \times \left. \left(a(X_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) - a(X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) \right) \right) \Big\} ds \Big] = \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \nabla_x v_\varepsilon(s, X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) \times \right. \right. \\
&\quad \times \left(b_\varepsilon(X_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) - b_\varepsilon(X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Tr}\left(D_x^2 v_\varepsilon(s, X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) \times \right. \\
&\quad \times \left. \left(a(X_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) - a(X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) \right) \right) \Big\} ds \Big], \tag{20}
\end{aligned}$$

используя уравнение в частных производных для v_ε в последнем неравенстве.

Для завершения анализа мы используем оценки $\nabla_x v_\varepsilon(s, x, y)$ и $D_x^2 v_\varepsilon(s, x, y)$, равномерные по $\varepsilon \in (0, 1]$, и непрерывность по Гёльдеру коэффициентов b_ε , a_ε для контроля разностей $b_\varepsilon(X_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) - b_\varepsilon(X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)})$ и

$a_\varepsilon(X_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{t_i}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) - a_\varepsilon(X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)})$. Возвращаясь к доказательству теоремы 1, мы получаем из оценки теоремы 2, что

$$D_x^\alpha v_\varepsilon(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} D_x^\alpha p_\varepsilon(T-t, (x, y), (x', y')) \left[f_\varepsilon(x', y') - f_\varepsilon\left(R_{T-t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \right] dx' dy',$$

и выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha v_\varepsilon(t, x, y)| &\leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{[f_\varepsilon]_{C^{\beta,\beta/2} p_{c,K}}(T-t, (x, y), (x', y'))}{(T-t)^{\alpha/2}} \{|x'-x|^\beta + |y'-(y+(T-t)x)|^{\beta/2}\} dx' dy', \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} [f]_{C^{\beta,\beta/2}} &:= \sup_{(x,y) \neq (x',y')} \frac{|f(x, y) - f(x', y')|}{d^\beta((x, y), (x', y'))}, \\ d^\beta((x, y), (x', y')) &:= |x - x'|^\beta + |y - y'|^{\beta/2}. \end{aligned}$$

Из (5) получаем, что

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha v_\varepsilon(t, x, y)| &\leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{C[f_\varepsilon]_{C^{\beta,\beta/2} p_{c,K}}(T-t, (x, y), (x', y'))}{(T-t)^{|\alpha|/2-\beta/2}} dx' dy' \leq \frac{C[f_\varepsilon]_{C^{\beta,\beta/2}}}{(T-t)^{|\alpha|/2-\beta/2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя (22) в (20), мы получаем

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}^{12,\varepsilon}| &\leq C[f_\varepsilon]_{C^{\beta,\beta/2}} \int_0^T ds \left\{ \mathbb{E} \left[b_\varepsilon(X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b_\varepsilon(X_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) \right] \right| \frac{1}{(T-s)^{1/2-\beta/2}} + \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left[a_\varepsilon(X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) - a_\varepsilon(X_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) \right] \right| \frac{1}{(T-s)^{1-\beta/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\phi(s) = t_i$ для $s \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \dots, N-1$.

Обозначим через $\Psi_\varepsilon(x, y)$ любую из двух функций $b_\varepsilon(x, y)$ или $a_\varepsilon(x, y)$, так как они обе удовлетворяют одинаковым условиям непрерывности по Гёльдеру. Учитывая введённые обозначения, мы хотим получить оценку для

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|\Psi_\varepsilon(X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}) - \Psi_\varepsilon(X_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)})| \right] &\leq \\ &\leq [\Psi_\varepsilon]_{C^{\gamma,\gamma/2}} \left\{ \mathbb{E} \left[|X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)} - X_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}|^\gamma \right] + \mathbb{E} \left[|Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)} - Y_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}|^{\gamma/2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Из определения (2) аппроксимационной схемы получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)} - X_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}|^\gamma] &= \mathbb{E}[|b_\varepsilon(X_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)})(s - \phi(s)) + \\ &+ \sigma(X_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}, Y_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)})(W_s - W_{\phi(s)})|^\gamma] \leq C(|b_\varepsilon|_\infty \vee |\sigma_\varepsilon|_\infty)h^{\gamma/2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Во второй компоненте мы не можем компенсировать перенос начальных условий и в связи с этим вынуждены сохранить зависимость от начальных условий в итоговой оценке:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)} - Y_{\phi(s)}^{\varepsilon,h,0,(x,y)}|^{\gamma/2}] &= \mathbb{E}\left[\left|\int_{\phi(s)}^s X_u^{\varepsilon,h,0,(x,y)} du\right|^{\gamma/2}\right] \leq \\ &\leq \sup_{s \in [0,T]} \mathbb{E}[|X_s^{\varepsilon,h,0,(x,y)}|^{\gamma/2}]h^{\gamma/2} \leq Ch^{\gamma/2}(1 + |x|^{\gamma/2}). \end{aligned} \quad (25)$$

Применяя оценки (24) и (25) для (23), мы получаем итоговый результат для $\mathcal{E}^{12,\varepsilon}$:

$$|\mathcal{E}^{12,\varepsilon}| \leq Ch^{\gamma/2}(1 + |x|^{\gamma/2}), \quad (26)$$

что и доказывает теорему 1.

Замечание 3 (порядок сходимости). В исходной модели скорость сходимости в (26) имеет порядок, близкий сходимости сильной ошибки. Действительно, так как мы не можем применять разложения порядка выше чем 2, используя уравнение в частных производных для v_ε , нам приходится рассматривать приращения схемы Эйлера (2) в степени, соответствующей индексу Гёльдера.

Замечание 4. Порядок $h^{\gamma/2}(1 + |x|^{\gamma/2})$ верен и для тестовых функций $f \in C^{\beta_1, \beta_2}(\mathbb{R}^{2d})$, $(\beta_1, \beta_2) \in (0, 1]^2$. Случай невырожденных диффузий был рассмотрен подробно в [10].

5. Устойчивость схемы Эйлера

Для доказательства теоремы 4 нам необходимо ввести основные понятия, используемые в методе параметрикса. Подробное изложение метода параметрикса для случая вырожденных по Колмогорову диффузий и их аппроксимационных схем можно найти в [7, 14].

5.1. Параметрикс. Дискретный случай

Сначала нам необходимо определить один из основных объектов метода параметрикса — *замороженную* версию схемы (2) и дискретный аналог процедуры свёртки. После этого мы можем определить разложение в ряд параметрикса для переходной плотности дискретизационной схемы.

Для фиксированных точек $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{2d}$ и конечного интервала времени t_j , $0 \leq j \leq N$, определим

$$(\tilde{X}_t^h, \tilde{Y}_t^h)_{t \in [0, t_j]} (\equiv (\tilde{X}_t^{h, (x', y', t_j)}, \tilde{Y}_t^{h, (x', y', t_j)}))_{t \in [0, t_j]}$$

с начальным условием $(\tilde{X}_0^h, \tilde{Y}_0^h) = (x, y)$ и для каждого $t \in (0, t_j]$

$$\begin{cases} \tilde{X}_t^h = x + \int_0^t \sigma(x', y' - x'(t_j - \phi(s))) dW_s, \\ \tilde{Y}_t^h = y + \int_0^t \tilde{X}_v^h dv = y + xt + \int_0^t \int_0^v \sigma(x', y' - x'(t_j - \phi(s))) dW_s dv \end{cases} \quad (27)$$

для $\phi(t) = t_i$ для всех $t \in [t_i, t_{i+1})$.

Положим для каждого $s \in [0, t_j]$ $\tilde{a}_{\phi(s)} = \tilde{\sigma}_{\phi(s)} \tilde{\sigma}_{\phi(s)}^*$. Учитывая, что условие (A2) влечёт симметричность $\tilde{a}_{\phi(s)}$, ковариационная матрица $\Sigma_{t_j}^h$ вектора $(\tilde{X}_{t_j}^h, \tilde{Y}_{t_j}^h)$ равна

$$\Sigma_{t_j}^h = \begin{pmatrix} \int_0^{t_j} \tilde{a}_{\phi(s)} ds & \int_0^{t_j} (t_j - s) \tilde{a}_{\phi(s)} ds \\ \int_0^{t_j} (t_j - s) \tilde{a}_{\phi(s)} ds & \int_0^{t_j} (t_j - s)^2 \tilde{a}_{\phi(s)} ds \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\tilde{p}^{h, t_j, (x', y')}$ переходную плотность дискретизационной схемы (27), далее будем использовать обозначение

$$\tilde{p}^{h, t_j, (x', y')}(t_{j'}, (x, y), (\cdot, \cdot)) =: \tilde{p}^h(t_{j'}, (x, y), (\cdot, \cdot))$$

для переходной плотности из момента времени 0 в $t_{j'} \leq t_j$ замороженной цепи Маркова.

Введём дискретный аналог функции ядра. Для достаточно гладких функций $\psi: \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ и фиксированных $(x', y') \in \mathbb{R}^{2d}$, $j \in (0, N]$ определим операторы L^h и $\tilde{L}^h (\equiv \tilde{L}^{h, t_j, (x', y')})$:

$$\begin{aligned} L^h f(t_j, (x, y), (x', y')) &= \\ &= h^{-1} \left[\int_{\mathbb{R}^{2d}} p^h(h, (x, y), (u, v)) f(t_j - h, (u, v), (x', y')) du dv - \right. \\ &\quad \left. - f(t_j - h, (x, y), (x', y')) \right], \\ \tilde{L}^h f(t_j, (x, y), (x', y')) &= \\ &= h^{-1} \left[\int_{\mathbb{R}^{2d}} \tilde{p}^h(h, (x, y), (u, v)) f(t_j - h, (u, v), (x', y')) du dv - \right. \\ &\quad \left. - f(t_j - h, (x, y), (x', y')) \right]. \end{aligned}$$

Определим дискретное ядро H_h как

$$H_h(t_j, (u, v), (x', y')) = (L^h - \tilde{L}^h) \tilde{p}^h(t_j, (u, v), (x', y')), \quad 0 \leq j \leq N. \quad (28)$$

Из предыдущего определения следует, что для всех $0 \leq j \leq N$

$$\begin{aligned} H_h(t_j, (u, v), (x', y')) &= \\ &= h^{-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} [p^h - \tilde{p}^h](h, (u, v), (w, z)) \tilde{p}^h(t_j - h, (w, z), (x', y')) dw dz. \end{aligned}$$

Аналогично [8, лемма 3.6] в [14] было получено, что переходная плотность схемы допускает следующее представление.

Утверждение 1 (разложение параметрикса для схемы Эйлера). *Предположим, что выполнены условия (A). Тогда*

$$p^h(t_j, (x, y), (x', y')) = \sum_{r=0}^j (\tilde{p} \otimes_h H_h^{(r)})(t_j, (x, y), (x', y')) \quad (29)$$

для дискретной процедуры свёртки $\otimes_h$, определяемой как

$$\begin{aligned} (g \otimes_h f)(t_j, (x, y), (x', y')) &= \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} h \int_{\mathbb{R}^{2d}} g(t_i, (x, y), (u, v)) f(t_j - t_i, (u, v), (x', y')) du dv, \end{aligned}$$

где $g \otimes_h H_h^{(0)} := g$ и для всех $r \geq 1$ $H_h^{(r)} = H_h \otimes_h H_h^{(r-1)}$ — r -кратная дискретная свёртка ядра H_h . Будем считать, что $\tilde{p}^h \otimes_h H_h^{(r)}(0, (x, y), (x', y')) = 0$, $r \geq 1$.

После введения всех необходимых определений мы готовы перейти к рассмотрению анализа чувствительности схем Эйлера вырожденных диффузий к малым возмущениям коэффициентов, результаты которого были сформулированы в теореме 4.

Напомним читателю аналог схемы (2) с возмущёнными коэффициентами:

$$\begin{cases} X_t^{\varepsilon, h} = x + \int_0^t b_\varepsilon(X_{\phi(s)}^{\varepsilon, h}, Y_{\phi(s)}^{\varepsilon, h}) ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(X_{\phi(s)}^{\varepsilon, h}, Y_{\phi(s)}^{\varepsilon, h}) dW_s, \\ Y_t^{\varepsilon, h} = y + \int_0^t X_s^{\varepsilon, h} ds \end{cases}$$

для $t \in [0, t_j)$, $0 < j \leq N$, где $\phi(t) = t_i$ для всех $t \in [t_i, t_{i+1})$.

Заметим, что в соответствии с утверждением 1 плотности p^h и p_ε^h допускают следующие представления:

$$\begin{aligned}
p^h(t_j, (x, y), (x', y')) &= \sum_{r=0}^j \tilde{p}^h \otimes_h H_h^{(r)}(t_j, (x, y), (x', y')), \\
p_\varepsilon^h(t_j, (x, y), (x', y')) &= \sum_{r=0}^j \tilde{p}_\varepsilon^h \otimes_h H_{\varepsilon, h}^{(r)}(t_j, (x, y), (x', y')),
\end{aligned} \tag{30}$$

где $H_h^{\varepsilon, (r)}$ введено аналогично $H_h^{(r)}$ в (28), но вместо $L^h, \tilde{L}^h, \tilde{p}^h$ взяты их аналоги с возмущением ε .

Близость «главных» частей разложения параметрикса $\tilde{p}^h$ и $\tilde{p}_\varepsilon^h$ может быть получена аналогично [7, лемма 1] через оценку разности двух гауссовских плотностей с малой разностью средних и ковариаций. Аналогичным образом может быть оценена и разность их производных малого порядка как разность соответствующих гауссовских плотностей, домноженных на полиномы. Единственное, что мы хотели бы подчеркнуть: в отличие от [7], в нашей оценке будет присутствовать гауссовская плотность $p_{c, K}$, которая есть и в оценках самой переходной плотности вырожденной диффузии. Доказательство приведено в [14] (см. теорему 2.1 (b)).

Лемма 1 (оценка и сравнение плотностей и их производных). Существуют константы $c_1 \geq 1$, $c \in (0, 1]$, такие что для всех $0 < t_j \leq T$, $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{2d}$ и всех мультииндексов α , $|\alpha| \leq 4$,

$$\begin{aligned}
|D_x^\alpha \tilde{p}^h(t_j, (x, y), (x', y')) - D_x^\alpha \tilde{p}_\varepsilon^h(t_j, (x, y), (x', y'))| &\leq \\
&\leq \frac{c_1 \Delta_{\varepsilon, \sigma, \gamma} p_{c, K}(t_j, (x, y), (x', y'))}{t_j^{|\alpha|/2}},
\end{aligned}$$

где $\Delta_{\varepsilon, \sigma, \gamma}$ было определено в (11).

Следующим шагом в доказательстве теоремы 4 будет оценка разности так называемых ядерных функций.

Лемма 2 (оценка для однократной свёртки). Для всех $\beta \in (0, \gamma)$, $0 < t_i \leq T$, $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{2d}$ существует константа C_β , такая что

$$\begin{aligned}
|H_h(t_i, (u, v), (x', y')) - H_{h, \varepsilon}(t_i, (u, v), (x', y'))| &\leq \\
&\leq \frac{C_\beta \Delta_{\varepsilon, \gamma, \infty}}{t_i^{1-\gamma/2}} p_{c, K}(t_i, (u, v), (x', y')),
\end{aligned}$$

где $\Delta_{\varepsilon, \gamma}$ было определено в (12).

Доказательство. Переход за один шаг. Заметим, что для $t_i = h$ переходная плотность $\tilde{p}^h(t_i - h, (\cdot, \cdot), (x', y'))$ есть мера Дирака $\delta_{x', y'}$, следовательно,

$$H_h(h, (x, y), (x', y')) = h^{-1} \left(p^h(h, (x, y), (x', y')) - \tilde{p}^h(h, (x, y), (x', y')) \right).$$

Так как $p^h(h, (x, y), (x', y'))$, $\tilde{p}^h(h, (x, y), (x', y'))$ — гауссовские плотности, можно показать, что

$$\begin{aligned}
H_h(h, (x, y), (x', y')) &= \\
&= h^{-1}(2\sqrt{3})^d \times \left(\frac{G\left(\left(h^{1/2}\sigma(x, y)\right)^{-1}(x' - x - b(x', y')h)\right)}{h^{2d}(\det(a(x, y)))^{1/2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{G\left(\left(h^{1/2}\sigma(x^{h'}, y^{h'})\right)^{-1}(x' - x)\right)}{h^{2d}(\det(a(x^{h'}, y^{h'})))^{1/2}} \right),
\end{aligned}$$

где $(x^{h'}, y^{h'}) := (x', y' - x'h)$ и для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^{2d}$

$$G\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \exp\left(-\frac{|x|^2 + |y|^2}{2}\right) (2\pi)^{-d}$$

означает плотность гауссовского вектора $\mathbb{R}^{2d}$.

Выполняя аналогичные шаги для возмущённых ядерных функций, получаем

$$\begin{aligned}
H_{h,\varepsilon}(h, (x, y), (x', y')) &= \\
&= h^{-1}(2\sqrt{3})^d \times \left(\frac{G\left(\left(h^{1/2}\sigma_\varepsilon(x, y)\right)^{-1}(x' - x - b_\varepsilon(x', y')h)\right)}{h^{2d} \det(a_\varepsilon(x, y))^{1/2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{G\left(\left(h^{1/2}\sigma_\varepsilon(x^{h'}, y^{h'})\right)^{-1}(x' - x)\right)}{h^{2d}(\det(a_\varepsilon(x^{h'}, y^{h'})))^{1/2}} \right).
\end{aligned}$$

В результате разница между ядерными функциями в случае перехода за один шаг может быть оценена как разность между двумя гауссовскими плотностями с близкими коэффициентами. Кроме того, так как

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^{h'} \\ y^{h'} \end{pmatrix} \right| \leq |x' - x| \left(1 + \frac{h}{2}\right) + \left|y' - y - \frac{x+x'}{2}h\right|,$$

то существуют константы $c > 0$, $C \geq 1$, такие что

$$\begin{aligned}
|H_h(h, (x, y), (x', y')) - H_{h,\varepsilon}(h, (x, y), (x', y'))| &\leq \\
&\leq Ch^{-1+\gamma/2} \Delta_{\varepsilon, \gamma p_{c,K}}(h, (x, y), (x', y')).
\end{aligned}$$

Случай $t_i > h$. Заметим, что для всех $0 < i \leq N$

$$\begin{aligned} H_h(t_i, (u, v), (x', y')) &= \\ &= h^{-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} [p^h - \tilde{p}^h](h, (u, v), (w, z)) \tilde{p}^h(t_i - h, (w, z), (x', y')) dw dz. \end{aligned} \quad (31)$$

Положим

$$(x_h, y_h) := (x, y + hx), \quad (x'_{h,i}, y'_{h,i}) := (x', y' - x't_i).$$

Определим для всех $(u, v) \in \mathbb{R}^{2d}$

$$B^h(u, v) := \begin{pmatrix} b(u, v)h \\ b(u, v)h^2/2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^h(u, v) = \begin{pmatrix} h^{1/2}\sigma(u, v) & 0 \\ h^{3/2}\sigma(u, v)/2 & h^{3/2}\sigma(u, v)/(2\sqrt{3}) \end{pmatrix}.$$

Введём для всех $(x, y), (w, z), (x', y') \in (\mathbb{R}^{2d})^3$ переносы

$$\begin{aligned} P_h((w, z), (x', y')) &:= \Sigma^h(w, z) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \\ T_h((x, y), (w, z), (x', y')) &:= B^h(x, y) + P_h((w, z), (x', y')). \end{aligned}$$

Используя разложения Тейлора первого порядка, имеем

$$\begin{aligned} H_h(t_i, (x, y), (x', y')) &= h^{-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dw dz G(w, z) \int_0^1 d\eta \times \\ &\times \left\{ D_x \tilde{p}^h(t_i - h, (x_h, y_h) + \eta T_h((x, y), (x, y), (w, z)), (x', y')) \times \right. \\ &\times \left(T_h((x, y), (x, y), (w, z)) \right)^{(x)} - \\ &- D_x \tilde{p}^h(t_i - h, (x_h, y_h) + \eta P_h((x'_{h,i}, y'_{h,i}), (w, z)), (x', y')) \times \\ &\times \left(P_h((x'_{h,i}, y'_{h,i}), (w, z)) \right)^{(x)} \Big\} + h^{-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dw dz G(w, z) \int_0^1 d\eta \times \\ &\times \left\{ D_y \tilde{p}^h(t_i - h, (x_h, y_h) + \eta T_h((x, y), (x, y), (w, z)), (x', y')) \times \right. \\ &\times \left(T_h((x, y), (x, y), (w, z)) \right)^{(y)} - \\ &- D_y \tilde{p}^h(t_i - h, (x_h, y_h) + \eta P_h((x'_{h,i}, y'_{h,i}), (w, z)), (x', y')) \times \\ &\times \left(P_h((x'_{h,i}, y'_{h,i}), (w, z)) \right)^{(y)} \Big\} := (M_1^h + R_1^h)(t_i, (x, y), (x', y')), \end{aligned}$$

где D_x, D_y обозначают производные по первой и второй компоненте соответственно, верхние индексы (x) и (y) означают $(1 : d)$ и $(d + 1 : 2d)$ компоненты вектора. Нам необходимо оценить разность $|H_h - H_{h,\varepsilon}|(t_i, (u, v), (x', y'))$, для этого достаточно получить оценку на разности между $R_1^h, R_1^{h,\varepsilon}$ и $M_1^h, M_1^{h,\varepsilon}$.

Введём мультииндексы $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{N}^d$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d) \in \mathbb{N}^d$. Получаем, что существуют константы $c > 0$, $C \geq 1$, такие что для всех (μ, ν) , $|\mu| \leq 3$, $|\nu| \leq 4$, и для всех $0 < i \leq N$, $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{2d}$

$$|D_x^\nu D_y^\mu \tilde{p}^h(t_i, (x, y), (x', y'))| \leq C(t_i)^{-(|\nu|/2 + 3|\mu|/2)} p_{c,K}(t_i, (x, y), (x', y')).$$

Заметим также, что существует константа $C > 0$, такая что

$$\begin{aligned} & |T_h((x, y), (x, y), (w, z))^{(x)} - P_h((x'_{h,i}, y'_{h,i}), (w, z))^{(x)}| \leq \\ & \leq C(h + |(x, y) - (x'_{h,i}, y'_{h,i})|^\gamma h^{1/2} |(w, z)|), \\ & |T_h((x, y), (x, y), (w, z))^{(y)} - P_h((x'_{h,i}, y'_{h,i}), (w, z))^{(y)}| \leq \\ & \leq C(h^2 + |(x, y) - (x'_{h,i}, y'_{h,i})|^\gamma h^{3/2} |(w, z)|), \end{aligned}$$

так как $b(\cdot, \cdot)$ ограниченная, и для оценки разности между $\Sigma(x, y)$ и $\Sigma(x'_{h,i}, y'_{h,i})$ используется гёльдеровость коэффициентов.

Как и в [14], разложим

$$\begin{aligned} & D_x \tilde{p}^h(t_i, (x_h, y_h) + \eta T_h((x, y), (x, y), (w, z)), (x', y')), \\ & D_y \tilde{p}^h(t_i, (x_h, y_h) + \eta T_h((x, y), (x, y), (w, z)), (x', y')) \end{aligned}$$

до порядка 2 в точке (x_h, y_h) и получим

$$H_h(t_i, (x, y), (x', y')) = H(t_i, (x, y), (x', y')) + (R_1^h + R_2^h)(t_i, (x, y), (x', y')), \quad (32)$$

где обозначения немного изменены:

$$H(t_i, (x, y), (x', y')) = (L - \tilde{L})\tilde{p}^h(t_i, (x, y), (x', y')),$$

хотя в непрерывном случае

$$H(t_i, (x, y), (x', y')) = (L - \tilde{L})\tilde{p}(t_i, (x, y), (x', y')).$$

Заметим, что априори

$$\tilde{p}^h(t_i, (x, y), (x', y')) \neq \tilde{p}(t_i, (x, y), (x', y')).$$

Эти два объекта отличаются ковариационными матрицами, в которых перенос конечной точки взят с учётом непрерывного и дискретного времени в $\tilde{p}$ и p^h соответственно:

$$\begin{aligned} R_2^h(t_i, (x, y), (x', y')) &:= \langle -b(x', y'), D_x \tilde{p}^h(t_i - h, (x_h, y_h), (x', y')) \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (a(x, y) - a(x'_{h,i}, y'_{h,i})) D_x^2 \tilde{p}^h(t_i - h, (x_h, y_h), (x', y')) \}. \end{aligned}$$

Разница $|H - H_\varepsilon|(t_i, (x, y), (x', y'))$ может быть оценена как в [1]. Таким образом, получаем, что существуют константы $c \in (0, 1]$, $c_3 \in (0, 1]$, такие что для $0 < t_i \leq T$ и всех $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{2d}$

$$|(H - H_\varepsilon)(t_i, (x, y), (x', y'))| \leq (1 \vee T^{(1-\gamma)/2}) c_3 \Delta_{\varepsilon, \gamma} \frac{p_{c,K}(t_i, (x, y), (x', y'))}{(t_i)^{1-\gamma/2}}.$$

Используя определение $R_1^h(t_i, (x, y), (x', y'))$ и телескопические суммы вместе с оценками для производных замороженной переходной плотности, имеем

$$|(R_1^h - R_1^{h,\varepsilon})(t_i, (x, y), (x', y'))| \leq (1 \vee T^{(1-\gamma)/2}) c_2 \Delta_{\varepsilon, \gamma} \frac{p_{c,K}(t_i, (x, y), (x', y'))}{t_i^{1-\gamma/2}}.$$

Аналогично разность $|R_2^h - R_2^{h,\varepsilon}|(t_i, (x, y), (x', y'))$ может быть оценена исходя из ограниченности $b(\cdot, \cdot)$, $b_\varepsilon(\cdot, \cdot)$, непрерывности по Гёльдеру $a(\cdot, \cdot)$, $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ и оценок для производных $|D_x^\alpha \tilde{p}^h(t_i - h, (x_h, y_h), (x', y'))|$:

$$|(R_2^h - R_2^{h,\varepsilon})(t_i, (x, y), (x', y'))| \leq \frac{\Delta_{\varepsilon, \gamma} p_{c,K}(t_i - h, (x_h, y_h), (x', y'))}{(t_i - h)^{1-\gamma/2}}.$$

Таким образом, мы доказали утверждение леммы 2. $\square$

Лемма 3 (разница свёрток ядерных функций). Для всех t_i , $i \in (0, j]$, $t_j \leq T$, $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{2d}$ и $r \in \mathbb{N}$ верно

$$\begin{aligned} & |(\tilde{p}^h \times H_h^{(r)} - \tilde{p}_\varepsilon^h \times H_{h,\varepsilon}^{(r)})(t_i, (x, y), (x', y'))| \leq \\ & \leq C^r \Delta_{\varepsilon, \gamma} \left\{ \frac{t_i^{r\gamma/2}}{\Gamma(1 + \frac{r\gamma}{2})} + \frac{t_i^{(r+2)\gamma/2}}{\Gamma(1 + \frac{(r+2)\gamma}{2})} \right\} p_{c,K}(t_i, (x, y), (x', y')). \end{aligned} \quad (33)$$

Доказательство. Заметим, что лемма 1 даёт результат (33) для $r = 0$. Предположим, что утверждение верно для произвольного заданного $r \in \mathbb{N}^*$, и покажем, что отсюда следует утверждение для $r + 1$.

Обозначим для всех $r \geq 1$

$$\eta_r(t_i, (x, y), (x', y')) := |(\tilde{p}^h \otimes H^{(r)} - \tilde{p}_\varepsilon^h \otimes H_{h,\varepsilon}^{(r)})(t_i, (x, y), (x', y'))|.$$

Запишем

$$\begin{aligned} \eta_{r+1}(t_i, (x, y), (x', y')) & \leq \\ & \leq |(\tilde{p}_h \otimes H_h^{(r)} - \tilde{p}_\varepsilon^h \otimes H_{h,\varepsilon}^{(r)}) \otimes H_h(t_i, (x, y), (x', y'))| + \\ & + |\tilde{p}_\varepsilon^h \otimes H_{h,\varepsilon}^{(r)} \otimes (H_h - H_{h,\varepsilon})(t_i, (x, y), (x', y'))| \leq \\ & \leq \eta_r \otimes |H_h|(t_i, (x, y), (x', y')) + |\tilde{p}_\varepsilon^h \otimes H_{h,\varepsilon}^{(r)}| \otimes |H_h - H_{h,\varepsilon}|(t_i, (x, y), (x', y')). \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение леммы следует из оценок леммы 2 и индукции по r . Лемма доказана. $\square$

Для доказательства теоремы 4 запишем разложение параметрикса (30) для переходных плотностей p^h , p_ε^h . Затем воспользуемся последовательно результатами лемм 1 и 3 для получения оценок на разность главных частей разложения и близость оставшихся членов разложения соответственно. Используя на последнем шаге асимптотику гамма-функции, получим утверждение теоремы 4.

6. Приложение

После описания процедуры сглаживания в разделе 3 мы можем переформулировать теорему 2 в более общей форме.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (A). Тогда для любых $t \in [0, T]$ и $|\alpha| \leq 2$ существуют константы $C \geq 1$, $c \in (0, 1]$, такие что для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, выполнено

$$|D_x^\alpha p_\varepsilon(t, (x, y), (x', y'))| \leq \frac{C}{t^{|\alpha|/2}} p_{c,K}(t, (x, y), (x', y')),$$

причём p_ε обозначает переходную плотность диффузии, определённой в (9).

Доказательство. Без ограничения общности мы рассмотрим случай наибольшей сингулярности по времени: $\varepsilon = 1$.

Мы начнём с применения разложения параметрикса. Основная стратегия состоит в том, чтобы рассмотреть производные «главной» части разложения и «остатка» разложения по отдельности. Оценка для главного члена разложения может быть получена из [1], поэтому мы подробно рассмотрим производные остатка ряда параметрикса

$$D_x^\alpha p(t, (x, y), (x', y')) = D_x^\alpha \tilde{p}(t, (x, y), (x', y')) + \sum_{r=1}^{\infty} D_x^\alpha [\tilde{p} \otimes H^{\varepsilon, (r)}(t, (x, y), (x', y'))]$$

для $|\alpha| = 1, 2$. Так как производные первого порядка дают интегрируемую особенность по времени, случай $|\alpha| = 1$ не несёт дополнительных сложностей.

Случай $|\alpha| = 2$ мы рассмотрим подробно. Обозначим

$$R(t, (x, y), (x', y')) := \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{p} \otimes H^{(r)}(t, (x, y), (x', y')) = \tilde{p} \otimes \Phi(t, (x, y), (x', y')),$$

$$\Phi(t, (x, y), (x', y')) := \sum_{r=1}^{\infty} H^{(r)}(t, (x, y), (x', y')).$$

Аналогично [14] можно получить оценки для замороженной плотности и ядра параметрикса. А именно, методом прямых вычислений для гауссовских плотностей получаем, что для индексов α, β , таких что $|\alpha| \leq 4$, $|\beta| \leq 2$, существует константа $C > 0$, такая что для всех $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| \leq 4$,

$$|D_x^\alpha D_y^\beta \tilde{p}(t, (x, y), (x', y'))| \leq \frac{C}{t^{|\alpha|/2 + 3|\beta|/2}} p_{c,K}(t, (x, y), (x', y')). \quad (34)$$

и

$$|H(t, (x, y), (x', y'))| \leq ((1 \vee T^{(1-\gamma)/2}) c_1) \frac{p_{c,K}(t, (x, y), (x', y'))}{t^{1-\gamma/2}}. \quad (35)$$

Из неравенства (35) для H следует, что для всех $r \in \mathbb{N}^*$, $0 < t \leq T$, $(x, y), (x', y') \in (\mathbb{R}^{2d})^2$

$$\begin{aligned}
& |H^{(r)}(t, (x, y), (x', y'))| \leq \\
& \leq ((1 \vee T^{(1-\gamma)/2})c_1)^r \prod_{i=1}^{r-1} B\left(\frac{\gamma}{2}, 1 + (i-1)\frac{\gamma}{2}\right) p_{c,K}(t, (x, y), (x', y')) t^{-1+r\gamma/2},
\end{aligned} \tag{36}$$

где $\prod_{i=1}^0 = 1$. Таким образом, мы получаем, что для всех $0 < t \leq T$, $(x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$

$$|\Phi(t, (x, y), (x', y'))| \leq \frac{C}{t^{1-\gamma/2}} p_{c,K}(t, (x, y), (x', y')). \tag{37}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& D_x^\alpha R(t, (x, y), (x', y')) = \\
& = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\tau}^{t/2} du \int_{\mathbb{R}^{2d}} D_x^\alpha \tilde{p}(u, (x, y), (w, z)) \Phi(t - u, (w, z), (x', y')) dw dz + \\
& + \int_{t/2}^t du \int_{\mathbb{R}^{2d}} D_x^\alpha \tilde{p}(u, (x, y), (w, z)) \Phi(t - u, (w, z), (x', y')) dw dz =: \\
& =: \lim_{\tau \rightarrow 0} D_x^\alpha R^\tau(t, (x, y), (x', y')) + D_x^\alpha R^f(t, (x, y), (x', y')).
\end{aligned} \tag{38}$$

Член $D_x^\alpha R^f(t, (x, y), (x', y'))$ не добавляет сингулярности в интеграл, так как интегрирование происходит на интервале $u \geq (1/2)t$.

Из неравенств (34) и (37) получаем

$$|D_x^\alpha R^f(t, (x, y), (x', y'))| \leq \frac{C}{t^{(|\alpha|-\gamma)/2}} p_{c,K}(t, (x, y), (x', y')). \tag{39}$$

Более сложной для оценки является вторая часть: $D_x^\alpha R^\tau(t, (x, y), (x', y'))$. Для оценки в случае $|\alpha| = 2$ введём дополнительное слагаемое, как это было сделано в [10] (см. cancellation technique).

Положим для произвольных $\kappa^1, \kappa^2 \in \mathbb{R}^{2d}$

$$\begin{aligned}
& \hat{C}_t := \int_0^t R_{t-u} B a(\kappa^1, \kappa^2) B^* R_{t-u}^* du, \\
& R_s = \begin{pmatrix} I_d & 0_d \\ sI_d & I_d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_{d \times d} \\ 0_{d \times d} \end{pmatrix}, \\
& \tilde{p}^{\kappa^1, \kappa^2}(u, (x, y), (w, z)) = \frac{\exp(-\frac{1}{2} \langle \hat{C}_u^{\varepsilon, -1} Z, Z \rangle)}{(2\pi)^d \det(\hat{C}_u^{\varepsilon}(\kappa^1, \kappa^2))^{1/2}}, \quad Z := \begin{pmatrix} w - x \\ z - y - xu \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Таким образом, для мультииндекса α , $|\alpha| = 2$,

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} D_x^\alpha \tilde{p}^{\kappa^1, \kappa^2}(u, (x, y), (w, z)) dw dz = 0. \tag{41}$$

Введём указанное выше вспомогательное слагаемое

$$c^\alpha(u, (x, y), (w, z)) := \left(D_x^\alpha \tilde{p}^{\kappa^1, \kappa^2}(u, (x, y), (w, z)) \right) \Big|_{(\kappa^1, \kappa^2) = (x, y)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} D_x^\alpha R^\tau(t, (x, y), (w, z)) &= \\ &= \int_{\tau}^{t/2} du \int_{\mathbb{R}^{2d}} (D_x^\alpha \tilde{p} - c^\alpha)(u, (x, y), (w, z)) \Phi(t - u, (w, z), (x', y')) dw dz + \\ &+ \int_{\tau}^{t/2} du \int_{\mathbb{R}^{2d}} c^\alpha(u, (x, y), (w, z)) \times \\ &\times \left(\Phi(t - u, (w, z), (x', y')) - \Phi(t - u, (x, y + xu), (x', y')) \right) dw dz := \\ &:= (R^{\tau, 1} + R^{\tau, 2})(t, (x, y), (x', y')) \end{aligned} \quad (42)$$

в силу (41).

Заметим, что ввиду определения и стандартных оценок на производные гауссовских плотностей

$$|c^\alpha(u, (x, y), (w, z))| \leq \frac{C}{u} p_{c, K}(u, (x, y), (w, z)).$$

С одной стороны, $D_x^\alpha \tilde{p}(u, (x, y), (w, z))$, $c^\alpha(u, (x, y), (w, z))$ отличаются тем, что коэффициенты заморожены в различных точках (w, z) и (x, y) соответственно. Кроме того, в $c^\alpha(u, (x, y), (w, z))$ нет обратного переноса по второй переменной. Используя свойство непрерывности по Гёльдеру коэффициентов, можно показать, что

$$|(D_x^\alpha \tilde{p} - c^\alpha)(u, (x, y), (w, z))| \leq \frac{C}{u^{1-\gamma/2}} p_{c, K}(u, (x, y), (w, z)).$$

Следовательно, из (37) получаем

$$|R^{\tau, 1}(t, (x, y), (x', y'))| \leq \frac{C}{t^{|\alpha|-\gamma}} p_{c, K}(t, (x, y), (x', y')). \quad (43)$$

Для того чтобы оценить оставшийся член, мы будем использовать «сглаживающий эффект» свёртки с ядерной функцией Φ .

Лемма 4. Для области пространства

$$A_u := \left\{ (w, z) \in \mathbb{R}^{2d} : |w - x| + \frac{|z - y - xu|}{u} \leq ct^{1/2} \right\}$$

(напомним, что $u \in [0, t/2]$) верно

$$\begin{aligned} &|\Phi(t - u, (x, y + xu), (x', y')) - \Phi(t - u, (w, z), (x', y'))| \leq \\ &\leq \frac{C}{(t - u)^{1-\gamma/4}} (|x - w|^{\gamma/2} + |z - y - ux|^{\gamma/2}) p_{c, K}(t - u, (w, z), (x', y')). \end{aligned} \quad (44)$$

Доказательство. В силу определения Φ и сглаживающего эффекта свёртки с ядром H в (36) нам достаточно доказать, что на множестве

$$\bar{A}_u := \left\{ z, w \in \mathbb{R}^{2d} : |x - w| + \frac{|z - y - xu|}{u' - u} \leq c(u' - u)^{1/2} \right\}$$

выполнено

$$\begin{aligned} & |H(u' - u, (x, y + xu), (x'', y'')) - H(u' - u, (w, z), (x'', y''))| \leq \\ & \leq C \frac{|x - w|^{\gamma/2} + |z - y - xu|^{\gamma/2}}{(u' - u)^{1-\gamma/4}} p_{c,K}(u' - u, (w, z), (x'', y'')) \end{aligned} \quad (45)$$

для $u' \in (u, t]$, $u \in [0, t/2]$. Заметим, что $\bar{A}_u \subset A_u$.

Во-первых, докажем (45). Нам достаточно получить оценку для вторых производных H , так как именно эти члены содержат наибольшую сингулярность по времени:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left(a(x, y + xu) - a(x'', y'' - x''(u' - u)) \right) D_x^2 \tilde{p}(u' - u, (x, y + xu), (x'', y'')) - \\ & - \text{Tr} \left(a(w, z) - a(x'', y'' - x''(u' - u)) \right) D_x^2 \tilde{p}(u' - u, (w, z), (x'', y'')) = \\ & = \text{Tr} \left((a(x, y + xu) - a(w, z)) D_x^2 \tilde{p}(u' - u, (w, z), (x'', y'')) \right) - \\ & - \text{Tr} \left(a(x, y + xu) - a(x'', y'' - x''(u' - u)) \right) \times \\ & \times \left(D_x^2 \tilde{p}(u' - u, (x, y + xu), (x'', y'')) - D_x^2 \tilde{p}(u' - u, (w, z), (x'', y'')) \right) =: \\ & =: \text{I} + \text{II}. \end{aligned} \quad (46)$$

Из (34) получаем, что

$$\begin{aligned} |\text{I}| & \leq C \frac{|x - w|^\gamma + |z - y - xu|^{\gamma/2}}{(u' - u)} p_{c,K}(u' - u, (w, z), (x'', y'')) \leq \\ & \leq \frac{C|x - w|^{\gamma/2} + |z - y - xu|^{\gamma/2}}{(u' - u)^{1-\gamma/4}} p_{c,K}(u' - u, (w, z), (x'', y'')), \end{aligned} \quad (47)$$

используя, что $(w, z) \in \bar{A}_u$ для второго неравенства. Теперь из явного выражения для вторых производных в (40) и (A2) мы можем вывести оценку для второго слагаемого:

$$\begin{aligned} |\text{II}| & \leq (|x - x''|^\gamma + |y + xu - (y'' - (u' - u)x'')|^{\gamma/2}) \int_0^1 \frac{d\lambda}{(u' - u)^{2d}} \times \\ & \times \exp \left(- \left\{ \frac{|w - x'' + \lambda(x - w)|^2}{c(u' - u)} + \frac{|y'' - z - (u - u')w + \lambda(y + xu - z)|^2}{c(u' - u)^3} \right\} \right) \times \\ & \times \left(\frac{|w - x|}{(u' - u)^{3/2}} + \frac{|z - y - xu|}{(u' - u)^{5/2}} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

По определению области $\bar{A}_u$ множитель

$$\frac{|w-x|}{(u'-u)^{3/2}} + \frac{|y+xu-z|}{(u'-u)^{5/2}}$$

вносит сингулярность по времени порядка $1/(u'-u)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} & -\frac{|w-x''+\lambda(x-w)|^2}{c(u'-u)} - \frac{|y''-z-(u-u')w+\lambda(y+xu-z)|^2}{c(u'-u)^3} \leq \\ & \leq -\frac{|w-x''|^2}{c(u'-u)} - \frac{|y''-z-(u-u')w|^2}{c(u'-u)^3} - \left(\frac{|x-w|^2}{c(u'-u)} + \frac{|y+xu-z|^2}{c(u'-u)^3} \right), \\ & \left(\frac{|x-w|^2}{c(u'-u)} + \frac{|y+xu-z|^2}{c(u'-u)^3} \right) \leq C \quad \text{для } (w, z) \in \bar{A}_u. \end{aligned}$$

Наконец, получаем

$$\begin{aligned} |\Pi| & \leq \left(|x-x''|^\gamma + |y+xu-(y''-(u'-u)x'')|^{\gamma/2} \right) \int_0^1 \frac{d\lambda}{(u'-u)^{2d}} \times \\ & \times \exp \left(- \left\{ \frac{|w-x''+\lambda(x-w)|^2}{c(u'-u)} + \frac{|y''-z-(u-u')w+\lambda(y+xu-z)|^2}{c(u'-u)^3} \right\} \right) \times \\ & \times \left(\frac{|w-x|}{(u'-u)^{3/2}} + \frac{|z-y-xu|}{(u'-u)^{5/2}} \right), \end{aligned} \quad (49)$$

используя выпуклость функции и тот факт, что на A_u для достаточно большой константы C выполнено

$$\frac{|w-x|}{(u'-u)^{1/2}} + \frac{|z-y-xu|}{(u'-u)^{3/2}} \leq C(|x-w|^{\gamma/2} + |z-y-xu|^{\gamma/2}).$$

Для того чтобы завершить доказательство (44) на A_u , мы рассмотрим оставшуюся область: $(w, z) \notin \bar{A}_u$. Из (36) получаем

$$\begin{aligned} & \int_u^t du' \int_{\bar{A}_u^c} |H(u'-u, (x, y+xu), (x'', y'')) - H(u'-u, (w, z), (x'', y''))| \times \\ & \times \left| \left(\sum_{i \geq 1} H^{(i)} \right) (t-u', (x'', y''), (x', y')) \right| dx'' dy'' \leq \\ & \leq C \int_u^t du' \int_{\bar{A}_u^c} \left(p_{c,K}(u'-u, (x, y+xu), (x'', y'')) + p_{c,K}(u'-u, (w, z), (x'', y'')) \right) \times \\ & \times \frac{|x-w|^{\gamma/6}}{(u'-u)^{1-5\gamma/12}} + \\ & + \frac{|z-y-xu|^{\gamma/6}}{(u'-u)^{1-3\gamma/12}} \frac{C}{(t-u')^{1-\gamma/2}} p_{c,K}(t-u', (x'', y''), (x', y')) dx'' dy'' \leq \end{aligned}$$

$$\leq C_1 \int_u^t \int_{\bar{A}_u^c} \frac{du'}{(u' - u)^{1-\gamma/4}} \frac{|x - w|^{\gamma/6} + |z - y - xu|^{\gamma/6}}{(t - u')^{1-\gamma/2}} \times \\ \times \{p_{c,K}(t - u, (w, z), (x', y')) + p_{c,K}(t - u, (x, y + xu), (x', y'))\} dx'' dy'',$$

используя тот факт, что $(w, z) \in \bar{A}_u^c$.

Рассмотрим стандартное соотношение между гауссовскими плотностями в близких точках $p_{c,K}(t - u, (x, y + xu), (x', y'))$ и $p_{c,K}(t - s, (x, y), (x', y'))$. Заметим, что

$$p_{c,K}(t - u, (x, y + xu), (x', y')) \leq \\ \leq \frac{C}{(t - u)^{2d}} \exp \left\{ - \left[\frac{|x - x'|^2}{t - u} + \frac{|y + ux + x(t - u) - y'|^2}{(t - u)^3} \right] \right\} \leq \\ \leq C p_{c,K}(t - u, (x, y), (x', y')), \quad (50)$$

так как $t - u$ — величина порядка t . Последнее соотношение и завершает доказательство леммы 4. $\square$

Теперь из (34), (42) и (44) следует, что

$$|R^{\tau,2}(t, (x, y), (x', y'))| \leq \\ \leq C^2 \int_{\tau}^{t/2} du \int_{A_u} \frac{|x - w|^{\gamma/2} + |y - z - xu|^{\gamma/2}}{u} p_{c,K}(u, (x, y), (w, z)) \times \\ \times \frac{1}{(t - u)^{1-\gamma/4}} p_{c,K}(t - u, (w, z), (x', y')) dw dz + \\ + \frac{C}{t^{\gamma/4}} \int_{\tau}^{t/2} du \int_{A_u^c} \frac{|x - w|^{\gamma/2} + |y - z - xu|^{\gamma/2}}{u} p_{c,K}(u, (x, y), (w, z)) \times \\ \times \{|\Phi(t - u, (w, z), (x', y'))| + |\Phi(t - u, (x, y - xu), (x', y'))|\} dw dz. \quad (51)$$

На дополняющем множестве A_u^c справедливо

$$\left| \int_{\tau}^{t/2} du \int_{A_u^c} c^{\alpha}(u, (x, y), (w, z)) \times \right. \\ \times \left(\Phi(t - u, (w, z), (x', y')) - \Phi(t - u, (x, y + xu), (x', y')) \right) dw dz \Big| \leq \\ \leq \frac{1}{t^{\gamma/4}} \left| \int_{\tau}^{t/2} \int_{A_u^c} \frac{|w - x|^{\gamma/2} + |z - (y + ux)|^{\gamma/2}}{u} p_{c,K}(u, (x, y), (w, z)) \times \right. \\ \times \left. [|\Phi(t - u, (w, z), (x', y'))| + |\Phi(t - u, (x, y + xu), (x', y'))|] dw dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{t^{\gamma/4}} \left| \int_{\tau}^{t/2} du \int_{A_u^c} \frac{1}{u^{1-\gamma/4}} \frac{1}{(t-u)^{1-\gamma/2}} p_{c,K}(u, (x, y), (w, z)) \times \right. \\ \left. \times [p_{c,K}(t-u, (w, z), (x', y')) + p_{c,K}(t-u, (x, y+xu), (x', y'))] dw dz \right|. \quad (52)$$

Подставляя (50) в (52), получаем оценку на множестве A_u^c :

$$\left| \int_{\tau}^{t/2} du \int_{A_u^c} c^{\alpha}(u, (x, y), (w, z)) \times \right. \\ \left. \times \left(\Phi(t-u, (w, z), (x', y')) - \Phi(t-u, (x, y+xu), (x', y')) \right) dw dz \right| \leq \\ \leq \frac{1}{t^{\gamma/4}} p_{c,K}(t, (x, y), (x', y')) \left| \int_{\tau}^{t/2} \frac{du}{u^{1-\gamma/4}} \frac{1}{(t-u)^{1-\gamma/2}} \right| \leq \\ \leq \frac{C}{t^{1-\gamma/2}} p_{c,K}(t, (x, y), (x', y')). \quad (53)$$

Таким образом, используя лемму 4, получаем

$$|R^{\tau,2}(t, (x, y), (x', y'))| \leq \\ \leq C \int_{\tau}^{t/2} du \int_{A_u} \frac{|x-w|^{\gamma/2} + |y-z-xu|^{\gamma/2}}{u} p_{c,K}(u, (x, y), (w, z)) \times \\ \times \frac{1}{(t-u)^{1-\gamma/4}} p_{c,K}(t-u, (w, z), (x', y')) dw dz + \frac{C}{t^{1-\gamma/2}} p_{c,K}(t, (x, y), (x', y')) \leq \\ \leq \frac{C}{t^{1-\gamma/2}} p_{c,K}(t, (x, y), (x', y')),$$

что вместе с оценками (43), (42), (39) и (38) доказывает теорему. $\square$

Автор благодарит профессора В. Д. Конакова и профессора С. Меноцци за важные и полезные замечания. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01098).

Литература

- [1] Кожина А. Устойчивость переходных плотностей вырожденных диффузий // Теория вероятн. и её примен. — 2016. — Т. 61, № 3. — С. 570—579.
- [2] Сонин И. М. Об одном классе вырождающихся диффузионных процессов // Теория вероятн. и её примен. — 1967. — Т. 12, № 3. — С. 540—547.
- [3] Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations. I. Convergence rate of the distribution function // Probab. Theory Relat. Fields. — 1996. — Vol. 104, no. 1. — P. 43—60.

- [4] Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations. II. Convergence rate of the density // *Monte Carlo Methods Appl.* — 1996. — Vol. 2, no. 2. — P. 93–128.
- [5] Il'in A. M., Kalashnikov A. S., Oleinik O. A. Second-order linear equations of parabolic type // *Usp. Mat. Nauk.* — 1962. — Vol. 17, no. 3 (105). — P. 3–146.
- [6] Kolmogorov A. N. Zufällige Bewegungen (zur Theorie der Brownschen Bewegung) // *Ann. Math.* — 1934. — Vol. 35. — P. 116–117.
- [7] Konakov V., Kozhina A., Menozzi S. Stability of densities for perturbed diffusions and Markov chains // *ESAIM: Probab. Statist.* — 2017. — Vol. 21. — P. 88–112.
- [8] Konakov V., Mammen E. Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions // *Probab. Theory Relat. Fields.* — 2000. — Vol. 117, no. 4. — P. 551–587.
- [9] Konakov V., Mammen E. Edgeworth type expansions for Euler schemes for stochastic differential equations // *Monte Carlo Methods Appl.* — 2002. — Vol. 8, no. 3. — P. 271–285.
- [10] Konakov V., Menozzi S. Weak error for the Euler scheme approximation of diffusions with non-smooth coefficients // *Electron. J. Probab.* — 2017. — Vol. 22. — No. 46. — P. 1–47.
- [11] Konakov V., Menozzi S., Molchanov S. Explicit parametrix and local limit theorems for some degenerate diffusion processes // *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* — 2010. — Vol. 46, no. 4. — P. 908–923.
- [12] Kusuoka S., Stroock D. Applications of the Malliavin calculus. I // *Proc. of the Taniguchi Inter. Symp. Katata and Kyoto 1982* / K. Itô, ed. — Tokyo: Kinokuniya, 1984. — (Stoch. Analysis; Vol. 32). — P. 271–306.
- [13] Kusuoka S., Stroock D. Applications of the Malliavin calculus. II // *J. Fac. Sci. Tokyo Univ. Sec. IA.* — 1985. — Vol. 32, no. 1. — P. 1–76.
- [14] Lemaire V., Menozzi S. On some non asymptotic bounds for the Euler scheme // *Electron. J. Probab.* — 2010. — Vol. 15. — No. 53. — P. 1645–1681.
- [15] Lunardi A. Schauder estimates for a class of degenerate elliptic and parabolic operators with unbounded coefficients in $\mathbb{R}^n$ // *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa — Classe Sci.* — 1997. — Vol. 24, no. 1. — P. 133–164.
- [16] Maruyama G. Continuous Markov processes and stochastic equations // *Rend. Circ. Mat. Palermo.* — 1955. — Vol. 4. — P. 48.
- [17] Menozzi S. Parametrix techniques and martingale problems for some degenerate Kolmogorov equations // *Electron. Commun. Probab.* — 2011. — Vol. 16. — No. 23. — P. 234–250.
- [18] Mikulevičius R., Platen E. Rate of convergence of the Euler approximation for diffusion processes // *Math. Nachrichten.* — 1991. — Vol. 151, no. 1. — P. 233–239.
- [19] Priola E. Global Schauder estimates for a class of degenerate Kolmogorov equations // *Stud. Math.* — 2009. — Vol. 194, no. 2. — P. 117–153.
- [20] Talay D., Tubaro L. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations // *Stoch. Anal. App.* — 1990. — Vol. 8. — P. 483–509.
- [21] Weber M. The fundamental solution of a degenerate partial differential equation of parabolic type // *Trans. Am. Math. Soc.* — 1951. — Vol. 71. — P. 24–37.