Об s-полноцветном хроматическом числе случайного гиперграфа*

Д. А. ШАБАНОВ
Московский физико-технический институт,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: dmitry.shabanov@phystech.edu

УДК 519.179.1+519.179.4+519.174

Ключевые слова: случайные графы и гиперграфы, раскраски гиперграфов, хроматическое число.

Аннотация

Изучается проблема нахождения числа s-полноцветности случайного гиперграфа в биномиальной модели. Для разных вероятностей появления рёбер найдены асимптотические оценки чисел s-полноцветности, выполняющиеся с вероятностью, стремящейся к 1.

Abstract

D. A. Shabanov, On the s-colorful number of a random hypergraph, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2018), no. 3, pp. 191—199.

We study the problem of finding the s-colorful number of a random hypergraph in the binomial model. For different probabilities of the edge appearance, we establish asymptotic bounds for the s-colorful numbers, which hold with probability tending to 1.

1. Введение и история задачи

В работе изучается асимптотическое поведение хроматических чисел случайного гиперграфа в биномиальной модели. Сначала мы напомним основные определения.

Гиперграфом в дискретной математике называется пара $H = (V, E)$, состоящая из конечного множества вершин V и набора E подмножеств V, называемых рёбрами гиперграфа. Если каждое ребро гиперграфа состоит ровно из k вершин, т. е. $E \subset \binom{V}{k}$, то гиперграф H называется k-однородным. *Раскраской* множества вершин гиперграфа в r цветов называется отображение из множества вершин V в множество цветов $\{1, \ldots, r\}$. Раскраска называется *s-полноцветной* для H, если в ней каждое ребро из E содержит вершины хотя бы s различных цветов. Наконец, *s-полноцветным хроматическим числом* $\chi_s(H)$ гиперграфа H

*Работа выполнена в рамках исследований по гранту Российского научного фонда (проект № 16-11-10014).

называется минимальное r, для которого существует s-полноцветная раскраска вершин H в r цветов.

Мы рассматриваем классическую биномиальную модель случайного k-однородного гиперграфа $H(n,k,p)$, которая получается реализацией схемы Бернулли на рёбрах полного k-однородного гиперграфа $K_n^{(k)}$ на n вершинах: каждое ребро $K_n^{(k)}$ включается в качестве ребра в $H(n,k,p)$ независимо от других с вероятностью p.

Несложно заметить, что 2-полноцветная раскраска гиперграфа эквивалентна отсутствию одноцветных рёбер, тем самым понятие 2-полноцветного хроматического числа совпадает с классическим хроматическим числом: $\chi(H) = \chi_2(H)$. В случае k-однородного гиперграфа k-полноцветная раскраска означает, что каждым двум вершинам, лежащим в одном ребре, присвоены различные цвета. Подобную раскраску в мировой литературе принято называть *сильной*, а k-полноцветное хроматическое число $\chi_k(H)$ — *сильным хроматическим числом.*

Хроматическое число случайного гиперграфа $H(n,k,p)$, как и сильное хроматическое число $H(n,k,p)$, активно изучается начиная с 80-х годов XX века. Первые содержательные результаты появились в работах Дж. Шмидт, Э. Шамира и Э. Упфала [8—10], где авторами были установлены законы больших чисел для $\chi_2\big(H(n,k,p)\big)$ и $\chi_k\big(H(n,k,p)\big)$ в случае, когда $p = p(n)$ удовлетворяет условию $pn^{\varepsilon(k-1)} \geqslant 1$ для некоторого фиксированного $\varepsilon \in (0,1)$ и фиксированного $k \geqslant 3$. В дальнейшем в [7] законы больших чисел для хроматических чисел $H(n,k,p)$ были доказаны и для более быстро убывающих функций $p = p(n)$ вплоть до разреженного случая, когда число рёбер $H(n,k,p)$ в среднем линейно по числу вершин, т. е. при условии $pn^{k-1} \to +\infty$ при $n \to \infty$. Точные формулировки следующие.

Теорема 1 (М. Кривелевич, Б. Судаков [7]). *Пусть $k \geqslant 3$ фиксировано, и обозначим $d = p\binom{n-1}{k-1}$.*

1. *Если $p = p(n)$ удовлетворяет условиям $pn^{k-1} \to +\infty$ и $p \to 0$ при $n \to +\infty$, то*
$$\chi_2\big(H(n,k,p)\big) \cdot \left(\frac{k-1}{k}\,\frac{d}{\ln d}\right)^{-1/(k-1)} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{1}$$

2. *Если $p = p(n)$ удовлетворяет условиям $pn^{k-1} \to +\infty$ и $pn^{k-2} \to 0$ при $n \to +\infty$, то*
$$\chi_k\big(H(n,k,p)\big) \cdot \left(\frac{k-1}{2}\,\frac{d}{\ln d}\right)^{-1} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{2}$$

Поиску предельного распределения хроматического числа $H(n,k,p)$ в разреженном случае (когда $p = cn^{k-1}$ при фиксированном $c > 0$) посвящены недавние работы М. Дайера, А. Фриза и К. Гринхилл [5], а также автора настоящей статьи [3]. Здесь хроматическое число ограничено и имеет двухточечное или одноточечное предельное распределение. При растущей функции

$k = k(n)$ некоторые результаты о хроматическом числе случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ были получены в [1].

2. Новые результаты

Целью настоящей заметки является нахождение асимптотического поведения s-полноцветного хроматического числа случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ в случаях вплоть до разреженного в общем случае, когда $2 < s \leqslant k$. В теореме 2 рассмотрен случай достаточно больших значений p.

Теорема 2. *Пусть $2 < s \leqslant k$ фиксированы, и обозначим*

$$a = \left\lfloor \frac{k-1}{s-1} \right\rfloor.$$

Если $p = p(n)$ удовлетворяет условию $pn^{s-2}/(\ln n) \to +\infty$ при $n \to +\infty$, то

$$\frac{\chi_s\bigl(H(n,k,p)\bigr)}{n/a} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty. \tag{3}$$

Заметим, что $p = \mathrm{const}$, в частности $p = 1$, также удовлетворяет условию теоремы 2. Тем самым при $s > 2$ изучаемое s-полноцветное хроматическое число случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ при постоянном $p \in (0,1)$ является асимптотически устойчивым и имеет тот же порядок, что и s-полноцветное хроматическое число полного гиперграфа $K_n^{(k)}$. Напомним, что при $s = 2$ такого эффекта не наблюдается и хроматическое число $H(n,k,p)$ имеет порядок $o(n)$ при любом постоянном $p \in (0,1)$.

В теореме 3 найдена нижняя оценка s-полноцветного хроматического числа при достаточно малых значениях p.

Теорема 3. *Пусть $p = o(\ln n/n^{s-2})$ и $d = p\binom{n-1}{k-1} \to +\infty$. Тогда существует такая величина $c = c(k,s) > 0$, что*

$$\mathsf{P}\left(\chi_s\bigl(H(n,k,p)\bigr) \geqslant c\left(\frac{d}{\ln d}\right)^{1/(k-s+1)}\right) \to 1 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty. \tag{4}$$

Последняя теорема даёт общую верхнюю оценку s-полноцветного хроматического числа.

Теорема 4. *Пусть $d = p\binom{n-1}{k-1}$ удовлетворяет условию $d - 3\ln n \to +\infty$. Тогда существует такая величина $b = b(k,s) > 0$, что*

$$\mathsf{P}\bigl(\chi_s\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant b \cdot d^{1/(k-s+1)}\bigr) \to 1 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty. \tag{5}$$

Теоремы 3 и 4 показывают, что в промежуточном случае, когда $p = o(\ln n/n^{s-2})$ и величина $d = p\binom{n-1}{k-1}$ растет быстрее $\ln n$, s-полноцветное хроматическое число $H(n,k,p)$ имеет порядок роста $d^{1/(k-s+1)+o(1)}$. Оценки (4) и (5) отличаются на степень $\ln d$, и мы предполагаем, что верхняя оценка также может иметь порядок $O\bigl((d/\ln d)^{1/(k-s+1)}\bigr)$.

3. Доказательства

3.1. Доказательство теоремы 2

Обозначим через $\rho_s(n,k)$ s-полноцветное хроматическое число полного k-однородного гиперграфа $K_n^{(k)}$ на n вершинах. Покажем, что

$$\rho_s(n,k) \sim \frac{n}{a}.$$

Верхняя оценка $\rho_s(n,k) \leqslant \lceil n/a \rceil$ очевидна, ведь любая раскраска, в которой все цветовые классы имеют мощность не более a, является s-полноцветной. Пусть f — некоторая s-полноцветная раскраска $K_n^{(k)}$, а x — это число цветовых классов f, имеющих мощность хотя бы $a+1$. Поскольку $(s-1)(a+1) > k$, x не может быть больше $s-2$, при этом мощность каждого из этих классов не превосходит k. Остаётся не менее $n - xk$ вершин, которые раскрашены так, что каждый цветовой класс имеет не более a вершин. Стало быть, общее число цветов в f не может быть меньше, чем

$$\frac{n-kx}{a} \geqslant \frac{n-k(s-2)}{a} \sim \frac{n}{a}.$$

Стало быть,

$$\rho_s(n,k) > \frac{n-k(s-2)}{a} \sim \frac{n}{a}.$$

Теперь перейдём к случайному гиперграфу $H(n,k,p)$. Ясно, что

$$\chi_s\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant \rho_s(n,k),$$

и верхняя оценка готова. Идея доказательства нижней будет такой же: мы покажем, что с большой вероятностью в правильной раскраске $H(n,k,p)$ цветовые классы мощности не менее $a+1$ будут занимать мало вершин.

Пусть f — некоторая раскраска множества вершин $H(n,k,p)$ в не более чем n цветов, и обозначим через M общее число вершин в цветовых классах f, имеющих мощность не менее $a+1$. Каждый подобный цветовой класс разобьём на непересекающиеся блоки из ровно $a+1$ вершины плюс некоторый набор из не более a вершин. Пусть $m = m(f)$ — это число получившихся подобных блоков. Напомним, что вершины $H(n,k,p)$ занумерованы. Соответственно, мы можем индуцировать нумерацию как на блоки, так и на вершины внутри блоков. Пусть $A_1, \ldots, A_{s-1}$ — произвольный набор блоков. Тогда мы сформируем k-подмножество $l(A_1, \ldots, A_{s-1})$ следующим образом:

— возьмём первые a вершин из каждого блока $A_1, \ldots, A_{s-1}$, получится $a(s-1) < k$ вершин;

— доберём оставшиеся $k - a(s-1)$ вершин по правилу: берём оставшиеся вершины первого блока, потом, при необходимости, второго и т. д.; поскольку $(a+1)(s-1) \geqslant k$, мы сможем набрать в итоге k вершин.

Теперь заметим, что различные наборы $A_1, \ldots, A_{s-1}$ отвечают различным k-вершинным подмножествам $l(A_1, \ldots, A_{s-1})$. Каждое такое ребро покрашено не более чем в $s-1$ цвет в раскраске f. Следовательно,

$$\mathsf{P}\big(f - s\text{-полноцветная раскраска } H(n,k,p)\big) \leqslant (1-p)^{\binom{m}{s-1}} \leqslant e^{-p\binom{m}{s-1}}.$$

Возьмём такую целочисленную функцию $\beta = \beta(n)$, что $\beta = o(n)$, но выполнено $(n \ln n/p)^{1/(s-1)} = o(\beta)$. Выбор такой функции возможен, так как по условию $pn^{s-2}/\ln n \to +\infty$. Тогда

$$\mathsf{P}(\text{существует } s\text{-полноцветная раскраска } f \text{ с условием } m(f) > \beta) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{f\colon m(f)>\beta} e^{-p\binom{m}{s-1}} \leqslant (\text{общее число раскрасок не превосходит } n^n) \leqslant$$
$$\leqslant n^n e^{-p\binom{\beta}{s-1}} = e^{n\ln n - p\binom{\beta}{s-1}} \longrightarrow 0$$

при $n \to +\infty$, ведь $n \ln n/p = o(\beta^{s-1})$, а s фиксировано.

Завершим доказательство. Мы показали, что с вероятностью, стремящейся к 1, в s-полноцветной раскраске $H(n,k,p)$ число блоков m размера $a+1$ не превосходит β. Тогда общее число вершин M в цветовых классах размера не менее $a+1$ не превосходит

$$m(a+1+a) \leqslant \beta(2a+1) = o(n),$$

потому что каждый цветовой класс даёт ещё не более a вершин, а число классов не превосходит m. Оставшиеся $n-M$ вершин раскрашены так, что каждый цветовой класс имеет не более a вершин. Стало быть,

$$\mathsf{P}\left(\chi_s\big(H(n,k,p)\big) \geqslant \frac{n-\beta(2a+1)}{a} = \frac{n}{a} + o(n)\right) \longrightarrow 1.$$

Теорема 2 доказана.

3.2. Доказательство теоремы 3

Пусть $r = r(n)$ — некоторая целочисленная функция, удовлетворяющая условиям

$$r = o(n), \quad r \to +\infty. \tag{6}$$

Оценим вероятность того, что число s-полноцветности $H(n,k,p)$ не превосходит r. Пусть τ — некоторая фиксированная раскраска множества вершин $H(n,k,p)$ в r цветов с мощностями цветовых классов $v_1, \ldots, v_r$. Тогда

$$\mathsf{P}\big(\tau - s\text{-полноцветная раскраска } H(n,k,p)\big) = (1-p)^{f(\tau)},$$

где $f(\tau)$ — число рёбер $K_n^{(k)}$, покрашенных не s-полноцветно в τ. Оценим $f(\tau)$ снизу. Заметим, что $f(\tau)$ должно быть не меньше, чем число рёбер, покрашенных ровно в $s-1$ цвет в раскраске τ. Стало быть, по формуле включений и исключений получаем, что

$$f(\tau) \geqslant \sum_{I \in \binom{[r]}{s-1}} \left[\sum_{j=0}^{s-2} (-1)^j \sum_{J \in \binom{I}{j}} \binom{\sum_{q \in I \setminus J} v_q}{k} \right]. \tag{7}$$

Двойная сумма в квадратных скобках минимизируется, когда все величины v_i, $i \in I$, почти равны (могут отличаться не более чем на 1) (см., например, [2, лемма 2]). Обозначим

$$v_I = \sum_{i \in I} v_i.$$

Введём некоторую функцию $\beta = \beta(n)$ с условием, что $\beta \to +\infty$, но $\beta = o(n/r)$. Выбор такой функции возможен в силу (6). Если $v_I \geqslant \beta$, то

$$\sum_{j=0}^{s-2} (-1)^j \sum_{J \in \binom{I}{j}} \binom{\sum_{q \in I \setminus J} v_q}{k} \geqslant$$
$$\geqslant \left[\sum_{j=0}^{s-2} (-1)^j \binom{s-1}{j} \frac{(s-1-j)^k}{k!} \right] \left(\frac{v_I}{s-1} \right)^k \bigl(1 + \psi(n)\bigr),$$

где $\psi(n)$ стремится к 0 и не зависит от I. Если же $v_I < \beta$, то просто скажем, что подобная сумма неотрицательна. Следовательно, из (7) получаем следующую оценку $f(\tau)$:

$$f(\tau) \geqslant \sum_{I \in \binom{[r]}{s-1}\colon v_I \geqslant \beta} \left[\sum_{j=0}^{s-2} (-1)^j \binom{s-1}{j} \frac{(s-1-j)^k}{k!} \right] \left(\frac{v_I}{s-1} \right)^k \bigl(1 + \psi(n)\bigr) =$$
$$= \left[\sum_{j=0}^{s-2} (-1)^j \binom{s-1}{j} \frac{(s-1-j)^k}{k!} \right] \left(\frac{1}{s-1} \right)^k \bigl(1 + \psi(n)\bigr) \sum_{I \in \binom{[r]}{s-1}\colon v_I \geqslant \beta} (v_I)^k \geqslant$$
$$\geqslant \text{(применяем неравенство Йенсена)} \geqslant$$
$$\geqslant \left[\sum_{j=0}^{s-2} (-1)^j \binom{s-1}{j} \frac{(s-1-j)^k}{k!} \right] \frac{1 + \psi(n)}{(s-1)^k} \binom{r}{s-1} \left(\frac{1}{\binom{r}{s-1}} \sum_{I \in \binom{[r]}{s-1}\colon v_I \geqslant \beta} v_I \right)^k.$$

Заметим, что

$$\sum_{I \in \binom{[r]}{s-1}} v_I = \binom{r-1}{s-2} \sum_{i=1}^{r} v_i = n \binom{r-1}{s-2},$$
$$\sum_{I \in \binom{[r]}{s-1}\colon v_I < \beta} v_I < \beta \binom{r}{s-1} = o\left(n \binom{r-1}{s-2} \right).$$

Значит,

$$f(\tau) \geqslant \left[\sum_{j=0}^{s-2}(-1)^j\binom{s-1}{j}\frac{(s-1-j)^k}{k!}\right]\binom{r}{s-1}\left(\frac{n(s-1)}{r}\right)^k\frac{1+o(1)}{(s-1)^k} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)!}\left[\sum_{j=0}^{s-2}(-1)^j\binom{s-1}{j}\frac{(s-1-j)^k}{k!}\right]\frac{n^k}{r^{k-s+1}}\bigl(1+o(1)\bigr) =$$

$$= \frac{a(s,k)}{(k-1)!}\frac{n^k}{r^{k-s+1}}\bigl(1+o(1)\bigr) = a(s,k)\frac{n\binom{n-1}{k-1}}{r^{k-s+1}}\bigl(1+o(1)\bigr).$$

Вероятность наличия s-полноцветной раскраски не превосходит математического ожидания числа подобных раскрасок. Стало быть,

$$\mathsf{P}\bigl(\chi_s\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant r\bigr) \leqslant \sum_{\tau}(1-p)^{f(\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant r^n \exp\left\{-pa(s,k)\frac{n\binom{n-1}{k-1}}{r^{k-s+1}}\bigl(1+o(1)\bigr)\right\} =$$

$$= \exp\left\{n\left[\ln r - a(s,k)\frac{d}{r^{k-s+1}}\bigl(1+o(1)\bigr)\right]\right\}.$$

Если положить

$$r = c\left(\frac{d}{\ln d}\right)^{1/(k-s+1)}$$

для фиксированного $c>0$, то из условий на d и p будут вытекать необходимые условия (6): $r\to\infty$ и $r=o(n)$. Тогда

$$r^{k-s+1}\ln r = \frac{c^{k-s+1}}{k-s+1}d\bigl(1+o(1)\bigr).$$

При $c < \bigl(a(s,k)(k-s+1)\bigr)^{1/(k-s+1)}$ имеем следующую оценку искомой вероятности: для некоторого $\varepsilon(s,k)>0$

$$\mathsf{P}\bigl(\chi_s\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant r\bigr) \leqslant \exp\left\{n\left[-\varepsilon(s,k)\frac{d}{r^{k-s+1}}\bigl(1+o(1)\bigr)\right]\right\} \to 0.$$

Теорема 3 доказана.

3.3. Доказательство теоремы 4

Сначала установим следующий факт о достаточном условии наличия s-полноцветной раскраски у однородных гиперграфов.

Лемма 1. *Если $H = (V, E)$ — это k-однородный гиперграф с максимальной степенью вершины $\Delta = \Delta(H)$, то для H существует s-полноцветная раскраска в*

$$r = \left\lceil \Delta^{\frac{1}{k-s+1}} \left(\frac{ek(s-1)^k}{(s-1)!} \right)^{1/(k-s+1)} \right\rceil$$

цветов.

Доказательство. Рассмотрим случайную раскраску H в r цветов. Тогда для каждого ребра $A \in E$ вероятность того, что A раскрашено не s-полноцветно, не превосходит

$$\binom{r}{s-1} \left(\frac{s-1}{r} \right)^k \leqslant \frac{(s-1)^k}{(s-1)!} r^{s-1-k} = p'.$$

Данное событие независимо с алгеброй раскрасок всех рёбер, не пересекающихся с ребром A. Число же рёбер, имеющих непустое пересечение с A (включая само A), не превосходит $k\Delta$. В силу выбора r получаем, что

$$ep'k\Delta = ek\Delta \frac{(s-1)^k}{(s-1)!} r^{s-1-k} \leqslant 1.$$

Согласно локальной лемме (см. [4, следствие 5.1.2]) с положительной вероятностью все рёбра будут раскрашены s-полноцветно. $\square$

Вернёмся к случайному гиперграфу $H(n, k, p)$. Степень каждой его вершины v имеет биномиальное распределение $\mathrm{Bin}\left(\binom{n-1}{k-1}, p\right)$ с математическим ожиданием d. Неравенство Чернова (см. [6, следствие 2.2]) говорит, что вероятность того, что такая случайная величина превосходит $d + t$, не превосходит

$$\exp\left\{ -\frac{t^2}{2d} + \frac{t^3}{6d^2} \right\}.$$

Тогда по условию теоремы

$$\mathsf{P}\big(\Delta\big(H(n,k,p)\big) > 2d\big) \leqslant n \exp\left\{ -\frac{d^2}{2d} + \frac{d^3}{6d^2} \right\} = n \cdot e^{-d/3} = e^{\ln n - d/3} \to 0.$$

Значит, с вероятностью, стремящейся к 1, максимальная степень вершины $H(n, k, p)$ не превосходит $2d$. Из леммы 1 получаем, что с той же вероятностью $\chi_s\big(H(n, k, p)\big)$ не превосходит $b(k, s) d^{1/(k-s+1)}$ для некоторой $b(k, s) > 0$. Теорема 4 доказана.

Литература

[1] Купавский А. Б., Шабанов Д. А. Раскраски частичных систем Штейнера и их приложения // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 3. — С. 77—115.

[2] Шабанов Д. А. О существовании полноцветных раскрасок для равномерных гиперграфов // Матем. сб. — 2010. — Т. 201, № 4. — С. 137—160.

[3] Шабанов Д. А. О концентрации хроматического числа случайного гиперграфа // Докл. РАН. — 2017. — Т. 475, № 1. — С. 24—28.

[4] Alon N., Spencer J. The Probabilistic Method. — Hoboken: Wiley, 2016.

[5] Dyer M., Frieze A., Greenhill C. On the chromatic number of a random hypergraph // J. Combin. Theory, Ser. B. — 2015. — Vol. 113. — P. 68—122.

[6] Janson S., Luczak T., Rucinski A. Random Graphs — New York: Wiley, 2000.

[7] Krivelevich M., Sudakov B. The chromatic numbers of random hypergraphs // Random Structures Algorithms. — 1998. — Vol. 12, no. 4. — P. 381—403.

[8] Schmidt J. P. Probabilistic analysis of strong hypergraph coloring algorithms and the strong chromatic number // Discrete Math. — 1987. — Vol. 66. — P. 259—277.

[9] Schmidt-Pruzan J., Shamir E., Upfal E. Random hypergraph coloring algorithms and the weak chromatic number // J. Graph Theory. — 1985. — Vol. 8. — P. 347—362.

[10] Shamir E. Chromatic numbers of random hypergraphs and associated graph // Adv. Comput. Research. — 1989. — Vol. 5. — P. 127—142.