Решение проблемы равенства и сопряжённости слов в некотором классе групп Артина

В. Н. БЕЗВЕРХНИЙ
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Н. Б. БЕЗВЕРХНЯЯ
Академия гражданской защиты МЧС России

УДК 519.14

Ключевые слова: группы Артина с m-угольной структурой, проблемы равенства и сопряжённости слов.

Аннотация

В статье определяются группы Артина с m-угольной структурой и доказывается, что при $m > 3$ в данном классе разрешимы проблемы равенства и сопряжённости слов.

Abstract

V. N. Bezverkhnii, N. B. Bezverkhnyaya, Solution of the problem of equality and conjugacy of words in a certain class of Artin groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 9—27.

The article defines Artin groups with m-gon structure and proves that for $m > 3$ in this class the problems of equality and conjugacy of words are solvable.

Результаты данной статьи анонсированы в [7].

Авторами вводится новый класс групп Артина, графы которых состоят из n-угольников при $n \geqslant 3$, причём элементы матрицы Коксетера принимают натуральные значения, большие единицы. В опубликованных ранее работах о группах Артина, не являющихся группами Артина конечного типа (К. Аппель, П. Шупп), элементы матрицы Коксетера принимают значения, большие или равные трём.

Группа Артина G задаётся системой образующих $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и системой определяющих соотношений

$$\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, \quad i \neq j, \quad i, j \in \overline{1, n},$$

где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i, a_j; m_{ij} — числа симметрической матрицы Коксетера, соответствующей данной группе: $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geqslant 2$, $i \neq j$. Если вершины с номерами i, j не связаны ребром, то соответствующий элемент матрицы полагаем равным бесконечности.

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 4, с. 9—27.

Копредставление группы G имеет вид

$$G = \langle a_1, \ldots, a_n;\ \langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ji}},\ i, j \in \overline{1, n}\,\rangle. \tag{1}$$

Добавляя к соотношениям группы G соотношения $a_1^2 = 1$, $i \in \overline{1, n}$, получаем копредставление группы Коксетера:

$$\bar{G} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n;\ (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1,\ a_i^2 = 1,\ i, j \in \overline{1, n}\rangle. \tag{2}$$

Группа Артина называется группой Артина конечного типа, если соответствующая ей группа Коксетера конечна. В этом классе групп Э. Брискорном и К. Сайто были решены проблемы равенства и сопряжённости слов.

Группе Артина (Коксетера) с образующими $\{a_i \mid i = \overline{1, n}\}$ можно поставить в соответствие конечный граф Γ, вершинам которого соответствуют образующие a_i, а каждому соотношению $\langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ji}}$ соответствует ребро, соединяющее вершины с метками a_i, a_j; других рёбер нет.

Если граф Γ есть дерево-граф, то соответствующая группа Артина (Коксетера) называется группой Артина (Коксетера) с древесной структурой [5]. Каждая группа Артина (Коксетера) является гомоморфным образом некоторой группы Артина (Коксетера) с древесной структурой. Элементы матрицы Коксетера в этом классе групп удовлетворяют условиям $m_{ij} \geqslant 2$ при $i \neq j$, $m_{ii} = 1$. Доказано, что в группах Артина с древесной структурой разрешима проблема сопряжённости слов [8].

Определим класс групп Артина (Коксетера) с k-угольной структурой [6, 7]. Будем называть группы Артина (Коксетера) группами с k-угольной структурой, если соответствующий граф состоит из k-угольников, $k \geqslant 3$; элементы соответствующей матрицы Коксетера удовлетворяют условиям $m_{ij} \geqslant 2$, $i \neq j$, $m_{ii} = 1$.

Основная цель нашей статьи — доказать разрешимость проблем равенства и сопряжённости слов в группах с k-угольной структурой, $k > 3$ [7].

Группы Артина с двумя образующими

Пусть G_{ij} — группа Артина с двумя образующими,

$$G_{ij} = \langle a_i, a_j;\ \langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ij}}\rangle\ — \tag{3}$$

копредставление группы G_{ij}, $m_{ij} \geqslant 2$ при $i \neq j$. Обозначим через R_{ij} множество всех циклически несократимых слов в свободной группе $F_2 = \langle a_i, a_j\rangle$, равных единице в G_{ij}. Копредставление G_{ij} можно задать следующим образом:

$$G_{ij} = \langle a_i, a_j;\ R_{ij}\rangle.$$

Копредставление группы Артина, заданной на образующих $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, можно записать в виде

$$G = \langle A;\ R\rangle,$$

где

$$R = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} R_{ij}.$$

Обозначим через $|w|$ длину слова w в свободной группе $F_n = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, через $\|w\|$ — слоговую длину w в свободном произведении бесконечных циклических групп

$$F_n = \prod_{i=1}^{n}{}^{*} \langle a_i \rangle.$$

Лемма 1 [13]. *Если $w \in G_{ij}$, w — нетривиальное слово в свободной группе и w равно единице в G_{ij}, то $\|w\| \geqslant 2m_{ij}$.*

Лемма 2 [13]. *Пусть $w \in G_{ij}$, $w = w_1 \cdot w_2$, w — нетривиальное свободно приведённое слово, w равно в G_{ij} единице. Тогда*

а) *если $\|w_1\| \leqslant m_{ij}$, то $\|w_1\| \leqslant \|w_2\|$;*

б) *если $\|w_1\| < m_{ij}$, то $\|w_1\| < \|w_2\|$.*

Лемма 3 [4]. *Группа Артина G_{ij} при $m_{ij} = 2k + 1$ изоморфна группе $\langle x, y;\ x^{2k+1} = y^2 \rangle$, изоморфизм задаётся отображением $f\colon a_i \to x^{k+1}y^{-1}$, $a_j \to yx^{-k}$. Если $m_{ij} = 2k$, то G_{ij} изоморфна группе $\langle x, t;\ t^{-1}x^k t = x^k \rangle$, этот изоморфизм задаётся отображением $f\colon a_i \to t$, $a_j \to t^{-1}x$.*

Лемма 4 [14]. *В группе Артина G_{ij} разрешима проблема равенства и сопряжённости слов.*

Лемма 5 [1]. *В группе G_{ij} разрешима проблема вхождения в конечно порождённую подгруппу.*

Лемма 6 [2]. *В группе G_{ij} разрешима проблема пересечения циклических подгрупп.*

Определение 1. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения смежных классов конечно порождённых подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любого слова $w \in G$ и любых двух конечно порождённых подгрупп H_1, H_2 из G установить, пусто или непусто $wH_1 \cap H_2$, и, в случае если $wH_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, определить элемент из пересечения.

Лемма 7. *В группе Артина G_{ij} алгоритмически разрешима проблема пересечения смежных классов любых двух циклических подгрупп.*

Доказательство. Пусть $m_{ij} = 2k + 1$. Тогда группа G_{ij} изоморфна группе $B_1 = \langle x, y;\ x^{2k+1} = y^2 \rangle$.

Рассмотрим проблему пересечения циклических подгрупп в B_1. Пусть w, u, v — произвольные слова в B_1. Выясним, существуют ли m, n, такие что

$$wu^m = v^n.$$

Пусть в B_1 $\langle u \rangle \cap \langle v \rangle \neq E$ (E — единичная подгруппа), т. е. найдутся $l, p \in \mathbb{Z}$, такие что $u^l = v^p$. В этом случае рассматриваемая проблема решается тривиально.

Пусть $\langle u\rangle\cap\langle v\rangle = E$. Профакторизуем B_1 по $N = \langle x^{2k+1}\rangle^{B_1}$, получаем группу $B_1/N = \langle x, y;\ x^{2k+1}, y^2\rangle$. Нетрудно убедиться в том, что в B_1/N разрешима проблема пересечения смежных классов любых двух циклических подгрупп [9, 10].

Обозначим через $\bar{w}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ образы $w, u, v \in B_1$ в B_1/N_1. В группе B_1/N, как отмечено выше, можно эффективно установить, существуют ли $m, n \in \mathbb{Z}$, такие что

$$\bar{w}\bar{u}^m = \bar{v}^n. \tag{4}$$

Пусть в B_1/N данное соотношение выполнено, тогда в B_1 ему соответствует равенство

$$wu^m = v^n(x^{2k+1})^s. \tag{5}$$

Если $s = 0$, то пересечение не пусто.

Пусть $s \neq 0$. Тогда в B_1 выполняется соотношение

$$wu^{m_1} = v^{n_1}, \tag{6}$$

где $m \neq m_1$, $n \neq n_1$.

Из (5), (6) и выполнения $\langle u\rangle \cap \langle v\rangle = E$ в B_1 следует, что u, соответственно v, не сопряжены ни x^α, $0 < \alpha < 2k+1$, ни y. В противном случае $\langle u\rangle\cap\langle v\rangle \neq E$.

Из данного замечания следует, что $\bar{u}$, $\bar{v}$ в B_1/N являются нетрансформами. Поэтому соотношению (6) в B_1/N соответствует

$$\bar{w}\bar{u}^{m_1} = \bar{v}^{n_1}. \tag{7}$$

Из (4) и (7) в B_1/N следует

$$\bar{u}^{(m-m_1)} = \bar{v}^{n-n_1},$$

которому в B_1 соответствует равенство

$$u^{m-m_1} = v^{n-n_1}(x^{2k+1})^l. \tag{8}$$

Из данного соотношения и из (5), (6) следует, что $l = s$. В группе B_1/N равенству (8) соответствует $\bar{u}^{m-m_1} = \bar{v}^{n-n_1}$, т. е. циклические подгруппы $\langle\bar{u}\rangle$, $\langle\bar{v}\rangle$ пересекаются по неединичной подгруппе: $\bar{u}^{d_1} = \bar{u}^{d_2}$. Тогда $m_1 - m = kd_1$, $n - n_1 = kd_2$, и в B_1 имеем $u^{d_1} = u^{d_2}(x^{2k+1})^p$. Из последнего равенства в B_1 получаем, что $s = kp$.

Таким образом, если в B_1 выполняется соотношение (4), $s \neq 0$, то пересечение смежных классов $w\langle u\rangle \cap \langle v\rangle$ в B_1 не пусто при условии, что $u^{d_1} = v^{d_2}(x^{2k+1})^p$, тогда и только тогда, когда $s = kp$.

В случае если $m_{ij} = 2k$, группа G_{ij} изоморфна группе $\langle x, t;\ t^{-1}x^k t = x^k\rangle$. В этом случае доказательство леммы проводится аналогично случаю, когда $m_{ij} = 2k+1$. Лемма доказана. □

Лемма 8. *В группе Артина*

$$G_{ij} = \langle a_i, a_j;\ \langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ij}}\rangle$$

для любого $w \in G_{ij}$ можно эффективно установить, имеет ли решение уравнение $wa_i^m = a_j^n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, причём m и n определяются однозначно.

При доказательстве используются леммы 1 и 7.

Лемма 9. *Пусть G_{ij} — группа Артина, $m_{ij} \geqslant 3$. Тогда для любых элементов w, u, v из G_{ij} можно эффективно установить, существуют ли целые числа m, n, s, являющиеся решением уравнения*

$$wu^m = u^n v^s. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть в G_{ij} пересечение циклических подгрупп $\langle u\rangle$, $\langle v\rangle$ — неединичная подгруппа, т. е. $u^n = v^q$. В этом случае решение уравнения (9) сводится к проблеме пересечения смежных классов циклических подгрупп $\langle u\rangle$, $\langle v\rangle$.

Пусть в G_{ij} $\langle u\rangle \cap \langle v\rangle = E$ (E — единичная подгруппа) и $m_{ij} = 2k+1$. Тогда G_{ij} изоморфна группе $B_1 = \langle x, y;\ x^{2k+1} = y^2\rangle$.

Пусть f — изоморфизм G_{ij} на B_1. Тогда равенству (9) в B_1 соответствует равенство $f(w)f(u)^m = f(u)^n f(v)^s$. Обозначим $f(w) = \tilde{w}$, $f(u) = \tilde{u}$, $f(v) = \tilde{v}$. В результате данное равенство примет вид

$$\tilde{w}\tilde{u}^m = \tilde{u}^n \tilde{v}^s. \tag{10}$$

Рассмотрим гомоморфизм θ группы B_1 на B_1/N, где $N = \langle x^{2k+1}\rangle^{B_1}$. Пусть $\theta(\tilde{w}) = \tilde{w}$, $\theta(\tilde{u}) = \tilde{u}$, $\theta(\tilde{v}) = \tilde{v}$. Тогда (10) в группе B_1/N перепишется в виде

$$\bar{w} \cdot \bar{u}^n = \bar{u}^m \bar{v}^s. \tag{11}$$

Рассмотрим решение (11) в B_1/N.

Пусть $\|u\| > 1$, $\|v\| > 1$, u, v — циклически несократимые слова, и пусть $\langle\bar{u}\rangle \cap \langle\bar{v}\rangle \neq E$, т. е.

$$\bar{u}^a = \bar{v}^b. \tag{12}$$

Очевидно, что уравнение (11) имеет решение, если оно имеет решение для m, принимающего значения $0, 1, \ldots, a-1$. Пусть m_1, n_1, s_1 — решения уравнения (11), $\bar{w} \cdot \bar{u}^{m_1} = \bar{u}^{n_1}\bar{v}^{s_1}$, которому в B_1 соответствует равенство

$$\tilde{w}\tilde{u}^{m_1} = \tilde{u}^{n_1}\tilde{v}^{s_1}(x^{2k+1})^c. \tag{13}$$

Если $c = 0$, то m_1, n_1, s_1 являются решениями (11). Пусть $c \neq 0$. Тогда из равенства (12) в B_1/N следует, что существует $\bar{f} \in B_1/N$, такой что $\bar{u} = \bar{f}^{d_1}$, $\bar{v} = \bar{f}^{d_2}$. Используя равенство $\bar{w}\bar{u}^{m_1} = \bar{u}^{n_1}\bar{v}^{s_1}$, получаем, что $\bar{w} = \bar{f}^r$. В группе B_1 для $\tilde{w}$, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ имеем

$$\tilde{w} = \tilde{f}^r(x^{2k+1})^q, \quad \tilde{u} = \tilde{f}^{d_1}(x^{2k+1})^{p_1}, \quad \tilde{v} = \tilde{f}^{d_2}(x^{2k+1})^{p_2}. \tag{14}$$

Из (10), (13), (14) следует, что уравнение (10) в B_1 имеет решение тогда и только тогда, когда система

$$\begin{aligned} d_1(m-n) + d_2(s-s_1) &= d_1(m_1-n_1), \\ p_1(m-n) + p_2(s-s_1) &= c + p_1(m_1-n_1) \end{aligned}$$

имеет целые решения.

Пусть в $B_1 \setminus N$ $\langle \bar{u} \rangle \cap \langle \bar{v} \rangle = E$, где $\bar{u}$, $\bar{v}$ — циклически несократимые слова, $\|u\| > 1$, $\|v\| > 1$. Пусть для некоторых m_0, n_0 $\bar{w}\bar{u}^{m_0} = \bar{w}_{\text{л}}\bar{u}_{\text{п}}$, $\bar{w} = \bar{w}_{\text{л}} \cdot \bar{w}_{\text{п}}$, $\bar{u} = \bar{u}_{\text{л}} \cdot \bar{u}_{\text{п}}$, $\bar{w}_{\text{л}} \cdot \bar{u}_{\text{п}}$ несократимо, и пусть $\bar{w}_{\text{л}}\bar{u}_{\text{п}} = \bar{u}^{n_0}\bar{u}'_{\text{л}}$, где $\bar{u} = \bar{u}'_{\text{л}}\bar{u}'_{\text{п}}$. Выполнив в (11) указанные сокращения, получим

$$\bar{u}^{m-m_0} = \bar{u}'_{\text{п}} \cdot \bar{u}^{n-n_0-1}\bar{v}^s. \tag{15}$$

В правой части (15) выделим подслово $\bar{w_0} = \bar{u}^\alpha \cdot \bar{v}^\beta = \bar{u}''_{\text{л}}\bar{v}'_{\text{п}}$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \|\bar{v}\|$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \|\bar{u}\|$, $\bar{u} = \bar{u}''_{\text{л}} \cdot \bar{u}''_{\text{п}}$, $\bar{v} = \bar{v}'_{\text{л}}\bar{v}'_{\text{п}}$; $\alpha = \beta = 0$, если последний слог $\bar{u}$ и первый $\bar{v}$ содержатся в разных сомножителях, в этом случае $\bar{w}_0 = 1$, случай, когда $\bar{w}_0 = 1$ и $\beta = 0$ невозможен, так как $\langle \bar{u} \rangle \cap \langle \bar{v} \rangle \neq E$.

Проведя в (15) указанные сокращения, получим

$$\bar{u}^{m-m_0} = \bar{u}'_n \cdot \bar{u}^{n-n_0-\alpha-1} \cdot \bar{w}_0 \cdot \bar{v}^{s-\beta}.$$

Если $n - n_0 - \alpha - 1 = 0$, то $n = n_0 + \alpha + 1$ и решение уравнения (9) сводится к задаче о пересечении смежных классов циклических подгрупп.

Пусть $n - n_0 - \alpha - 1 \neq 0$. Если $m - m_0 > 0$, $n - n_0 - \alpha - 1 > 0$, то в этом случае $\langle \bar{u} \rangle \cap \langle \bar{v} \rangle \neq E$, что противоречит допущению.

Если $m - m_0$ и $n - n_0 - \alpha - 1$ разных знаков, то $\bar{u} = 1$, что противоречит условиям, что $\|u\| > 1$, $\|u\|$ циклически несократимо.

Если $m - m_0 < 0$, $n - n_0 - \alpha - 1 < 0$, то в этом случае проблема решения уравнения (9) сводится к задаче пересечения смежных классов циклических подгрупп.

Пусть $\bar{u} = \bar{g}\bar{h}\bar{g}^{-1}$. Если $\|\bar{h}\| > 1$, $\bar{h}$ — циклически несократимое слово, то в этом случае вышеизложенные рассуждения справедливы.

Если $\bar{h} \in \{\bar{x}, \bar{y}\}$, где $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ — образующие G_1/N, то s может принимать конечное число значений, а именно либо $s \in \{0, 1\}$, если $\bar{h} = \bar{y}$, либо $s \in \{0, 1, \ldots, 2k\}$, если $h = x^p$, $\beta \neq 2k + 1$. В данном случае получаем рассмотренный ранее случай.

Случай, когда $\bar{v} = \bar{g}\bar{h}\bar{g}^{-1}$ и $\|\bar{h}\| > 1$, h циклически несократимо, сводим сопряжением к случаю, когда $\bar{u}$ циклически несократимо. Если $\|h\| = 1$, то случай аналогичен предыдущему.

Пусть для G_{ij} $m_{ij} = 2k$. Тогда G_{ij} изоморфна группе

$$B_1 = \langle x, t;\ t^{-1}x^m t = x^m \rangle.$$

Проведя рассуждения, рассмотренные в случае, когда $m_{ij} = 2k+1$, убеждаемся в справедливости леммы. Лемма 9 доказана. □

Лемма 10 [4]. *В группе Артина* $G_{ij} = \langle a_i, a_j;\ \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i^{mji} \rangle$ *при* $m_{ij} \geqslant 3$ *для любого* $w \in G_{ij}$ *можно эффективно выяснить, существуют ли* m, n, s, *такие что в* G_{ij} *выполняется равенство*

$$w a_i^m = a_i^n a_j^s,$$

причём если такой набор существует, то он единственный.

Доказательство непосредственно следует из лемм 9 и 1. □

Лемма 11. *В группе Артина G_{ij} с образующими a_i, a_j циклические подгруппы $\langle a_i\rangle$, $\langle a_j\rangle$ пересекаются по единичной подгруппе.*

Лемма 12 [4]. *Пусть $G_{ij} = \langle a_i, a_j;\ \langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ji}}$ — группа Артина, $w \in G_{ij}$, w — циклически несократимое слово в свободной группе, имеющее слоговую длину, равную $2m_{ij}$, и равное единице в G_{ij}. Тогда при $m_{ij} = 2k+1$ w имеет вид*

α) $a_i^m a_j \ldots a_j a_i a_j^{-m} a_i^{-1} \ldots a_j^{-1}$, либо

β) $a_i a_j \ldots a_j a_i^m a_j^{-1} a_i^{-1} \ldots a_j^{-m}$,

либо им обратные, либо их циклические перестановки;

при $m_{ij} = 2k$, $k > 1$

α') $a_i^m a_j \ldots a_i a_j a_i^{-m} a_j^{-1} \ldots a_j^{-1}$, либо

β') $a_i a_j \ldots a_i a_j^m a_i^{-1} a_j^{-1} \ldots a_j^{-m}$,

либо им обратные, либо их циклические перестановки;

$m \in \{\mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

Лемма 13 [4]. *Пусть в группе Артина G_{ij} выполнено равенство $zx^pz^{-1}=y^q$, где $z \in G_{ij}$, $p, q \in \{\mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, $x, y \in \{a_i^{\pm 1}, a_j^{\pm 1}\}$. Тогда $p = q$.*

Пусть

$G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n;\ \langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ji}},\ i \in I_1,\ j \in I_2\rangle, \quad |I_s| < \infty, \quad s = 1, 2$ —

группа Артина с k-угольной структурой, $k > 3$. Тогда, как показано выше, копредставление группы G можно задать следующим образом:

$$G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n;\ R\rangle,$$

где

$$R = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} R_{ij}.$$

Пусть w — циклически несократимое слово в свободной группе $F_n = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$, $w = 1$ в G, т. е. $w \in \langle R\rangle^{F_n}$. Тогда из теоремы ван Кампена следует, что существует R-диаграмма M над R с граничным циклом $\gamma = \partial M$, меткой которого является слово w, $\varphi(\gamma) = w$, и с метками областей $D \subset M$ из R_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ [12].

Выполним в M следующие преобразования:

а) если имеются области $D, D' \in M$, $D' \cap D'' \neq \varnothing$, с метками $\varphi(\partial D')$, $\varphi(\partial D'')$ из R_{ij} и с $\|\varphi(\partial D' \cap \partial D'')\| \geqslant 1$, то области D', D'' объединяем в одну область D, удалив их общую часть, и производим свободные сокращения в $\varphi(\partial D)$;

б) если в результате сокращения получаем, что метка $\varphi(\partial D)$ равна единице в свободной группе, то, удалив эту область, склеиваем её границу. Через конечное число шагов получим связную односвязную R-диаграмму M, инвариантную относительно рассматриваемых преобразований, с граничной меткой $\varphi(\gamma) = w$, причём если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то слоговая длина метки этого ребра равна 1, $\|\varphi(\partial D' \cap \partial D'')\| = 1$. Такая R-диаграмма называется приведённой, метками рёбер являются степени образующих группы G.

Определение 2. Граничная область D R-диаграммы M называется простой, если $\partial M \cap \partial D$ — правильная часть граничного цикла ∂M [12].

Введём следующие обозначения: $d(D)$ — число рёбер области D; $d(v)$ — степень вершины, v — вершина R-диаграммы M; $i(D)$ — число внутренних рёбер области D [12].

Определение 3. Простая область $D \subset M$ называется деновской, если $i(D) < 2$.

Под деновским сокращением диаграммы M называется удаление граничного пути $\partial D \cap \partial M$ деновской области D.

Диаграмма M, не содержащая деновских областей, R-приведённой.

Лемма 14. *Односвязная приведённая R-диаграмма M группы Артина с k-угольной структурой при $k > 3$ удовлетворяет условиям $C(4)$ и $T(4)$.* (*Определение условий $C(4)$, $T(4)$ см. в* [12]).

Доказательство. Покажем, что степень каждой области $D \subset M$ будет не меньше четырёх. Действительно, слоговая длина метки любой области D из R-диаграммы M удовлетворяет соотношению $\|\varphi(\partial D)\| \geqslant 2m_{ab}$, где $\varphi(\partial D) \in R_{ab}$ (лемма 1).

Так как каждый слог $\varphi(\partial D)$ является меткой ребра области D, что следует из приведённости диаграммы M, то $d(D) \geqslant 2m_{ab} \geqslant 4$.

Убедимся теперь в том, что каждая внутренняя вершина $v \in M$ имеет степень $d(v) > 3$. Допустим противное, т. е. существует внутренняя вершина $v \in M$ с $d(v) = 3$. Это означает, что v является общей вершиной для областей D_1, D_2, D_3, т. е. $\partial D_1 \cap \partial D_2 \cap \partial D_3 = v$, $\partial D_1 \cap \partial D_2 = e_1$, $\partial D_1 \cap \partial D_3 = e_2$, $\partial D_2 \cap \partial D_3 = e_3$, $\varphi(e_1) = a^{k1}$, $\varphi(e_2) = b^{k2}$, $\varphi(e_3) = d^{k3}$, где a, b, d — образующие группы G. Отсюда следует, что $\varphi(\partial D_1) \in G_{ab}$, $\varphi(\partial D_2) \in G_{ad}$, $\varphi(\partial D_3) \in G_{bd}$ и граф Γ группы G содержит треугольник, что невозможно по определению группы G. Лемма доказана. $\square$

Пусть M — R-приведённая односвязная диаграмма над множеством соотношений R группы Артина с k-угольной структурой, $k > 3$. Тогда граничные её области удовлетворяют неравенству [3, 12]

$$\sum\nolimits^{*} \bigl(3 - i(D)\bigr) \geqslant 4,$$

знак $\sum^{*}$ означает, что суммирование производится по простым граничным областям диаграммы M.

Определение 4. Пусть M — R-приведённая односвязная R-диаграмма над группой Артина с k-угольной структурой, $k > 3$. Тогда граничные области последовательности $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $n \geqslant 2$, образуют полосу $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$, если

1) множество $\partial D_1 \cap \partial M$ связно и является последовательной частью границы ∂M, $i \in \overline{1,n}$;
2) множество $\partial \Pi \cap \partial M$ связно и является последовательной частью границы ∂M;
3) $i(D_1) = i(D_n) = 2$;
4) при $n > 2$ $i(D_j) = 3$, $j = 2, 3, \ldots, n-1$;
5) $\partial D_i \cap \partial D_{i+1}$ — ребро, $i = 1, 2, \ldots, n-1$;
6) $\partial D_i \cap \partial D_j = \varnothing$ при $|i - j| > 1$.

Пусть Π — полоса R-диаграммы M. Тогда

$$\|\varphi(\partial \Pi \cap \partial M)\| > \big\|\varphi\big(\partial \Pi \setminus (\partial \Pi \cap \partial M)\big)\big\|;$$

удаление $\partial \Pi \cap \partial M$ в диаграмме M назовём специальным сокращением и будем обозначать сокращение данного вида через $\bar{R}$.

Лемма 15 [3]. *Пусть M — связная, односвязная, приведённая, R-приведённая диаграмма над множеством соотношений R группы Артина G с k-угольной структурой при $k > 3$, элементы матрицы Коксетера которой удовлетворяют соотношению $m_{ij} \geqslant 2$ при $i \neq j$. Тогда M содержит две полосы.*

Теорема 1. *Пусть G — группа Артина G с n образующими, $n \geqslant 2$, с копредставлением $G = \langle a_1, \ldots, a_n;\, R >$, где $R = \bigcup\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} R_{ij}$; элементы матрицы Коксетера, соответствующей G, удовлетворяют соотношениям $m_{ij} \geqslant 2$ при $i \neq j$, $m_{ii} = 1$; G — группа с k-угольной структурой при $k > 3$. Тогда в группе G разрешима проблема равенства слов.*

Доказательство. Пусть слово $w \in G$ циклически свободно приведённое. Выясним, равно ли w единице в G, когда G — группа Артина с k-угольной структурой, $k > 3$. Запишем w по окружности.

i_0) Разбиваем w на подслова $w_1, w_2, \ldots, w_m$, $w = w_1 w_2 \ldots w_m$, где для каждого s, $s = \overline{1,m}$, существует подгруппа $G_{i_s} j_s$, содержащая слово w_s; w_s, $w_{s+1}(w_m, w_1)$ принадлежат разным подгруппам $G_{i_s j_s}$, $G_{i_p j_p}$.

i_1) Выделяем из данного множества подслов подслово w_s, $\|w_s\| \geqslant 4$, $w_s \in G_{i_s j_s}$ и выясняем, равно ли w_s единице в $G_{i_s j_s}$ (лемма 4). Если равно, то вычёркиваем его из w, получаем слово w', в котором проводим свободное сокращение, затем применяем к нему i_0), после чего переходим к i_1).

i_2) Рассматриваем в w подслово w_t, $\|w_t\| \geqslant 3$, и в группе $G_{i_t j_t}$ $w \in G_{i_t j_t}$, выясняем, принадлежит ли w_t циклическим подгруппам $\langle a_{i_t} \rangle$, $\langle a_{j_t} \rangle$, т. е. $w_t = a_{i_t}^{m_t}$, либо $w_t = a_{j_t}^{n_t}$ (лемма 5).

Если имеет место одно из соотношений, то в w заменяем w_t на $a_{i_t}^{m_t}$ либо на $a_{j_t}^{n_t}$. К полученному слову применяем последовательно i_0), i_1), i_2). Допустим, что к слову w неприменимо i_2). Тогда выясним, можно ли к w применить специальное $\bar{R}$-сокращение.

Процесс построения полосы начинаем с w_1.

i_3) Пусть $w_1 \in G_{i_1 j_1}$. Решаем в $G_{i_1 j_1}$ уравнение $w_1 = a_{i_1}^{m_1} a_{j_1}^{n_1}$ $(w_1 = a_{j_1}^{n_1} a_{i_1}^{m_1})$ (лемма 8).

Пусть уравнение $w_1 = a_{i_1}^{m_1} a_{j_1}^{n_1}$ ($w_1 = a_{j_1}^{n_1} a_{i_1}^{m_1}$) имеет решение. Это означает, что существует область D_1, $i(D_1) = 2$, с меткой $w_1 a_{i_1}^{-m_1} a_{j_1}^{-n_1}$ ($w_1 a_{j_1}^{-n_1} a_{i_1}^{-m_1}$).

i_4) Пусть $w_2 \in G_{j_1 j_2}$, $a_{j_1}^{n_1} w_2 \in G_{j_1 j_2}$. Решаем в группе $G_{j_1 j_2}$ проблему вхождения $a_{j_1}^{n_1} \cdot w_2$ в подгруппу $\langle a_{j2} \rangle$. Если $a_{j_1}^{n_1} w_2 = a_{j_2}^{n_2}$, то выделяется полоса и проводится $\bar{R}$-сокращение, после чего возвращаемся к i_0). Если предыдущее соотношение не выполняется, то рассматриваем аналогичную задачу для $a_{i_1}^{m_1} w_2$ в группе $G_{i_1 j_2}$, $w_2 \in G_{i_1 j_2}$.

i_5) Пусть $a_{j_1}^{n_1} w_2 \notin \langle a_{j_2} \rangle$ ($a_{i_1}^{m_1} w_2 \notin \langle a_{j_2} \rangle$).

Выясняем, имеет ли в $G_{j_1 j_2}$ решение уравнение $a_{j_1}^{n_1} w_1 = a_{j_2}^{n_2} a_{j_1}^{n_2}$. Если имеет, то определяющее соотношение $a_{j_1}^{n_1} w_2 a_{j_1}^{-n_2} a_{j_2}^{-m_2} = 1$ является меткой области D_2 с $i(D_2) = 3$. Рассматриваем слово $a_{j_2}^{m_2} w_3$, если $w_3 \in G_{j_2 j_3}$ и применяем к нему i_4).

Таким образом, применяя к w преобразования i_0)—i_5), через конечное число шагов, не превосходящее m, устанавливаем, применимо ли к w $\bar{R}$-сокращение.

Выполняя в слове R и $\bar{R}$-сокращение, устанавливаем, равно ли w единице в группе G.

Теорема 1 доказана. □

Рассмотрим решение проблемы сопряжённости слов в группе Артина с k-угольной структурой, $k > 3$.

Пусть слова w, v циклически приведённые в свободной группе $F_n = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$; $w \neq 1$ в G, $v \neq 1$ в G; w, v циклически R- и $\bar{R}$-несократимы в G:

$$G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n;\ R \rangle, \quad R = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} R_{ij}.$$

Пусть w, v сопряжены в G. Из [12] следует, что существует связная кольцевая диаграмма над $R = \bigcup\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} R_{ij}$ с граничными циклами γ, δ, метками которых являются слова w, v; $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v$.

Обозначим кольцевую диаграмму сопряжённости слов w, v через M.

Определение 5. Кольцевая диаграмма M называется простой, если $\gamma \cap \delta \neq \varnothing$.

Простая кольцевая диаграмма состоит из p, $p \geqslant 1$, связных односвязных диаграмм $J_1, J_2, \ldots, J_p$, любые две соседние из которых соединены простым путём.

Определение 6. Кольцевая диаграмма M называется m-слойной [3], если она состоит из m слоёв и каждый слой K_i состоит из областей $D_{i1}, D_{i2}, \ldots, D_{in_i}$, таких что для всех j, $1 \leqslant j < n_i$, $D_{ij} \cap D_{ij+1} = e_{j+1}$, $D_{in_i} \cap D_{1i} = e_1$, e — ребро.

σ_{i-1}, σ_i — граничные циклы K_i, причём K_1 имеет циклы $\sigma_0 = \gamma$, σ_1; K_m имеет циклы σ_{m-1}, $\sigma_m = \sigma$.

Определение 7. $(C-m)$-слойной кольцевой диаграммой называется кольцевая диаграмма, которая после удаления m слоёв содержит простую кольцевую диаграмму [3].

Кольцевые связные диаграммы над R подвергнем следующим преобразованиям.

1. Если две области D', D'', метки которых $\varphi(\partial D')$, $\varphi(\partial D'')$ принадлежат одной подгруппе G_{ij}, имеют общее ребро, $\partial D' \cap \partial D'' = e$, то, удалив его, объединим области D', D'' в одну область D с меткой $\varphi(\partial D) = f_1 f_2$, где $\varphi(\partial D') = f_1\varphi(e)$, $\varphi(\partial D'') = \varphi(e)^{-1} f_2$, и проведём в $f_1 f_2$ свободные сокращения. Если в результате получаем пустое слово, то область D вырезаем, а её границу склеиваем.
2. Если метка некоторой области D из диаграммы равна единице в свободной группе, то, как и в предыдущем случае, вырезаем её, а границу склеиваем.

Кольцевая диаграмма, инвариантная относительно указанных преобразований, называется приведённой.

Пусть M — связная, приведённая кольцевая диаграмма с граничными циклами γ и δ. Тогда её граничные области удовлетворяют неравенству [3]

$$\sum_{\partial M}^{*}\bigl(3 - i(D)\bigr) \geqslant 0. \tag{16}$$

Для связных, приведённых кольцевых R-диаграмм над группой Артина с k-угольной структурой, $k > 3$, кроме R- и $\bar{R}$-сокращений, определим ещё следующие сокращения (обозначим через $|\partial D|$ число рёбер в области D в диаграмме M).

Если $|\gamma \cap \partial D| > |\partial D \setminus \{\gamma \cap \partial D\}| = 3$, то удаление пути $\gamma \cap \partial D$ в M назовём R^*-сокращением $\varphi(\gamma)$.

Лемма 16. *Пусть M — связная, приведённая кольцевая R-диаграмма над группой Артина G с k-угольной $(k > 3)$ структурой, с метками $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ граничных циклов γ, δ, являющимися R- и $\bar{R}$-несократимыми. Тогда можно эффективно установить, являются ли $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ R^*-сократимыми.*

При доказательстве используется лемма 10.

Пусть в кольцевой диаграмме M, в которой метки граничных циклов γ, δ являются R-, R^*-, $\bar{R}$-несократимыми, можно выделить граничную поддиаграмму по границе γ (δ), образованную областями $D_1, D_2, \ldots D_n$, $\Pi_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\partial\Pi_0 \cap \gamma$ — правильная часть в M;
2) для каждого i, $1 \leqslant i < n$, $D_i \cap D_{i+1} = e_{i+1}$ — ребро;
3) для каждого i, $1 < i < n$, $|\partial D_i \setminus (\partial D_i \cap \gamma)| = 3$, $|\partial D_i \cap \gamma| = 1$ или найдётся j, $1 < j < n$, такой что $d(D_j) \geqslant 6$, $|\partial D_j \setminus (\partial D_j \cap \gamma)| = 4$;
4) $d(D_1) = d(D_n) = 6$, $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_n \cap \gamma| = 3$;
5) $d(D_1) = 6$, $d(D_n) = 4$, $|\partial D_1 \cap \gamma| = 3$, $|D_n \cap \gamma| = 2$;

6) $d(D_1) = 4$, $d(D_n) = 6$, $|\partial D_1 \cap \gamma) = 2$, $|\partial D_n \cap \gamma| = 3$;
7) $d(D_1) = d(D_6) = 4$, $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_6 \cap \gamma| = 2$ и найдётся j, $1 < j < n$, такой что $d(D_j) \geqslant 6$, $|\partial D_j \setminus (\partial D_j \cap \gamma)| = 4$.

Аналогично определяется Π_0-поддиаграмма по границе δ.

Удаление $\gamma_1 = \partial\Pi_0 \cap \gamma$ ($\delta_1 = \partial\Pi_0 \cap \delta$) в кольцевой R-диаграмме M назовём $\bar{R}^*$-сокращением.

Если в $\Pi_0 D_1 \equiv D_n$, то удаление γ (δ) назовём $\triangle$-сокращением диаграммы M.

Лемма 17. *Пусть M — связная, приведённая кольцевая R-диаграмма над группой Артина с k-угольной структурой, $k > 3$, $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ — метки граничных циклов γ, δ диаграммы M, которые являются R-, $\bar{R}$-, R^*-несократимыми. Тогда можно эффективно установить, является ли диаграмма M $\bar{R}^*$- и $\triangle$-сократимой.*

Определение 8. Будем говорить, что связная, приведённая кольцевая R-диаграмма M над группой Артина с k-угольной структурой, $k > 3$, с граничными циклами γ, δ, обладает свойством α, если метки $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ являются R-, R^*-, $\bar{R}$-, $\bar{R}^*$-, $\triangle$-несократимыми.

Если кольцевая R-диаграмма M с граничными циклами является n-слойной или $(C - n)$-слойной, $n > 1$, и удовлетворяет свойству α, то её граничные области удовлетворяют соотношениям

$$\sum\nolimits_{\gamma}^{*}\big(3 - i(D)\big) = 0, \quad \sum\nolimits_{\delta}^{*}\big(3 - i(D)\big) = 0. \tag{17}$$

Из системы равенств (17) следует, что число областей в M вдоль границы γ (δ) с $i(D) = 2$ и с $i(D) = 4$ одинаково, причём такие области чередуются и могут быть разделены областями с внутренней степенью, равной трём.

Лемма 18. *Пусть M — m-слойная, $m > 2$, связная, приведённая кольцевая R-диаграмма над группой Артина с k-угольной структурой, $k > 3$, с граничными циклами γ, δ, метки которых $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ обладают свойством α. Тогда M не содержит внутренней области D с $d(D) \geqslant 6$.*

Для доказательства леммы достаточно предположить, что кольцевая R-диаграмма M содержит три слоя и является R^*-, $\bar{R}$-, $\bar{R}^*$-несократимой. Если допустить, что в M содержится область D с $d(D) \geqslant 6$, то легко показать, что в этом случае кольцевая диаграмма M будет $\bar{R}$-сократима.

Определение 9. Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, в которой ребра e, e^{-1} склеены и $\|\varphi(\gamma)\| = \|\varphi(\delta)\|$, назовём $(s - i)$-областью.

Лемма 19. *Пусть M — связная, приведённая кольцевая R-диаграмма над группой Артина с k-угольной структурой, $k > 3$, γ, δ — граничные циклы M, удовлетворяющей условию α. Если $\varphi(\gamma) = x^p$, где x — образующий группы G, то $\varphi(\delta) = y^p$, где y принадлежит множеству образующих G, и все области M являются $(s - i)$-областями.*

Доказательство. Если M — m-слойная приведённая кольцевая диаграмма, удовлетворяющая условиям леммы, то в этом случае нетрудно убедиться, что каждый слой является $(s-i)$-слоем.

Пусть M — C_m-слойная диаграмма, состоящая из слоёв $K_1, K_2, \ldots, K_m$ и простой циклической диаграммы J. Обозначим граничные циклы K_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, γ_i, γ_{i+1}; при $i=1$ $\gamma_1=\gamma$, при $i=m$ γ_m, γ_{m+1}, причём $\gamma_{m+1}=\delta$ и $\varphi(\gamma_m)=a^p$, a — образующий группы G.

Пусть J состоит из поддиаграмм $J_1, \ldots, J_r$, каждая из которых является связной, односвязной, приведённой R-диаграммой. Рассмотрим поддиаграмму J_1. Пусть J_1 слева и справа ограничена областями D_1, D_n, т. е. $J_1 = D_1 \cup \Gamma_i \cup D_n$, где $|\partial D_1 \cap \partial\Gamma_1| = |\partial D_n \cap \partial \Gamma_n| = 1$ и Γ_1 состоит из областей $D_2, \ldots, D_{n-1}$, для которых $\partial D_i \cap \partial\Gamma_1$ — несвязное множество.

Учитывая, что $\varphi(\partial\Gamma_1 \cap \gamma_m) = a^s$, $i \leqslant s \leqslant p$, и $i(D_1) = i(D_n) = 2$, получаем, что J является полосой, что невозможно.

Пусть $|\partial D_1 \cap \partial\Gamma_1| \neq 1$, $|\partial D_n \cap \partial\Gamma_1| \neq 1$ и все граничные области в J_1 являются простыми. Учитывая, что диаграмма M удовлетворяет условию α и на J_1 выполняется формула $\sum^*_{J_1}\big(3-i(D)\big) \geqslant 4$, получаем, что $|\partial D_1 \cap \partial\Gamma_1| = |\partial D_n \cap \Gamma_1| = 2$, и Γ_1 должна содержать граничную область D с $i(D)=2$ и $|\partial D \cap \partial\Gamma_1| = 2$, что невозможно. Лемма 19 доказана. □

Лемма 20. *Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – образующие группы Артина G с k-угольной структурой, $k>3$, пусть $x, y \in A$. Слово x^p сопряжено в G с y^q тогда и только тогда, когда существует связная, приведённая кольцевая R-диаграмма M, все области которой являются $(s-i)$-областями, и $p=q$.*

Теорема 2. *В группе Артина G с k-угольной структурой, $k>3$, разрешима проблема сопряжённости слов.*

Доказательство. Пусть w, v — слова группы G, удовлетворяющей теореме. Пусть w, v являются циклически свободно приведёнными, R-, R^*-, $\bar{R}$-, $\bar{R}^*$- и $\triangle$-приведёнными словами. Допустим, что w, v сопряжены в G. Следовательно, существует кольцевая связная, приведённая, R-приведённая над группой G диаграмма M, метками граничных циклов γ, δ которой являются $\varphi(\gamma)=w$, $\varphi(\delta)=v$.

1. Допустим, что $\gamma \cap \delta \neq \varnothing$, т. е. M является простой кольцевой диаграммой. В этом случае проблема сопряжённости сводится к проблеме равенства слов: приравниваем циклическую перестановку w^* слова w к слову v.

2. Пусть M — связная кольцевая диаграмма сопряжённости слов w, v, удовлетворяющих условию α.

Разбиваем w на подслова $w_1, w_2, \ldots, w_n$, где $w = w_1 \ldots w_n$, каждое подслово w_i принадлежит подгруппе G_{ij}, причём w_i, w_{i+1}, $1 \leqslant i < n$, принадлежат разным подгруппам. Аналогично v разбиваем на подслова $v_1, v_2, \ldots, v_m$, $v = v_1 \ldots v_m$.

a_1) Рассмотрим случай, когда для каждой области $D_0 \subset M$ $\partial M \cap \partial D_0$ — несвязное множество, $i(D_0)=2$, $\partial D_0 = \gamma_0\alpha_0\delta_0\beta_0$, где $\partial D_0 \cap \gamma = \gamma_0$, $\partial D_0 \cap \delta = \delta_0$,

$|\gamma_0| \geqslant 1$, $|\delta_0| \geqslant 1$, $|\alpha_0| = |\beta_0| = 1$. Отсюда следует, что M — однослойная кольцевая диаграмма, в разбиении w, v одинаковое число подслов, $n = m$.

Рассмотрим взаимно-однозначное отображение, задаваемое таблицами вида

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_{n-i+1} & w_{n-i+2} & \dots & w_n \\ v_1 & v_{i+1} & v_{i+2} & \dots & v_n & v_1 & \dots & v_{i-1} \end{pmatrix}.$$

Выбираем те из них (если они существуют), в которых соответствующие подслова принадлежат одной подгруппе. Рассмотрим для простоты случай, когда таблица имеет вид

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_3 & \dots & w_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_3 & \dots & v_n \end{pmatrix},$$

т. е. для каждого s, $1 \leqslant s \leqslant n$, w_s и v_s принадлежат подгруппе $G_{i_s j_s}$.

Рассмотрим в группе $G_{i_1 j_1}$ решение уравнения

$$x_1^{p1} w_1 = v_1 y_1^{q1}, \tag{18}$$

где $x_1, y_1 \in \{a_{i_1} a_{j_1}\}$ (лемма 7).

Если данное уравнение имеет единственное решение, то проверяем, справедливо ли равенство $x_1^{p_1} w x_1^{-p_1} = v$. Если данное равенство не имеет места, то рассматриваем другую циклическую перестановку слов v_j.

Допустим, что уравнение (18) имеет неединственное решение. Это возможно тогда и только тогда, когда циклические подгруппы $\langle x_1 \rangle$, $\langle v_1 y_1 v_1^{-1} \rangle$ пересекаются по неединичной подгруппе, т. е. $x_1^p = v_1 y_1^q v_1^{-1}$, в этом случае из леммы 13 следует, что $p = q$.

Заменяем w_2 на $w_2' = y_1^{q_1} w_2$ и, сопрягая слово $v_1 w_2' w_3 \dots w_n$ степенью $x_1^{pk_1}$, решаем уравнение $y_1^{pk_1} w_2' = v_2 y_2^{q_2}$, где y_1, y_2 принадлежат $\{a_{i_2} a_{j_2}\}$, a_{i_2}, a_{j_2} — образующие подгруппы G_{i_2, j_2}, содержащей w_2', v_2. Если решение рассматриваемого уравнения единственно, то сопрягаем w степенью $x_1^{p_1 + pk_1}$ и выясняем, справедливо ли равенство $x_1^{p_1 + pk_1} w x_1^{-(p_1 + pk_1)} = v$.

Допустим, что данное равенство не выполняется и пересечение циклических подгрупп $\langle y_1^p \rangle$, $\langle v_2 y_2^p v_2^{-1} \rangle$ не единичная подгруппа (если единичная, то слова w и v не сопряжены), т. е. $y_1^{pm_1} = v_2 y_2^{pm_1} v_2^{-1}$.

Пусть $y_2^{q_2} w_3 = w_3'$, $w_3', v_3 \in G_{i_3 j_3}$, $\{a_{i_3}, a_{j_3}\}$ — образующие $G_{i_3 j_3}$ и $y_2 \in \{a_{i_3}, a_{j_3}\}$. Рассматриваем решение уравнения $y_2^{pm_1 \alpha_1} w_3' = v_3 y_3^{q_3}$, $y_3 \in \{a_{i_3}, a_{j_3}\}$, $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$.

Используя решение данного уравнения (если оно существует), проверяем, выполнимо ли равенство $x_1^{p_1 + pk_1 + pm_1 \alpha_1} \cdot w x_1^{-(p_1 + pk_1 + pm_1 \alpha_1)} = v$. Если данное равенство не выполняется, то определяем пересечение циклических подгрупп $\langle y_2^{pm_1} \rangle$, $\langle u_3 y_3^{pm_1} v_3^{-1} \rangle$ в группе $G_{i_3 j_3}$.

Допустим, что пересечение не единичная подгруппа. Тогда $y_2^{pm_2} = v_3 y_3^{pm_2} v_3^{-1}$, и рассматриваем решение уравнения $y_3^{pm_2 \alpha_2} w_4' = v_4 y_4^{q_4}$, где $w_4' = y_3^{q_3} \cdot w_4$, в группе $G_{i_4 j_4}$, $\{a_{i_4}, a_{j_4}\}$ — образующие $G_{i_4 j_4}$, $y_3, y_4 \in \{a_{i_4}, a_{j_4}\}$, $w_4', v_4 \in G_{i_4 j_4}$. И так далее.

Пусть на $(n-1)$-м шаге имеем

$$y_{n-2}^{pm_{n-3}\alpha_{n-3}}w'_{n-1} = v_{n-1}y_{n-1}^{q_{n-1}}, \tag{19}$$

где $w'_{n-1}, v_{n-1} \in G_{i_{n-1}j_{n-1}}$, y_{n-2}, y_{n-1} принадлежат $\{a_{i_{n-1}}, a_{j_{n-1}}\}$, $a_{i_{n-1}}$, $a_{j_{n-1}}$ — образующие подгруппы $G_{i_{n-1}j_{n-1}}$. Пусть уравнение (19) имеет решение. Тогда выясняем выполнимость равенства

$$x_1^{p_1+pk_1+p\sum_{i=1}^{n-3} m_i\alpha_i} \cdot wx_1^{-(p_1+pk_1+p\sum_{i=1}^{n-3} m_i\alpha_i)} = v.$$

Допустим, что данное равенство не имеет места. Тогда рассматриваем пересечение циклических в $G_{i_{n-1}j_{n-1}}$ подгрупп $\langle y_{n-2}^{pm_{n-3}}\rangle$, $\langle v_{n-1}y_{n-1}^{pm_{n-3}}v_{n-1}^{-1}\rangle$. Пусть

$$y_{n-2}^{pm_{n-2}} = v_{n-1}y_{n-1}^{pm_{n-2}}v_{n-1}^{-1}. \tag{20}$$

Если пересечение — единичная подгруппа, то слова w, v не сопряжены. Допустим обратное, т. е. выполнено соотношение (20). Тогда рассматриваем уравнение

$$y_{n-1}^{pm_{n-2}\alpha_{n-2}} \cdot w'_n = v_n y_n^{q_n}, \tag{21}$$

где $w'_n = y_{n-1}^{q_{n-1}}w_n$, v_n принадлежат подгруппе $G_{i_nj_n}$, $y_{n-1}, y_n \in \{a_{i_n}, a_{j_n}\}$, a_{i_n}, a_{j_n} — образующие $G_{i_nj_n}$.

Пусть уравнение (21) имеет решение. Тогда выясняем выполнимость равенства

$$x_1^{p_1+pk_1+p\sum_{i=1}^{n-1} m_i\alpha i} \cdot w \cdot x_1^{-(p_1+pk_1+\sum_{i=1}^{n-1} m_i\alpha_i)} = v. \tag{22}$$

Если равенство (22) выполняется, то w и v сопряжены. В противном случае — нет. Заменим v на соответствующую циклическую перестановку v^* и к словам w и v^* применим рассмотренный процесс.

Допустим, что на k-м, $1 \leqslant k < n$, шаге рассматриваемого процесса уравнение $y_{k-2}^{pm_{k-2}\alpha_{k-2}}w_{k-1} = v_{k-1}y_{k-1}^{q_{k-1}}$ имеет решение, но не имеет решения уравнение $y_{k-1}^{pm_{k-1}\alpha_{k-1}}w'_k = v_ky_k^{q_k}$, где $w'_k = y_{k-1}^{q_{k-1}}w_k$, y_{k-1}, y_k — образующие подгруппы $G_{i_kj_k}$ и $y_{k-1}^{pm_{k-1}}$ — образующие пересечения циклических подгрупп $\langle y_{k-2}^{pm_{k-2}}\rangle$, $\langle v_{k-1}y_{k-1}^{pm_{k-2}}v_{k-1}^{-1}\rangle$. При этом возможно, что пересечение циклических подгрупп является единичной подгруппой и соответствующая циклическая перестановка w^* не сопряжена с v, либо не является единичной подгруппой. В этом случае возможно, что $\tilde{D}_k \in M$, $\varphi(\partial\tilde{D}_k \cap \gamma) = w'_k$, $\varphi(\partial\tilde{D}_k \cap \delta) = v_k$, имеет вид $\partial\tilde{D}_k = \gamma_k\beta_k\delta_k\alpha_k$, где $\gamma_k = \partial\tilde{D}_k \cap \gamma$, $\delta_k = \partial\tilde{D}_k \cap \delta$, $|\alpha_k| > 1$, $|\beta_k| \geqslant 1$.

Выделим в диаграмме M поддиаграмму $\tilde{\Gamma}$, ограниченную областями $\tilde{D}_k$ слева и $\tilde{D}'_k$ справа: $\tilde{\Gamma} = \tilde{D}_k \cup \Gamma \cup \tilde{D}'_k$, $\partial\Gamma \cap \partial\tilde{D}_k = \alpha_k$, $\partial\Gamma \cap \partial\tilde{D}'_k = \alpha'_k$, $\partial\Gamma \cap \gamma = \gamma'$, $\partial\Gamma \cap \delta = \delta'$, причём каждая граничная область $D \subset \Gamma$ является простой в $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}$ является связной односвязной R-диаграммой. Если $|\alpha_k| > 2$, $|\alpha'_k| \geqslant 2$, то, применяя формулу кривизны к диаграмме $\tilde{\Gamma}$, можно показать, что в этом случае либо вдоль γ', либо вдоль δ' можно выделить полосу, что противоречит свойству α, которым обладает диаграмма M. Поэтому $|\alpha_k| = |\alpha'_k| = 2$, пусть $\alpha_k = e_1e_2$, $\alpha'_k = e'_1e'_2$. Обозначим через $D_1, D_2, \ldots, D_n$ граничные области Γ вдоль границы γ' и через $D'_1, D'_2, \ldots, D_n$ граничные области Γ вдоль границы δ'.

Для любой области $D \in \{D_m\}$, $m = \overline{1,n}$ ($D' \in \{D'_{m'}\}$, $m' = \overline{1,n'}$) имеем $dD = 4$ ($dD' = 4$). Из структуры диаграммы $\tilde{\Gamma}$ следует, что $\sum^*_{\gamma'}\big(3 - i(D)\big) = \sum^*_{\delta'}\big(3 - i(D)\big) = 1$. Поэтому среди областей $\{D_i\}$ ($\{D'_i\}$) число областей с внутренней степенью 2 будет на одну больше числа областей с внутренней степенью 4 и существует j_0, $1 \leqslant j_0 \leqslant n$, такое что $i(D_1) = \ldots = i(D_{j_0-1}) = 3$, $i(D_{j_0}) = 2$ (аналогично имеем для областей $\{D'_i\}$, что существует j'_0, $1 \leqslant j'_0 \leqslant n'_0$, такое что $i(D'_1) = \ldots = i(D'_{j_0-1}) = 3$, $i(D'_{j'_0}) = 2$. Так как $\|\varphi(\partial D_{j_0} \cap \gamma)\| = 2$, то метка $\varphi(\partial D_{j_0-1} \cap \partial D_{j_0})$ определяется однозначно, поэтому $\varphi(e_1) = \varphi(\partial\tilde{D}_m \cap \partial D_1) = \ldots = \varphi(\partial D_{j_0-1} \cap \partial D_{j_0})$.

Метка $\varphi(e_1)$ определяется однозначно; аналогично метка ребра e_2 определяется однозначно из тех же соображений. Поэтому $\varphi(a_k)$ определяется однозначно. Используя её, сопрягаем соответствующую перестановку w.

a_2) Пусть M — кольцевая диаграмма, γ, δ — её граничные циклы, $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v$ удовлетворяют условию α и M является C_{-1}-слойной кольцевой диаграммой. Пусть K_γ — слой с границами γ и γ_1, и пусть $M \setminus K_\gamma$ — простая кольцевая диаграмма с граничными циклами γ_1, δ_0.

Предположим, что $M \setminus K_\gamma$ образуется областями $D_1, D_2, \ldots D_n$, для каждой из которых $\partial D_i \cap \partial(M \setminus K_\gamma)$ — несвязное множество и $D_i \cap D_{i+1} = e_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда, учитывая, что M — диаграмма, удовлетворяющая условиям $C(4)$ и $T(4)$, можно легко убедиться в том, что поддиаграмма, образованная областями $D_1, \ldots, D_n$ в M, образует полосу вдоль границы δ. Поэтому диаграмма $M \setminus K_\gamma$ содержит область D, которая является простой в $M \setminus K_\gamma$.

Покажем, что K_γ содержит область D, $d(D) = 4$ и $|\partial D \setminus (\partial D \cap \gamma)| = 2$.

Простая кольцевая диаграмма $M \setminus K_\gamma$ состоит из связных односвязных диаграмм $J_1, J_2, \ldots, J_m$, любые две соседние поддиаграммы соединены простым путём. Рассмотрим J_1. По условию J_1 не является полосой, поэтому содержит две области, D_1, D'_1, D_1 — начальная область J_1, D'_1 — конечная, $\partial D_1 = \gamma'_1\beta_1\delta_1\alpha_1, \partial D'_1 = \gamma''_1\beta'_1\delta'_1\alpha_1$, где

$$\begin{aligned} &\gamma'_1 = \partial D_1 \cap \gamma_1, \quad \delta_1 = \partial D_1 \cap \delta, \quad |\alpha_1| > 1, \quad |\beta_1| \geqslant 1,\\ &\gamma''_1 = \partial D'_1 \cap \gamma'_1, \quad \delta'_1 = \partial D'_1 \cap \delta, \quad |\beta'_1| > 1, \quad |\alpha'_1| \geqslant 1. \end{aligned}$$

Пусть $J_1 = D_1 \cup \Gamma_1 \cup D'_1$, где $\partial\Gamma_1 \cap \gamma_1 = \tilde{\gamma}_1$, $\partial\Gamma_1 \cap \delta = \tilde{\delta}'$, и все граничные области из Γ_1 являются простыми в J_1. Так же, как в предыдущем случае, покажем, что Γ_1 вдоль $\tilde{\gamma}_1$ содержит область D с $i(D) = 2$. Так как диаграмма M удовлетворяет условиям $C(4)$ и $T(4)$, то в K_γ содержится область $\tilde{D}$, $\partial\tilde{D} \cap \partial D = v$, v — вершина, $i(\tilde{D}) = 2$ и метки рёбер области $\tilde{D}$ определяются однозначно.

Пусть $\varphi(\partial\tilde{D}) \in G_{i_0j_0}$, y_0, y_1 — образующие группы $G_{i_0j_0}$, и пусть боковое ребро e области $\tilde{D}$ соединяет вершину $v \in D$ с вершиной v_1, $v_1 \in \gamma$, $\varphi(e)$ – метка ребра e, $\varphi(e)$ — степень y_0 или y_1, вершине v_1 соответствует циклическая перестановка w^* метки $\varphi(\gamma)$. Сопрягаем w^* элементом $\varphi(e)$, получаем метку $\varphi(\gamma_1)$ граничного цикла γ_1 слоя K_γ; тем самым определяются метки граничных циклов простой кольцевой диаграммы $M \setminus K_\gamma$.

Таким образом, проблему сопряжённости слов w и v мы свели к проблеме сопряжённости граничных меток простой кольцевой диаграммы $M \setminus K_\gamma$, которая была рассмотрена в пункте 1.

Отметим, что область $\tilde{D}$ из K_γ с $i(\tilde{D}) = 2$ определяем непосредственно из разбиения слова w на подслова $w_1, \ldots, w_n$, выбирая подслова w_i с $\|w_i\| = 2$.

2. Рассмотрим случай, когда кольцевая диаграмма M (γ, δ — её граничные циклы, $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ удовлетворяют условию α) содержит область D_0, $\partial D_0 \cap \partial M$ — несвязное множество, $\partial D_0 = \gamma_0 \beta_0 \delta_0 \alpha_0$, где $\gamma_0 = \partial D_0 \cap \gamma$, $\delta_0 = \partial D_0 \cap \delta$, $|\beta_0| \geqslant 1$, $|\alpha_0| > 1$. Допустим, что w_s, v_s — метки соответственно γ_0, δ_0.

Выбираем в M наименьшую связную односвязную поддиаграмму Γ, определяемую слева областью D_0, справа — областью D_0', $\partial D_0 \cap \partial \Gamma = \alpha_0$, $\partial D_0' \cap \partial \Gamma = \beta_0$, $\partial \Gamma \cap \gamma = \tilde{\gamma}$, $\partial \Gamma \cap \delta = \tilde{\delta}$. В результате получаем поддиаграмму $\tilde{\Gamma} = D_0 \cup \Gamma \cup D_0'$.

Заметим, что каждая граничная область D из Γ в $\tilde{\Gamma}$ является простой областью.

Используя формулу кривизны, покажем, что $|\alpha_0| = 2$, $|\beta_0'| = 2$. Обозначим пути $\alpha_0 = e_1 e_2$, $\beta_0' = e_1' e_2'$. Определим метку α_0. Пусть $D_1, \ldots, D_n$ — граничные области в Γ вдоль $\tilde{\gamma}$, $D_1', D_2', \ldots, D_n'$ — граничные области в Γ вдоль $\tilde{\delta}$; выше было доказано существование области D_{j_0} ($D'_{j_0'}$), $D_{j_0} \in \{D_i\}$ ($D'_{j_0'} \in \{D'_{1'}\}$, такой что $i(D_{j_0}) = 2$ ($i(D'_{j_0'}) = 2$), с помощью которых определим метку пути α_0, с помощью которой сопрягаем соответственно циклическую перестановку w, v.

Если для пары подслов w_1, v_1 построенное слово $\varphi(e_1 e_2)$ не переводит сопряжение w в v, то выделяем другую пару соответствующих слов w_i, v_i, для которых уравнение $y_1^n w_i = v_i y_2^{n_2}$ не имеет решения в группе G_{ij}, $w_i, v_i \in G_{ij}$, y_1, y_2 — образующие G_{ij}, и выясняем с помощью построенной процедуры, являются ли они метками области D_0, либо вместо v берём соответствующую циклическую перестановку v^* слова v и для пары w, v^* пытаемся определить существование области D_0 с указанными свойствами.

3. Допустим, что кольцевая диаграмма M (γ, δ — её граничные циклы, $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v$) является m-слойной, $m > 1$. Слова $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ по условию удовлетворяют условию α. Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_m$ — последовательность слоёв диаграммы; граничные циклы K_i — это σ_{1-1}, σ_i; граничные циклы K_1 — $\sigma_0 = \gamma$, σ_1; K_m — σ_{m-1}, $\sigma_m = \delta$. Из условия α следует, что для каждой области $D \subset M$ $d(D) = 4$. Если для всех областей D в граничном слое K_1 $i(D) = 3$, то $\varphi(\gamma) = {} = \varphi(\sigma_1) = \ldots = \varphi(\delta)$.

Заметим, что в данном случае кольцевая диаграмма M не может быть $(C - n)$-слойной.

Можно легко показать, что в этом случае диаграмма M будет содержать внутреннюю точку v с $d(v) = 3$.

Рассмотрим случай n-слойной кольцевой диаграммы M (γ, δ — её граничные циклы, $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ инвариантны относительно α).

Пусть слой K_γ содержит область D с $i(D) = 2$. Так как $\sum_\gamma^* \bigl(3 - i(D)\bigr) = 0$, то, как было отмечено выше, число областей с внутренней степенью, равной двум, и с внутренней степенью, равной четырём, одинаково, и так как $d(D) = 4$ для каждой области $D \subset K_\gamma$, легко убедиться в том, что $\|\varphi(\gamma)\| = \|\varphi(\sigma_1)\|$ и слово $\varphi(\sigma_1)$ есть некоторая перестановка слогов слова $\varphi(\gamma)$. Аналогично убеждаемся, что граничные метки слов K_{σ_i} имеют одинаковые слоговые длины, т. е. $\|\varphi(\gamma)\| = \|\varphi(\sigma_1)\| = \ldots = \|\varphi(\sigma_i)\| = \ldots$ и метка $\varphi(\sigma_i)$ является некоторой перестановкой слогов метки $\varphi(\gamma)$. Всего различных слов не больше $(\|\varphi(\gamma)\|)!$.

Укажем процесс перехода от одного граничного цикла к следующему путём сопряжения. Для этого начнём с $K_\gamma = K_{\sigma_0}$; метка $\varphi(\gamma)$ нам дана, мы разбиваем её на подслова, как было указано выше.

Определяем область D, $D \in K_\gamma$ с $i(D) = 2$, $|\partial D \setminus (\partial K_\gamma \cap \partial D)| = 2$. Тогда по метке $\varphi(\partial K_\gamma \cap \partial D)$, которой присваиваем значение одного из подслов слова w, $w_1, w_2, \ldots, w_n$, $w_s = \varphi(\partial K_\gamma \cap \partial D)$, $\|w_s\| = 2$, определяем метку $\varphi(\partial D)$ и соответственно метку $\varphi(e)$ внутреннего ребра e области D, которой сопрягаем соответствующую циклическую перестановку слова $\varphi(\gamma) = w$. В результате получаем $\varphi(\sigma_1)$, метку граничного цикла σ_1 слоя K_γ.

Проверяем, равно ли слово $\varphi(\sigma_1)$ некоторой циклической слоговой перестановки слова $\varphi(\delta) = v$. Пусть $\varphi(\sigma_1) \neq v^*$. Тогда рассматриваем следующий граничный слой K_{σ_1}. Заменим K_{γ_1} на K_{σ_1} и определим в K_{σ_1} область D с $i(D) = 2$. Определяя, как в K_γ, метку бокового ребра e области D, сопрягая соответствующую циклическую перестановку $\varphi(\sigma_1)$ меткой $\varphi(e)$, получаем граничную метку слоя K_{σ_1}, для которой выясняем, будет ли она равна некоторой циклической перестановке v^*.

В результате через t шагов, $1 \leqslant t \leqslant (\|\varphi(\gamma)\|)!$, определяем, сопряжены ли слова w, v. Если диаграмма сопряжённости слов w, v является $C-n$-слойной, то внесём следующее изменение в описанный выше алгоритм. На каждом i-м шаге, определив метку граничного цикла σ_i, слоя K_{σ_i}, определяем, будут ли слова $\varphi(\sigma_i)$ и $\varphi(\delta)$ граничными метками простой диаграммы с граничными циклами σ_i, δ. Решение данной задачи рассмотрено выше. Теорема 2 доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-41-710002 р_а.

Литература

[1] Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула, 1981. — С. 20—62.

[2] Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряжённости слов в группах Артина и Коксетера большого типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузов. сб. науч. тр. — Тула, 1986. — С. 26—61.

[3] Безверхний В. Н. О нормализаторах элементов в группах $C(p)$ и $T(q)$ // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузов. сб. науч. тр. — Тула, 1994. — С. 4—58.

[4] Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщённой сопряжённости слов в группах Артина большого типа // Фундамент. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 1—38.

[5] Безверхний В. Н. О группах Артина и Коксетера с древесной структурой // Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и приложения. Тез. докл. V междунар. конф. — Тула, 2003. — С. 33—34.

[6] Безверхний В. Н. Решение проблемы равенства и сопряжённости слов в группах Артина, Коксетера // Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и приложения. Матер. XII Междунар. конф. — Тула, 2014. — С. 6.

[7] Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы равенства и сопряжённости слов в некотором классе групп Артина и Коксетера // Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости. — Иваново, 2015. — С. 11—16.

[8] Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблемы равенства и сопряжённости слов в группах Артина с древесной структурой // Изв. Тул. гос. унив. Сер. Математика. Информатика. — 2006. — Т. 12., вып. 1. — С. 67—82.

[9] Безверхний В. Н., Роллов Э. В. О подгруппах свободного произведения групп // Современная алгебра. Т. 1. — Л., 1974. — С. 16—31.

[10] Безверхняя И. С. О пересечении конечнопорождённых подгрупп в свободном произведении групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула, 1981. — С. 103—116.

[11] Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Коксетера // Математика. — 1974. — Т. 18, № 6. — С. 56—79.

[12] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.

[13] Appel K. On Artin groups and Coxeter groups of large type // Contemp. Math. — 1984. — Vol. 33. — P. 50—78.

[14] Appel K., Schupp P. Artin groups and infinite Coxeter groups // Invent. Math. — 1983. — Vol. 72. — P. 201—220.