Оценка вероятности разорения акционерной страховой компании в рамках модели риска Спарре Андерсена

А. А. МУРОМСКАЯ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: aa-muromskaya@yandex.ru

УДК 519.21

Ключевые слова: страхование, модель риска Спарре Андерсена, вероятность разорения, выплата дивидендов, линейная барьерная стратегия.

Аннотация

Получена оценка сверху для вероятности разорения акционерной страховой компании при условии, что интервалы между моментами поступления требований имеют гамма-распределение и страховая компания использует линейную барьерную стратегию выплаты дивидендов.

Abstract

A. A. Muromskaya, On the probability of ruin of a joint-stock insurance company in the Sparre Andersen risk model, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 3, pp. 179—189.

An upper bound for the ruin probability of a joint-stock insurance company is obtained, provided that the intervals between the claim times have a gamma distribution and the insurance company uses a linear barrier dividend strategy.

1. Введение

Рассмотрим модель риска Спарре Андерсена. В рамках данной модели капитал страховой компании в момент времени t имеет вид

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где x — начальный капитал компании, c — интенсивность поступления премий, N_t — процесс восстановления. Случайные величины $\{X_i\}$, обозначающие размеры исков, являются невырожденными, независимыми и одинаково распределёнными и имеют при этом функцию распределения $F(y)$, такую что $F(0) = 0$.

Функция $G(y)$, в свою очередь, является функцией распределения интервалов между моментами $\{T_j\}$ поступления требований. Кроме того, $\{X_i\}$ и процесс N_t также предполагаются независимыми.

Одним из важных результатов, связанных с моделью риска Спарре Андерсена, является оценка сверху для вероятности разорения компании. Пусть $\tau = \inf[t \geqslant 0\colon X_t < 0]$ — момент разорения страховой компании, капитал которой в момент времени t имеет вид (1). Тогда $\psi(x) = P(\tau < \infty \mid X_0 = x)$ — вероятность разорения. Предположим также, что существует единственный положительный корень R уравнения

$$\int\limits_0^\infty e^{ry}\, dF(y) \int\limits_0^\infty e^{-crt}\, dG(t) = 1, \tag{2}$$

который называется характеристическим показателем или экспонентой Лундберга. В этом случае справедлива следующая оценка вероятности разорения:

$$\psi(x) \leqslant e^{-Rx}. \tag{3}$$

Данное неравенство является аналогом знаменитого неравенства Лундберга, доказанного для частного случая модели Спарре Андерсена — модели риска Крамера—Лундберга, согласно которой N_t является пуассоновским процессом (см. [1]).

Однако стоит отметить, что в классической модели риска Спарре Андерсена не учитывается тот факт, что страховая компания может являться акционерным обществом, в то время как выплата дивидендов имеет большое значение при вычислении вероятности разорения. Капитал страховой компании, выплачивающей дивиденды, определим как $U_t = X_t - D_t$, где D_t обозначает сумму, выплаченную акционерам в качестве дивидендов к моменту времени t. Дивиденды выплачиваются при этом в соответствии с барьерной стратегией с уровнем барьера b_t, которая заключается в следующем. Если $U_t < b_t$, то дивиденды не выплачиваются. Как только капитал U_t достигает уровня барьера b_t, поступающая премия начинает полностью или частично (в зависимости от вида функции b_t) выплачиваться в качестве дивидендов, и далее капитал остаётся на уровне барьера до поступления ближайшего требования. Если же $U_t > b_t$, то сразу в качестве дивидендов выплачивается сумма, равная $U_t - b_t$ (заметим, что неравенство $U_t > b_t$ может выполняться только при $t = 0$). Случайная величина $T = \inf[t \geqslant 0\colon U_t < 0]$ является тогда моментом разорения акционерной компании, а $\psi^{\mathrm{div}}(x) = P(T < \infty \mid U_0 = x)$ — её вероятностью разорения. Таким образом, отдельный интерес представляют исследования, направленные на изучение функции $\psi^{\mathrm{div}}(x)$. Определяющую роль при проведении исследований играют выбор функции барьера b_t и выбор вида распределения интервалов между моментами $\{T_j\}$ поступления требований. В случае когда данное распределение является показательным, получен целый ряд интересных результатов для различных функций b_t (многие из них упомянуты в обзорной статье [4]). Известно, например, что если барьер b_t не изменяется с течением времени, то вероятность разорения компании будет равна 1. Однако задачам поиска и оценки $\psi^{\mathrm{div}}(x)$ в случае, когда распределение интервалов между моментами $\{T_j\}$ является более общим, чем показательное, и барьер b_t не равен тождественно константе, посвящено совсем небольшое количество работ ([2] и [3]). Так, в [2] получены оценки вероятности разорения $\psi^{\mathrm{div}}(x)$ для всех функций распределения $F(y)$ и $G(y)$, для которых существует характеристический показатель R, и для барьерной стратегии со ступенчатой функцией барьера, согласно которой уровень барьера b_t равен b_i на полуинтервалах вида $[T_{i-1}, T_i)$, $i \geqslant 1$ ($T_0 = 0$). В [3] предполагается, что интервалы между моментами $\{T_j\}$ поступления требований имеют обобщённое распределение Эрланга, т. е. данные случайные величины можно представить как сумму n независимых показательно распределённых случайных величин с параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. В качестве дивидендной стратегии выбрана линейная барьерная стратегия с уровнем барьера $b_t = b + at$, где $b \geqslant 0$, $0 < a < c$. В соответствии с линейной барьерной стратегией дивиденды выплачиваются с интенсивностью $c - a$, когда $U_t = b_t$. При данных условиях модели в [3] выводятся интегродифференциальные уравнения для вероятности неразорения $\delta^{\mathrm{div}}(x, b) = 1 - \psi^{\mathrm{div}}(x, b)$, однако решение полученных уравнений в явном виде представляется очень сложной задачей — авторы [3] только приводят подробный алгоритм решения для случая $n = 2$ и экспоненциального распределения требований $\{X_i\}$.

Таким образом, вероятность разорения в моделях с барьерными стратегиями выплаты дивидендов с непостоянными (и, в частности, линейными) уровнями барьеров b_t на сегодняшний день изучена не полностью. В данной работе будет получена оценка сверху для $\psi^{\mathrm{div}}(x, b)$ при условии, что страховая компания использует линейную барьерную стратегию и интервалы между моментами $\{T_j\}$ имеют гамма-распределение с плотностью

$$g(y) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}, \quad y \geqslant 0, \quad \alpha > 1, \quad \lambda > 0.$$

В силу того что при $b < x$ мы получаем $\psi^{\mathrm{div}}(x, b) = \psi^{\mathrm{div}}(b, b)$, далее без ограничения общности будем считать, что начальный капитал x не превышает b.

2. Основная часть

Итак, мы по-прежнему предполагаем, что существует характеристический показатель R, являющийся положительным корнем уравнения (2). Заметим при этом, что

$$\int_0^\infty e^{Ry}\, dF(y) = \left(\int_0^\infty e^{-cRt}\, dG(t) \right)^{-1} = \left(\int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-(\lambda+Rc)t}\, dt \right)^{-1} = \frac{(\lambda+Rc)^\alpha}{\lambda^\alpha}.$$

Кроме коэффициента R, нам также понадобится коэффициент Q, который определён в следующей лемме.

Лемма 1. *Существует единственный корень $Q > 0$ уравнения*

$$\int_0^\infty e^{-qy}\,dF(y)\int_0^\infty e^{-t(Ra+qa-qc)}\,dG(t) = 1, \tag{4}$$

при этом

$$\frac{Ra}{c-a} < Q < \frac{Ra+\lambda}{c-a}.$$

Доказательство. Второй интеграл в левой части уравнения (4) может быть вычислен как

$$\int_0^\infty e^{-t(Ra+qa-qc)}\,dG(t) = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-t(\lambda+Ra+qa-qc)}\,dt = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+Ra+qa-qc)^\alpha}$$

при условии, что $\lambda + Ra + qa - qc > 0$. Если данное условие не выполняется, указанный интеграл расходится, а значит, уравнение (4) не имеет корней на промежутке $[(Ra+\lambda)/(c-a), \infty)$. Если же $q < (Ra+\lambda)/(c-a)$, то мы можем переписать (4) в виде

$$\int_0^\infty e^{-qy}\,dF(y) = \frac{(\lambda+Ra+qa-qc)^\alpha}{\lambda^\alpha}.$$

Функция

$$f_1(q) = \int_0^\infty e^{-qy}\,dF(y)$$

обладает следующими свойствами: $f_1(q)$ определена по крайней мере при всех $q \geqslant 0$, $f_1(0) = 1$, $f_1(q)$ положительна, непрерывна и убывает на $[0,\infty)$. Функция

$$f_2(q) = \frac{(\lambda+Ra+qa-qc)^\alpha}{\lambda^\alpha}$$

определена, положительна, непрерывна и убывает при всех $q < (Ra+\lambda)/(c-a)$, $f_2(0) > 1$, $f_2\big(Ra/(c-a)\big) = 1$. Более того,

$$f_2\left(\frac{Ra+\lambda}{c-a} - \varepsilon\right) = \frac{\varepsilon^\alpha(c-a)^\alpha}{\lambda^\alpha}.$$

Очевидно, что существует достаточно малое $\varepsilon > 0$, такое что

$$f_2\left(\frac{Ra+\lambda}{c-a} - \varepsilon\right) < f_1\left(\frac{Ra+\lambda}{c-a}\right) < f_1\left(\frac{Ra+\lambda}{c-a} - \varepsilon\right).$$

Отсюда следует, что функции $f_1(q)$ и $f_2(q)$ имеют по крайней мере одну точку пересечения на промежутке $\big(Ra/(c-a), (Ra+\lambda)/(c-a)\big)$ и не имеют точек пересечения на отрезке $[0, Ra/(c-a)]$.

Перейдём далее к доказательству единственности корня уравнения (4). Мы воспользуемся алгоритмом, который был применён в [5] для доказательства единственности характеристического показателя R. Введём вспомогательные обозначения:

$$M_X(w) = \int_0^\infty e^{wy}\,dF(y), \quad M_T(w) = \int_0^\infty e^{wt}\,dG(t),$$
$$m_X(w) = \ln M_X(w), \quad m_T(w) = \ln M_T(w).$$

Уравнение (4) приобретает тогда вид

$$M_X(-q)M_T\bigl(-Ra + q(c-a)\bigr) = 1.$$

Рассмотрим функцию $\theta(q)$, определённую равенством

$$M_X(-q)M_T\bigl(-Ra + q(c-a) + \theta(q)\bigr) = 1. \tag{5}$$

Очевидно, что Q будет являться корнем уравнения (4) тогда и только тогда, когда Q будет являться нулём функции $\theta(q)$. Таким образом, нам надо понять, может ли функция $\theta(q)$ иметь более одного нуля на луче $(0,\infty)$. Для этого прологарифмируем равенство (5),

$$m_X(-q) + m_T\bigl(-Ra + q(c-a) + \theta(q)\bigr) = 0,$$

и возьмём вторую производную по q:

$$m''_X(-q) + \theta''(q)m'_T\bigl(-Ra + q(c-a) + \theta(q)\bigr) + \\ + \bigl(c - a + \theta'(q)\bigr)^2 m''_T\bigl(-Ra + q(c-a) + \theta(q)\bigr) = 0.$$

Согласно [5, лемма 1.9] $m''_X(-q) > 0$ и $m''_T\bigl(-Ra + q(c-a) + \theta(q)\bigr) > 0$. Кроме того, легко также показать, что $m'_T\bigl(-Ra + q(c-a) + \theta(q)\bigr) > 0$. Получаем, что

$$\theta''(q) = \frac{-m''_X(-q) - \bigl(c - a + \theta'(q)\bigr)^2 m''_T\bigl(-Ra + q(c-a) + \theta(q)\bigr)}{m'_T\bigl(-Ra + q(c-a) + \theta(q)\bigr)} < 0,$$

а значит, функция $\theta(q)$ является выпуклой вверх. Также про функцию $\theta(q)$ мы знаем, что $\theta(0) = Ra > 0$. Отсюда следует, что функция $\theta(q)$ не может иметь более одного нуля на промежутке $(0,\infty)$. $\square$

Заметим, что

$$M_X(-Q) = \int_0^\infty e^{-Qy}\,dF(y) = \\ = \left(\int_0^\infty e^{-t(Ra+Qa-Qc)}\,dG(t)\right)^{-1} = \frac{(\lambda + Ra + Qa - Qc)^\alpha}{\lambda^\alpha},$$

и перейдём к основной теореме данной работы.

Теорема 1. *Имеет место следующее неравенство для вероятности разорения $\psi^{\mathrm{div}}(x,b)$ акционерной страховой компании, использующей линейную барьерную стратегию выплаты дивидендов, в случае гамма-распределения интервалов* *между моментами поступления требований*:

$$\psi^{\mathrm{div}}(x,b) \leqslant e^{-Rx} + Ke^{-(R+Q)b}e^{Qx}, \tag{6}$$

где

$$K = \frac{2^{\alpha-1}(\lambda+Rc)^{\alpha-1}R}{(\lambda+Ra+Qa-Qc)^{\alpha-1}Q} + \frac{2^{\alpha-1}\big((\lambda+Rc)^{\alpha}-(\lambda+Ra)^{\alpha}\big)}{(\lambda+Ra)^{\alpha}-(\lambda+Ra+Qa-Qc)^{\alpha}}.$$

Доказательство. Пусть $\psi_k^{\mathrm{div}}(x,b)$ — это вероятность разорения в предположении, что поступило не более чем k требований. Сначала докажем, что для всех $k \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\psi_k^{\mathrm{div}}(x,b) < \nu(x,b),$$

где

$$\nu(x,b) = e^{-Rx} + Ke^{-(R+Q)b}e^{Qx}.$$

Воспользуемся методом математической индукции.

База индукции. Для $k=0$ (и $x \geqslant 0$) имеем:

$$\psi_0^{\mathrm{div}}(x,b) = 0 < \nu(x,b).$$

Шаг индукции. Допустим, что неравенство $\psi_k^{\mathrm{div}}(x,b) < \nu(x,b)$ верно для некоторого $k \geqslant 0$. Покажем тогда, что данное неравенство справедливо также и для $k+1$. Согласно формуле полной вероятности

$$\psi_{k+1}^{\mathrm{div}}(x,b) = \int\limits_0^{(b-x)/(c-a)} \left[\int\limits_0^{x+ct} \psi_k^{\mathrm{div}}(x+ct-y, b+at)\,dF(y) + \int\limits_{x+ct}^{\infty} dF(y)\right] dG(t) + \\ + \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} \left[\int\limits_0^{b+at} \psi_k^{\mathrm{div}}(b+at-y, b+at)\,dF(y) + \int\limits_{b+at}^{\infty} dF(y)\right] dG(t).$$

Заметим, что $\nu(u,b) \geqslant 1$ при $u \leqslant 0$. Следовательно,

$$\psi_{k+1}^{\mathrm{div}}(x,b) < \int\limits_0^{(b-x)/(c-a)} \int\limits_0^{\infty} \nu(x+ct-y, b+at)\,dF(y)\,dG(t) + \\ + \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \nu(b+at-y, b+at)\,dF(y)\,dG(t). \tag{7}$$

Рассмотрим два получившихся слагаемых подробнее. Начнём с первого слагаемого. Сначала заметим, что

$$\int\limits_0^{\infty} \nu(x+ct-y, b+at)\,dF(y) = \\ = \int\limits_0^{\infty} \big(e^{-R(x+ct-y)} + Ke^{-(R+Q)(b+at)}e^{Q(x+ct-y)}\big)\,dF(y) =$$

$$= e^{-R(x+ct)} \int\limits_0^\infty e^{Ry}\, dF(y) + Ke^{-(R+Q)(b+at)} e^{Q(x+ct)} \int\limits_0^\infty e^{-Qy}\, dF(y) =$$
$$= e^{-R(x+ct)} M_X(R) + Ke^{-(R+Q)(b+at)} e^{Q(x+ct)} M_X(-Q),$$

а значит, первое слагаемое в правой части (7) имеет вид

$$\int\limits_0^{(b-x)/(c-a)} \left(e^{-R(x+ct)} M_X(R) + Ke^{-(R+Q)(b+at)} e^{Q(x+ct)} M_X(-Q)\right) dG(t) =$$
$$= \int\limits_0^\infty \left(e^{-R(x+ct)} M_X(R) + Ke^{-(R+Q)(b+at)} e^{Q(x+ct)} M_X(-Q)\right) dG(t) -$$
$$- \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^\infty \left(e^{-R(x+ct)} M_X(R) + Ke^{-(R+Q)(b+at)} e^{Q(x+ct)} M_X(-Q)\right) dG(t) =$$
$$= \nu(x,b) - M_X(R) \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^\infty e^{-R(x+ct)}\, dG(t) -$$
$$- M_X(-Q) \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^\infty Ke^{-(R+Q)(b+at)} e^{Q(x+ct)}\, dG(t).$$

Далее аналогично преобразуем второе слагаемое в (7). В первую очередь получаем, что

$$\int\limits_0^\infty \nu(b+at-y, b+at)\, dF(y) =$$
$$= \int\limits_0^\infty \left(e^{-R(b+at-y)} + Ke^{-(R+Q)(b+at)} e^{Q(b+at-y)}\right) dF(y) =$$
$$= e^{-R(b+at)} M_X(R) + Ke^{-R(b+at)} M_X(-Q).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{(b-x)/(c-a)}^\infty \int\limits_0^\infty \nu(b+at-y, b+at)\, dF(y)\, dG(t) =$$
$$= M_X(R) \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^\infty e^{-R(b+at)}\, dG(t) + M_X(-Q) \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^\infty Ke^{-R(b+at)}\, dG(t).$$

В итоге мы приводим неравенство (7) к следующему виду:

$$\psi_{k+1}^{\mathrm{div}}(x,b) <$$
$$< \nu(x,b) - KM_X(-Q) \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} \left(e^{-(R+Q)(b+at)} e^{Q(x+ct)} - e^{-R(b+at)}\right) dG(t) +$$
$$+ M_X(R) \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} \left(e^{-R(b+at)} - e^{-R(x+ct)}\right) dG(t) =$$
$$= \nu(x,b) - KM_X(-Q)e^{-Rb} \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} e^{-Rat}\left(e^{-Q(b-x-t(c-a))} - 1\right) dG(t) +$$
$$+ M_X(R)e^{-Rb} \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} e^{-Rat}\left(1 - e^{R(b-x-t(c-a))}\right) dG(t).$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, необходимо показать, что

$$- KM_X(-Q)e^{-Rb} \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} e^{-Rat}\left(e^{-Q(b-x-t(c-a))} - 1\right) dG(t) +$$
$$+ M_X(R)e^{-Rb} \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} e^{-Rat}\left(1 - e^{R(b-x-t(c-a))}\right) dG(t) \leqslant 0. \quad (8)$$

Заметим, что оба интеграла в левой части неравенства (8) положительны, поэтому мы можем переписать (8) в виде

$$\frac{M_X(R) \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} e^{-Rat}\left(1 - e^{R(b-x-t(c-a))}\right) g(t)\, dt}{M_X(-Q) \int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} e^{-Rat}\left(e^{-Q(b-x-t(c-a))} - 1\right) g(t)\, dt} \leqslant K.$$

В числителе и в знаменателе сделаем замену переменной

$$z = t - \frac{b-x}{c-a}.$$

Имеем

$$\frac{M_X(R)\int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} e^{-Rat}\big(1-e^{R(b-x-t(c-a))}\big)g(t)\,dt}{M_X(-Q)\int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} e^{-Rat}\big(e^{-Q(b-x-t(c-a))}-1\big)g(t)\,dt} = \\ = \frac{M_X(R)\int\limits_0^{\infty} e^{-Raz}\big(1-e^{-R(c-a)z}\big)g\big(z+(b-x)/(c-a)\big)\,dz}{M_X(-Q)\int\limits_0^{\infty} e^{-Raz}\big(e^{Q(c-a)z}-1\big)g\big(z+(b-x)/(c-a)\big)\,dz}. \tag{9}$$

Нам остаётся только оценить частное интегралов в правой части равенства (9). Отметим, что основная сложность состоит в том, что получившаяся оценка не должна зависеть от аргументов x и b (чтобы коэффициент K в рамках выражения для функции $\nu(x,b)$ можно было бы рассматривать как константу). Существование подобной оценки напрямую зависит от вида функции плотности $g(y)$. Так, в случае когда интервалы между моментами $\{T_j\}$ имеют гамма-распределение и b больше x, данную оценку удаётся получить следующим образом:

$$\frac{M_X(R)\int\limits_0^{\infty} e^{-Raz}\big(1-e^{-R(c-a)z}\big)g\big(z+(b-x)/(c-a)\big)\,dz}{M_X(-Q)\int\limits_0^{\infty} e^{-Raz}\big(e^{Q(c-a)z}-1\big)g\big(z+(b-x)/(c-a)\big)\,dz} =$$

$$= \frac{M_X(R)\int\limits_0^{\infty} e^{-Raz}\big(1-e^{-R(c-a)z}\big)\big(z+(b-x)/(c-a)\big)^{\alpha-1}e^{-\lambda(z+(b-x)/(c-a))}\,dz}{M_X(-Q)\int\limits_0^{\infty} e^{-Raz}\big(e^{Q(c-a)z}-1\big)\big(z+(b-x)/(c-a)\big)^{\alpha-1}e^{-\lambda\left(z+(b-x)/(c-a)\right)}\,dz} =$$

$$= \frac{M_X(R)\int\limits_0^{(b-x)/(c-a)} e^{-Raz}\big(1-e^{-R(c-a)z}\big)\big(z+(b-x)/(c-a)\big)^{\alpha-1}e^{-\lambda z}\,dz}{M_X(-Q)\int\limits_0^{\infty} e^{-Raz}\big(e^{Q(c-a)z}-1\big)\big(z+(b-x)/(c-a)\big)^{\alpha-1}e^{-\lambda z}\,dz} +$$

$$+ \frac{M_X(R)\int\limits_{(b-x)/(c-a)}^{\infty} e^{-Raz}\big(1-e^{-R(c-a)z}\big)\big(z+(b-x)/(c-a)\big)^{\alpha-1}e^{-\lambda z}\,dz}{M_X(-Q)\int\limits_0^{\infty} e^{-Raz}\big(e^{Q(c-a)z}-1\big)\big(z+(b-x)/(c-a)\big)^{\alpha-1}e^{-\lambda z}\,dz} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{\alpha-1}M_X(R)\big((b-x)/(c-a)\big)^{\alpha-1}\int\limits_0^{\infty} e^{-Raz}\big(1-e^{-R(c-a)z}\big)e^{-\lambda z}\,dz}{M_X(-Q)\big((b-x)/(c-a)\big)^{\alpha-1}\int\limits_0^{\infty} e^{-Raz}\big(e^{Q(c-a)z}-1\big)e^{-\lambda z}\,dz} +$$

$$
+\frac{2^{\alpha-1}M_X(R)\int\limits_0^\infty e^{-Raz}\big(1-e^{-R(c-a)z}\big)z^{\alpha-1}e^{-\lambda z}\,dz}{M_X(-Q)\int\limits_0^\infty e^{-Raz}\big(e^{Q(c-a)z}-1\big)z^{\alpha-1}e^{-\lambda z}\,dz}=
$$

$$
=\frac{2^{\alpha-1}M_X(R)\int\limits_0^\infty e^{-Raz}\big(1-e^{-R(c-a)z}\big)e^{-\lambda z}\,dz}{M_X(-Q)\int\limits_0^\infty e^{-Raz}\big(e^{Q(c-a)z}-1\big)e^{-\lambda z}\,dz}+
$$

$$
+\frac{2^{\alpha-1}M_X(R)\int\limits_0^\infty e^{-Raz}\big(1-e^{-R(c-a)z}\big)g(z)\,dz}{M_X(-Q)\int\limits_0^\infty e^{-Raz}\big(e^{Q(c-a)z}-1\big)g(z)\,dz}=
$$

$$
=\frac{2^{\alpha-1}M_X(R)\int\limits_0^\infty e^{-z(\lambda+Ra)}\,dz-2^{\alpha-1}M_X(R)\int\limits_0^\infty e^{-z(\lambda+Rc)}\,dz}{M_X(-Q)\int\limits_0^\infty e^{-z(\lambda+Ra+Qa-Qc)}\,dz-M_X(-Q)\int\limits_0^\infty e^{-z(\lambda+Ra)}\,dz}+
$$

$$
+\frac{2^{\alpha-1}M_X(R)\int\limits_0^\infty e^{-Raz}g(z)\,dz-2^{\alpha-1}M_X(R)\int\limits_0^\infty e^{-Rcz}g(z)\,dz}{M_X(-Q)\int\limits_0^\infty e^{-z(Ra+Qa-Qc)}g(z)\,dz-M_X(-Q)\int\limits_0^\infty e^{-Raz}g(z)\,dz}=
$$

$$
=\frac{2^{\alpha-1}(\lambda+Rc)^{\alpha-1}R}{(\lambda+Ra+Qa-Qc)^{\alpha-1}Q}+\frac{2^{\alpha-1}\big((\lambda+Rc)^{\alpha}-(\lambda+Ra)^{\alpha}\big)}{(\lambda+Ra)^{\alpha}-(\lambda+Ra+Qa-Qc)^{\alpha}}=K.
$$

Если же $b=x$, то

$$
\frac{M_X(R)\int\limits_0^\infty e^{-Raz}\big(1-e^{-R(c-a)z}\big)g\big(z+(b-x)/(c-a)\big)\,dz}{M_X(-Q)\int\limits_0^\infty e^{-Raz}\big(e^{Q(c-a)z}-1\big)g\big(z+(b-x)/(c-a)\big)\,dz}=
$$

$$
=\frac{(\lambda+Rc)^{\alpha}-(\lambda+Ra)^{\alpha}}{(\lambda+Ra)^{\alpha}-(\lambda+Ra+Qa-Qc)^{\alpha}}\leqslant K.
$$

Итак, мы доказали справедливость неравенства (8), а значит, $\psi_{k+1}^{\mathrm{div}}(x,b)<\nu(x,b)$. Таким образом, для всех $k\geqslant 0$ выполняется $\psi_k^{\mathrm{div}}(x,b)<\nu(x,b)$, откуда с помощью предельного перехода мы получаем необходимое неравенство (6). $\square$

Замечание 1. Для любого значения начального капитала $x>0$ найдутся такие значения начального уровня барьера b, при которых выражение в правой части (6) будет меньше единицы. Действительно, такие b должны удовлетворять неравенству

$$b > \max\left((R+Q)^{-1}\ln\left[\frac{Ke^{Qx}}{1-e^{-Rx}}\right],\, x\right).$$

С другой стороны, поскольку при $b \geqslant x$ справедливо неравенство

$$e^{-Rx} + Ke^{-(R+Q)b}e^{Qx} \leqslant (1+K)e^{-Rx},$$

выражение в правой части (6) также будет меньше единицы, например, при всех таких x и b, что

$$b \geqslant x > R^{-1}\ln(1+K).$$

Замечание 2. Из теоремы 1 следует неравенство (3) в случае отсутствия дивидендных выплат.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00162).

Литература

[1] Калашников В. В., Константинидис Д. Г. Вероятность разорения // Фундамент. и прикл. матем. — 1996. — Т. 2, вып. 4. — С. 1055—1100.

[2] Муромская А. А. Обобщение неравенства Лундберга для случая акционерной страховой компании // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2017. — № 1. — С. 32—36.

[3] Albrecher H., Hartinger J., Thonhauser S. On exact solutions for dividend strategies of threshold and linear barrier type in a Sparre Andersen model // ASTIN Bull. — 2007. — Vol. 37, no. 2. — P. 203—233.

[4] Avanzi B. Strategies for dividend distribution: a review // North Am. Actuarial J. — 2009. — Vol. 13, no. 2. — P. 217—251.

[5] Schmidli H. Lecture Notes on Risk Theory. — Cologne: Inst. of Mathematics, Univ. of Cologne, 2000.