# О форме высокого выброса гауссовского стационарного процесса

**Е. В. КРЕМЕНА**
*Московский государственный университет*
*им. М. В. Ломоносова*
e-mail: janesbond088@yahoo.com

УДК 519.21

**Ключевые слова:** гауссовские процессы, большие выбросы траекторий, асимптотическое поведение, ковариационная функция.

**Аннотация**

Исследуется форма высокого выброса гауссовского стационарного процесса, пересекшего высокий уровень $u$. Показано, что в этом случае траектории данного процесса незначительно колеблются вокруг ожидаемого движения. Вероятность таких событий может быть оценена достаточно точно при $u \to \infty$.

**Abstract**

*E. V. Kremena, On the shape of a high excursion of a Gaussian stationary process*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 3, pp. 119—125.

We investigate the shape of an excursion above a high level $u$ by a stationary Gaussian process. The shape depends on the conditioned mean and covariances of the underlying process. The paths vary slightly around a deterministic trend. The probability of such event can be determined asymptotically exactly for $u \to \infty$.

## 1. Введение и основной результат

Пусть $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — гауссовский стационарный процесс с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией $r(t)$. Нас будет интересовать предельная структура выбросов траектории данного процесса, пересекшей высокий уровень $u$. Мы покажем, что траектории такого процесса движутся с подавляющей вероятностью в относительно узком коридоре вокруг ожидаемого движения $E(x(t) \mid x(0) = u) = ur(t)$. При этом для любого $\delta \in (0, 1)$ амплитуда колебаний данного процесса вокруг этой величины с большой вероятностью не превосходит $u^\delta d(t)$, где $d^2(t)$ — условная дисперсия $x(t)$ при фиксированном $x(0)$. Таким образом, амплитуда асимптотически меньше самого уровня $u$ при $u \to \infty$.

Поведение траекторий гауссовского процесса, достигших высокого уровня, исследовалось достаточно подробно в контексте так называемой модели Слепяна [4]. Похожая задача для траекторий, имеющих высокий локальный максимум, рассмотрена в [5]. В этом случае соответствующий условный процесс

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2018, том 22, № 3, с. 119—125.

осциллирует вокруг детерминированной функции порядка $u$. Форма выбросов гауссовского процесса за высокий уровень изучена также в [1—3].

В настоящей работе мы рассмотрим простой тип выброса, т. е. события вида

$$\bigcup_{t\in[0,p]}\{x(t)>u\}$$

для некоторого $p>0$. Нас будет интересовать поведение траекторий процесса $x(t,\omega)$ для $\omega$, принадлежащих этому событию.

Предположим, что функция $r(t)$ удовлетворяет следующим условиям.

1. Для некоторого $\alpha\in(0,2)$ $r(t)=1-|t|^\alpha+o(|t|^\alpha)$ при $t\to 0$.
2. Для всех $t>0$ $r(t)<1$.
3. $\varepsilon>0$ таково, что максимум $r(t)$ на отрезке $[\varepsilon,p]$ достигается в единственной точке $\varepsilon$, $r(t)$ дифференцируема на отрезке $[\varepsilon,p]$, причём производная ограничена на этом отрезке.

Введём событие

$$B_{u,\varepsilon,\delta}(s)=\{|x(t)-ur(t)|\leqslant u^\delta d(t),\ t\in[\varepsilon,s]\},\quad s>\varepsilon>0,\quad \delta\in(0,1),$$

где $d^2(t)=1-r^2(t)$. Обозначим через $T_t$ группу сдвигов в основном вероятностном пространстве вдоль траекторий процесса $x$: $T_t x(\cdot)=x(\cdot+t)$.

**Теорема 1.** *Пусть $x(t)$, $t\in R$, — гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и единичной дисперсией, ковариационная функция которого удовлетворяет условиям* 1—3. *Тогда для любых $p$, $s$, $p>0$, $s>\varepsilon>0$, имеет место соотношение*

$$P\biggl(\bigcup_{t\in[0,p]}\{x(t)>u\}\cap\{T_tB_{u,\varepsilon,\delta}(s)\}\biggr)=H_\alpha p u^{2/\alpha}\Psi(u)\bigl(1+o(1)\bigr)$$

*при $u\to\infty$, где*

$$H_\alpha=\lim_{p\to\infty}\frac{H_\alpha(p)}{p}\in(0,\infty),\quad H_\alpha(p)=E\exp\Bigl(\max_{0\leqslant t\leqslant p}\chi(t)\Bigr),$$

*$\chi(t)=\sqrt{2}B_{\alpha/2}(t)-t^\alpha$ и $B_{\alpha/2}(t)$ — дробное броуновское движение с параметром $\alpha/2$, $\Psi(u)=P(x(0)>u)$.*

## 2. Леммы и доказательства

**Лемма 1.** *В условиях теоремы 1 для любых $\Lambda>0$, $s>\varepsilon>0$ найдётся $C>0$, такое что при достаточно большом $u$ и для любого $\theta>0$ будет выполнено следующее: при $\delta\in(0,1/3]$*

$$P\leqslant Ce^{-u^{2/3-\theta}}\Psi(u),$$

*при $\delta\in(1/3,1)$*

$$P\leqslant Ce^{-u^{1-\delta}}\Psi(u),$$

где

$$P = P(\delta) = P\biggl(\bigcup_{t\in[0,\Lambda u^{-2/\alpha}]} \{x(t) > u\} \cap \bigl\{T_t \overline{B_{u,\varepsilon,\delta}(s)}\bigr\}\biggr).$$

Заметим, что отсюда следует, что $P = o\bigl(\Psi(u)\bigr)$ при $u \to \infty$ для любого $\delta \in (0,1)$.

**Доказательство.** Имеем

$$P = P\biggl(\bigcup_{t\in[0,\Lambda u^{-2/\alpha}]} \{x(t) > u\} \cap \{T_t \overline{B_{u,\varepsilon,\delta}(s)}\}\biggr) \leqslant$$
$$\leqslant P\biggl(\bigcup_{t\in[0,\Lambda u^{-2/\alpha}]} \{x(t) > u\} \cap \biggl\{\sup_{\tau\in[\varepsilon, s+\Lambda u^{-2/\alpha}]} \left|\frac{x(\tau) - ur(\tau - t)}{d(\tau - t)}\right| > u^{\delta}\biggr\}\biggr).$$

Поскольку $t \leqslant \Lambda u^{-2/\alpha}$, то при $u \to \infty$ для функций $r$, $d$ получим

$$ur(\tau - t) = ur(\tau) - utr'(\tau) + O(u^{1-4/\alpha}) = ur(\tau) + O(u^{1-2/\alpha}),$$
$$d(\tau - t) = d(\tau)\left(1 - \frac{d'(\tau)}{d(\tau)}t + O(t^2)\right) = d(\tau)\bigl(1 + O(u^{-2/\alpha})\bigr).$$

Отсюда следует, что вероятность $P$ можно оценить сверху следующим образом:

$$P \leqslant P\biggl(\bigcup_{t\in[0,\Lambda u^{-2/\alpha}]} \{x(t) > u\} \cap \left\{\sup_{\tau\in[\varepsilon, s+\Lambda u^{-2/\alpha}]} \left|\frac{x(\tau) - ur(\tau)}{d(\tau)}\right| > u^{\delta} - 1\right\}\biggr),$$

поскольку $\alpha < 2$. Обозначим

$$S_1 = \Bigl\{u < \sup_{t\in[0,\Lambda u^{-2/\alpha}]} x(t) < u + u^{-\delta}\Bigr\}.$$

Тогда последняя вероятность не превосходит суммы

$$P\biggl(\sup_{\tau\in[\varepsilon, s+\Lambda u^{-2/\alpha}]} \left|\frac{x(\tau) - ur(\tau)}{d(\tau)}\right| > u^{\delta} - 1, S_1\biggr) +$$
$$+ P\Bigl(\sup_{t\in[0,\Lambda u^{-2/\alpha}]} x(t) > u + u^{-\delta}\Bigr) = A_1 + A_2.$$

Для второго слагаемого имеем в силу [7, лемма 6.1]

$$A_2 = c_1 \Psi(u + u^{-\delta})\bigl(1 + o(1)\bigr)$$

при $u \to \infty$. Первое слагаемое запишем в виде

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} P\biggl(\sup_{\tau\in[\varepsilon, s+\Lambda u^{-2/\alpha}]} \left|\frac{x(\tau)-ur(\tau)}{d(\tau)}\right| > u^\delta - 1,\ S_1 \mid x(0)=y\biggr) dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{u-u^{\delta-1}} e^{-y^2/2} P(S_1 \mid x(0)=y)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{u-u^{\delta-1}}^{u+u^{-\delta}} e^{-y^2/2} P\biggl(\sup_{\tau\in[\varepsilon, s+\Lambda u^{-2/\alpha}]} \left|\frac{x(\tau)-ur(\tau)}{d(\tau)}\right| > u^\delta - 1 \;\Big|\; x(0)=y\biggr) dy =$$

$$= B_1 + B_2.$$

В $B_1$ сделаем замену

$$y = u - \frac{w}{u}$$

и определим гауссовский процесс

$$\chi_u(t) = u(x(u^{2/\alpha} t) - u) + w.$$

Тогда перепишем это слагаемое в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} u} e^{-u^2/2} \int\limits_{u^\delta}^{\infty} e^{w - w^2/2u^2} P\biggl(\sup_{t\in[0,\Lambda]} \chi_u(t) > w \;\Big|\; x(0) = u - \frac{w}{u}\biggr) dw.$$

Поскольку

$$\sup_{t,u} \operatorname{Var}\biggl(\chi_u(t) \;\Big|\; x(0) = u - \frac{w}{u}\biggr) < \infty \quad \text{и} \quad \sup_{t,u} E\biggl(\chi_u(t) \;\Big|\; x(0) = u - \frac{w}{u}\biggr) < \infty,$$

то по теореме Бореля (см. [7, с. 13]) существуют константы $a_0$, $b_0$, такие что вероятность под интегралом оценивается сверху величиной

$$2\Psi\left(\frac{w-a_0}{b_0}\right) \quad \text{для любого} \quad u \geqslant u_0.$$

Тогда получаем грубую оценку

$$B_1 \leqslant c_2 \Psi(u) \Psi\left(\frac{u^\delta - a}{b}\right),$$

где $a$, $b$, $c_2$ — новые константы. Второе слагаемое $B_2$ сверху оценивается величиной

$$\bigl(\Psi(u-u^{\delta-1}) - \Psi(u+u^{-\delta})\bigr) P\biggl(\sup_{\tau\in[\varepsilon, s+\Lambda u^{-2/\alpha}]} \left|\frac{x(\tau)-ur(\tau)}{d(\tau)}\right| > u^\delta - 1 \;\Big|\; x(0)=u\biggr).$$

Рассмотрим гауссовский процесс $y(\tau)$, распределённый так же, как и

$$\left(\frac{x(\tau)-ur(\tau)}{d(\tau)} \;\Big|\; x(0)=u\right)$$

на отрезке $[\varepsilon, s+1]$. Заметим, что $E\big(y(\tau)\big) = 0$, $\mathrm{Var}\big(y(\tau)\big) = 1$ при $\tau \in [\varepsilon, s+1]$. Отсюда получаем, что

$$P\Bigg(\sup_{\tau\in[\varepsilon,s+\Lambda u^{-2/\alpha}]}\left|\frac{x(\tau)-ur(\tau)}{d(\tau)}\right| > u^\delta - 1 \;\Big|\; x(0) = u\Bigg) \leqslant$$
$$\leqslant P\Big(\sup_{\tau\in[\varepsilon,s+1]}|y(\tau)| > u^\delta - 1\Big) \leqslant c_3 u^{2\delta/\alpha}\Psi(u^\delta - 1)\big(1+o(1)\big)$$

в силу [7, теоремы 2, с. 16]).

Итак, окончательная оценка для требуемой вероятности

$$P \leqslant A_1 + A_2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(c_1\Psi(u+u^{-\delta}) + c_2\Psi(u)\Psi\left(\frac{u^\delta - a}{b}\right) + c_3u^{2\delta/\alpha}\Psi(u-u^{\delta-1})\Psi(u^\delta-1)\right)\big(1+o(1)\big).$$

Учитывая, что $\Psi(u) = O\big((1/u)e^{-u^2/2}\big)$ при $u \to \infty$, нетрудно показать, что при $\delta \in (1/3, 1)$ второе и третье слагаемые асимптотически меньше первого и, поскольку $P = P(\delta)$ возрастает на $\delta \in (0,1)$, получаем утверждение леммы 1. $\square$

Доказательство теоремы будем проводить с помощью метода двойных сумм [6; 7, с. 12—19], поэтому для начала докажем аналог теоремы для отрезка $[0, \Lambda u^{-2/\alpha}]$.

**Лемма 2.** *В условиях и обозначениях теоремы* 1 *для всех* $\Lambda > 0$, $s > \varepsilon > 0$

$$P\Bigg(\bigcup_{t\in[0,\Lambda u^{-2/\alpha}]}\{x(t) > u\} \cap \{T_t B_{u,\varepsilon}(s)\}\Bigg) = H_\alpha(\Lambda)\Psi(u)\big(1+o(1)\big)$$

*при* $u \to \infty$.

**Доказательство.** Введём события $A_t = \{x(t) > u\}$, $B_t = \{T_t B_{u,\varepsilon}(s)\}$. Тогда

$$P\Big(\bigcup_t A_t \cap B_t\Big) = P\Big(\bigcup_t A_t \setminus (A_t \cap \overline{B_t})\Big) \leqslant P\Big(\bigcup_t A_t\Big),$$
$$P\Big(\bigcup_t A_t \cap B_t\Big) \geqslant P\Big(\bigcup_t A_t\Big) - P\Big(\bigcup_t A_t \cap \overline{B_t}\Big).$$

Значит,

$$P\Bigg(\bigcup_{t\in[0,\Lambda u^{-2/\alpha}]}\{x(t) > u\} \cap \{T_t B_{u,\varepsilon}(s)\}\Bigg) \leqslant H_\alpha(\Lambda)\Psi(u)\big(1+o(1)\big)$$

при $u \to \infty$, так как

$$P\Big(\bigcup_t A_t\Big) = H_\alpha(\Lambda)\Psi(u)\big(1+o(1)\big)$$

при $u \to \infty$ (см. [7, с. 12]);

$$P\Bigl(\bigcup_{t\in[0,\Lambda u^{-2/\alpha}]}\{x(t)>u\}\cap\{T_tB_u(s)\}\Bigr)\geqslant$$
$$\geqslant\Bigl(H_\alpha(\Lambda)\Psi(u)-o\bigl(H_\alpha(\Lambda)\Psi(u)\bigr)\Bigr)\bigl(1+o(1)\bigr)=H_\alpha(\Lambda)\Psi(u)\bigl(1+o(1)\bigr)$$

при $u\to\infty$. Оценки сверху и снизу совпадают, значит, лемма 2 доказана. □

**Доказательство теоремы 1.** Итак, мы доказали, что

$$P\Bigl(\bigcup_{t\in[0,\Lambda u^{-2/\alpha}]}\{x(t)>u\}\cap\{T_tB_{u,\varepsilon,\delta}(s)\}\Bigr)\sim H_\alpha(\Lambda)\Psi(u)$$

при $u\to\infty$. Докажем, что

$$P\Bigl(\bigcup_{t\in[0,p]}\{x(t)>u\}\cap\{T_tB_{u,\varepsilon,\delta}(s)\}\Bigr)\sim H_\alpha p u^{2/\alpha}\Psi(u)$$

при $u\to\infty$.

Разобьём отрезок $[0,p]$ на отрезки длины $\Lambda u^{-2/\alpha}$ и введём следующие обозначения:

$$\Delta_k=[ku^{-2/\alpha}\Lambda,(k+1)u^{-2/\alpha}\Lambda],\quad N_t=\left[\frac{t}{u^{-2/\alpha}\Lambda}\right],$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Из стационарности получаем оценку сверху

$$P\Bigl(\bigcup_{t\in[0,p]}\{x(t)>u\}\cap\{T_tB_{u,\varepsilon,\delta}(s)\}\Bigr)\leqslant$$
$$\leqslant(N_p+1)P\Bigl(\bigcup_{t\in\Delta_0}\{x(t)>u\}\cap\{T_tB_{u,\varepsilon,\delta}(s)\}\Bigr).$$

Далее, из неравенства Бонферрони

$$P\Bigl(\bigcup_{t\in[0,p]}\{x(t)>u\}\cap\{T_tB_{u,\varepsilon,\delta}(s)\}\Bigr)\geqslant N_pP\Bigl(\bigcup_{t\in\Delta_0}\{x(t)>u\}\cap\{T_tB_{u,\varepsilon,\delta}(s)\}\Bigr)-$$
$$-2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant N_p}P\Bigl(\bigcup_{t\in\Delta_i}\{x(t)>u\}\cap\{T_tB_{u,\varepsilon,\delta}(s)\},\bigcup_{t\in\Delta_j}\{x(t)>u\}\cap\{T_tB_{u,\varepsilon,\delta}(s)\}\Bigr)\geqslant$$
$$\geqslant N_pP\Bigl(\bigcup_{t\in\Delta_0}\{x(t)>u\}\cap\{T_tB_{u,\varepsilon,\delta}(s)\}\Bigr)-$$
$$-2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant N_p}P\Bigl(\max_{t\in\Delta_i}x(t)>u,\ \max_{t\in\Delta_j}x(t)>u\Bigr).$$

Последняя двойная сумма оценена в [7, с. 17, 18], там же показано, что она асимптотически меньше первого слагаемого в последнем выражении. Отсюда получаем требуемую оценку снизу. Подставив $N_p$, убеждаемся, что верхняя и нижняя оценка совпадают, что и требовалось доказать. □

В заключение автор выражает благодарность профессору В. И. Питербаргу за постановку задачи и помощь в работе.

## Литература

[1] Беляев Ю. К., Носко В. П. Характеристики выбросов за высокий уровень гауссовского процесса и его огибающей // Теория вероятн. и её примен. — 1969. — Т. 14, № 2. — С. 302—314.

[2] Носко В. П. Локальная структура однородного гауссовского случайного поля в окрестности точек высокого уровня. Теория вероятн. и её примен. — 1985. — Т. 30, № 4. — С. 722—736.

[3] Носко В. П. Асимптотические распределения характеристик выбросов однородного гауссовского случайного поля за высокий уровень // Теория вероятн. и её примен. — 1987. — Т. 32, № 4. — С. 722—733.

[4] Leadbetter M. R., Lindgren G., Rootzen H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. — Berlin: Springer, 1983.

[5] Lindgren G. Some properties of a normal process near a local maximum // Ann. Math. Stat. — 1971. — Vol. 41. — P. 1870—1883.

[6] Pickands J. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes // Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — Vol. 145. — P. 51—73.

[7] Piterbarg V. I. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. — Providence: Amer. Math. Soc., 1996. — (Transl. Math. Monogr.).