Проблема степенной сопряжённости слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением

В. Н. БЕЗВЕРХНИЙ
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

Е. С. ЛОГАЧЁВА
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: Logacheva-es@mail.ru

УДК 519.4

Ключевые слова: группа, подгруппа, проблема сопряжённости, свободное произведение с объединением.

Аннотация

В работе положительно решена проблема степенной сопряжённости слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением. Представленный результат является обобщением известного результата С. Липшуца для свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением.

Abstract

V. N. Bezverkhnii, E. S. Logacheva, The problem of the power conjugacy words in a tree product of free groups with cyclic amalgamation, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 29—37.

We give a positive answer to the problem of power conjugacy words in a tree product of free groups with cyclic amalgamation. It is a generalization of the well-known result obtained by S. Lipschutz for a free product of two free groups with cyclic amalgamation.

Работа посвящена решению проблемы степенной сопряжённости слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением. Данная проблема является обобщением проблемы сопряжённости слов, решённой в [3]. Определим основные проблемы.

Определение 1. В группе G разрешима проблема сопряжённости слов, если существует алгоритм, позволяющий установить для любых двух слов w_1, w_2 из G, существует ли такой элемент $z \in G$, что $z^{-1}w_1z = w_2$.

Определение 2. В группе G разрешима проблема степенной сопряжённости слов, если существует алгоритм, позволяющий установить для любых двух слов w_1, $w_2 \in G$, существуют ли такие натуральные числа r, s и элемент $z \in G$, что $z^{-1}w_1^rz = w_2^s$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 4, с. 29—37.

При решении основной задачи используется теорема Магнуса о свободном произведении групп с объединением.

Теорема 1 [6]. *Пусть $G = A *_{H=K} B$. Тогда каждый элемент группы G сопряжён с некоторым циклически несократимым элементом. Далее, пусть g — циклически несократимый элемент группы G. Тогда*

(i) *если g сопряжён с элементом $h \in H$, то g принадлежит A или B и существует последовательность элементов $h, h_1, h_2, \ldots, h_l, g$, где $h_i \in H$, $i \in \overline{1,l}$, соседние члены которой сопряжены в A или в B;*

(ii) *если g сопряжён с элементом g', причём $g' \in A$ или $g' \in B$, но g не принадлежит подгруппе, сопряжённой с H, то g и g' принадлежат одному сомножителю (A или B) и сопряжены в нём;*

(iii) *если g сопряжён с элементом $p_1p_2\ldots p_r$, где $r \geqslant 2$, и p_i, p_{i+1}, $i \in \overline{1, r-1}$, так же как и p_1, p_r, не принадлежат одному сомножителю, то g можно получить, циклически переставляя $p_1p_2\ldots p_r$, а затем сопрягая полученный элемент подходящим элементом из H.*

Известно [4], что в свободных группах разрешима проблема степенной сопряжённости слов.

Пусть F_m и F_n — свободные группы рангов $m, n < \infty$, $v \in F_m$, $w \in F_n$ и v, w не являются степенями в соответствующих группах. Тогда $G = F_m *_C F_n$ — свободное произведение с объединением $C = \langle v^k \rangle = \langle w^p \rangle$.

С. Липшуцем была доказана следующая теорема.

Теорема 2 [8]. *В группе $G = F_m *_C F_n$ разрешима проблема степенной сопряжённости слов.*

Определим древесное произведение конечно порождённых свободных групп с циклическим объединением. В соответствии с [7] древесное произведение конечного семейства свободных групп с циклическими объединениями определяется следующим образом. Пусть Γ_n — конечное дерево, вершины которого обозначены числами из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, и пусть каждой вершине i поставлена в соответствие свободная группа F_{m_i} конечного ранга m_i. Предположим, что для каждой пары i и j смежных вершин графа Γ_n в группах F_{m_i} и F_{m_j} фиксированы неединичные циклические подгруппы, порождаемые элементами $v_{ij}^{p_{ij}}$ и $v_{ji}^{p_{ji}}$ соответственно, причём v_{ij} и v_{ji} не являются истинными степенями в соответствующей группе. Древесным произведением $F_{m_1}, F_{m_2}, \ldots, F_{m_n}$ с объединёнными подгруппами $\langle v_{ij}^{p_{ij}} \rangle$ и $\langle v_{ji}^{p_{ji}} \rangle$ называется фактор-группа G_{Γ_n} свободного произведения групп $F_{m_1}, F_{m_2}, \ldots, F_{m_n}$ по нормальному замыканию множества, состоящего из всевозможных элементов вида $v_{ij}^{p_{ij}} v_{ji}^{-p_{ji}}$. В [7] доказано, что группы $F_{m_1}, F_{m_2}, \ldots, F_{m_n}$ вложимы в группу G_{Γ_n} естественным образом.

Копредставление группы G_{Γ_n} имеет вид

$$G_{\Gamma_n} = \left\langle \prod_{i=1}^{n} * F_{m_i} \mid v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}} \right\rangle, \quad n \geqslant 2, \quad i \in I_1, \quad j \in I_2.$$

I_1, I_2 — некоторые конечные подмножества множества натуральных чисел, определяемые структурой данной группы (см. выше).

Для группы G_{Γ_n} справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [3]. *В группе G_{Γ_n} алгоритмически разрешимы следующие проблемы:*

1) *для любой конечно порождённой подгруппы $H < G_{\Gamma_n}$ и любой циклической подгруппы $\langle w\rangle < F_{m_i}$, $i \in \overline{1,n}$, найти образующие $H \cap \langle w\rangle$;*
2) *для любого слова $v \in G_{\Gamma_n}$ и конечно порождённой подгруппы $H < G_{\Gamma_n}$ выяснить, пусто или не пусто пересечение vH с любой циклической подгруппой $\langle w\rangle < F_{m_i}$, $i \in \overline{1,n}$, т. е. $vH \cap \langle w\rangle$.*

Преобразуем группу G_{Γ_n} следующим образом: выделим в дереве Γ_n некоторую вершину n. Без потери общности можно считать, что вершина n является концевой и что смежной с ней является вершина $n-1$. Обозначим через Γ_{n-1} подграф графа Γ_n с вершинами $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ и через $G_{\Gamma_{n-1}}$ соответствующее древесное произведение групп $F_{m_1}, F_{m_2}, \ldots, F_{m_{n-1}}$ с теми же объединёнными подгруппами. В соответствии с [7] группа G_{Γ_n} является свободным произведением $G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$ групп $G_{\Gamma_{n-1}}$ и F_{m_n} с объединённой подгруппой $C_n = \langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}}\rangle = \langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}}\rangle$, где $\langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}}\rangle < F_{m_{n-1}}$, $\langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}}\rangle < F_{m_n}$.

Каждый элемент $w \in G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$ может быть единственным образом представлен в нормальной форме:

$$w = g_1 g_2 \ldots g_N, \tag{1}$$

где $g_i \neq 1$, $i = \overline{1,N}$; $g_i \notin C_n$ (в G_{Γ_n} разрешима проблема вхождения); g_i, g_{i+1} принадлежат разным сомножителям группы $G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$.

Элемент $g_1 g_2 \ldots g_N$ (1) называется словом группы G_{Γ_n}; g_i, $i = \overline{1,N}$, называются слогами слова (1).

Слово $w = g_1 g_2 \ldots g_N$ является циклически несократимым, если никакая циклическая перестановка $g_1, g_2, \ldots, g_N$ не содержит $g_i = g_{i+1}^{-1}$ $(g_1 = g_N^{-1})$.

Под длиной (слоговой длиной) $l(w)$ слова $w = g_1 g_2 \ldots g_N$ будем понимать число слогов g_i, $i = \overline{1,N}$, т. е. $l(w) = N$.

Лемма 2 [3]. *Пусть $G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$, и пусть для $h, \bar{h} \in C_n$, существует $z \in G_{\Gamma_{n-1}}$, такой что $z^{-1}hz = \bar{h}$. Тогда $h = \bar{h}$.*

Следствие 1 [3]. *Пусть $G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$, и пусть для $h, \bar{h} \in C_n$ существует $z \in G_{\Gamma_n}$, такой что $z^{-1}hz = \bar{h}$, тогда $h = \bar{h}$.*

Лемма 3 [3]. *Пусть $h_1 \in C_i$, $h_2 \in C_j$, где C_i, C_j — объединяемые подгруппы группы G_{Γ_n}. Тогда можно эффективно установить, сопряжены h_1 и h_2 в группе G_{Γ_n} или нет.*

Следствие 2 [3]. *Для любых $h_i \in C_i$, $h_j \in C_j$ можно эффективно установить, существуют ли натуральные r, s и $z \in G_{\Gamma_n}$, такие что $z^{-1}h_i^r z = h_j^s$.*

Теорема 3 [3, 5]. *В группе $G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$ разрешима проблема сопряжённости слов.*

Докажем теорему о степенной сопряжённости слов в группе G_{Γ_n}.

Теорема 4. *В группе* $G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$ *разрешима проблема степенной сопряжённости слов.*

Доказательство теоремы 4 проводится индукцией по числу сомножителей в древесном произведении G_{Γ_n}. Базой индукции служит теорема 2. Предположим, что проблема степенной сопряжённости разрешима для группы $G_{\Gamma_{n-1}}$, и докажем утверждение для группы G_{Γ_n}.

Следуя теореме 1, рассмотрим следующие случаи.

(i) Пусть v — циклически несократимый элемент G_{Γ_n}, $h \in C_n$, и пусть v и h не сопряжены в группе G_{Γ_n}. Однако существуют такие r, s, что $z^{-1}h^r z = v^s$, $z = g_1 g_2 \ldots g_t$ — нормальная форма в группе $G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$. Имеем

$$g_t^{-1} g_{t-1}^{-1} \ldots g_2^{-1} g_1^{-1} h^r g_1 g_2 \ldots g_t = v^s. \tag{2}$$

Пусть $g_1 \in F_{m_n}$. Тогда для свободной группы справедливо $g_1^{-1} h^r g_1 = h_1^r$, где $h^r = h_1^r$.

Пусть $g_1 \in G_{\Gamma_{n-1}}$. В силу циклической несократимости v и в силу леммы 2 из равенства $g_1^{-1} h^r g_1 = h_1^r$ следует, что $h^r = h_1^r$. Поэтому равенство (2) перепишем в виде $g_t^{-1} g_{t-1}^{-1} \ldots g_2^{-1} h_1^r g_2 \ldots g_t = v^s$ и рассмотрим произведение $g_2^{-1} h_1^r g_2$. В силу циклической несократимости элемента $g_t^{-1} g_{t-1}^{-1} \ldots g_2^{-1} h_1^r g_2 \ldots g_t$ имеем $g_2^{-1} h_1^r g_2 = h_2^r$, и следовательно, $h_1^r = h_2^r$.

Рассуждая аналогично, получаем, что $h^r = h_1^r = h_2^r = \ldots = h_{t-1}^r$ и $g_t^{-1} h_{t-1}^r g_t = v^s$.

Таким образом получаем, что если циклически несократимый элемент $v^s \in G_{\Gamma_n}$ сопряжён с элементом из объединяемой подгруппы $h^r \in C_n$, $g_t^{-1} h^r g_t = v^s$, то

- если $g_t \in F_{m_n}$, следовательно, $v^s \in F_{m_n}$, таким образом, решение проблемы степенной сопряжённости следует из её разрешимости в свободной группе;
- если $g_t \in G_{\Gamma_{n-1}}$, следовательно, $v^s \in G_{\Gamma_{n-1}}$, и проблема степенной сопряжённости разрешима по индуктивному предположению.

(ii) Пусть v и w — циклически несократимые слова в G_{Γ_n}, $v \in G_{\Gamma_{n-1}}$ или $v \in F_{m_n}$, и пусть любые степени элементов v, w не сопряжены ни с каким элементом из объединяемой подгруппы C_n. Тогда если v^r сопряжён с элементом w^s в древесном произведении с объединением G_{Γ_n}, то v и w принадлежат одному сомножителю $G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$ и их степени v^r и w^s сопряжены в нём.

Действительно, пусть $w \in G_{\Gamma_{n-1}}$, $z \in G_{\Gamma_n}$, $z = g_1 g_2 \ldots g_k$ — нормальная форма элемента z в группе $G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$.

Если $z = g_1$, то соотношение $g_1^{-1} v^r g_1 = w^s$ возможно лишь в том случае, когда v, w принадлежат сомножителю группы $G_{\Gamma_{n-1}}$.

Если $l(z) > 1$, $z = g_1 g_2 \ldots g_k$, то рассмотрим произведение

$$g_k^{-1} \ldots g_1^{-1} v^r g_1 g_2 \ldots g_k. \tag{3}$$

Так как никакая степень v не сопряжена с элементом из C_n, то $(g_1^{-1}v^r g_1)$ не сопряжено с элементом подгруппы C_n, и элемент (3) является циклически сократимым, т. е. случай невозможен.

Таким образом, мы показали, что в случае (ii) степени v^r и w^s должны принадлежать одному сомножителю группы G_{Γ_n}.

Случай $w \in F_{m_n}$ рассматривается аналогично.

(iii) Пусть $v, w \in G_{\Gamma_n}$ — циклически несократимые слова длины больше единицы и существуют натуральные числа r, s, такие что v^r, w^s сопряжены в G_{Γ_n}. Согласно теореме Магнуса если слова v^r и w^s сопряжены в группе G_{Γ_n}, то существует некоторая циклическая перестановка w_1 слова w и $h \in C_n$, такие что $hv^r h^{-1} = w_1^s$.

Лемма 4. *Пусть $w, v \in G_{\Gamma_n}$ — циклически несократимые слова, $l(v) = l(w) > 1$, существуют $m \in N$, $h \in C_n$ и циклическая перестановка w_1 слова w, для которых выполняется соотношение*

$$hv^m h^{-1} = w_1^m.$$

Тогда существует такое $h' \in C_n$, что

$$hv = w_1 h'. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть нормальные формы элементов v, w_1 имеют вид $v = g_1 g_2 \ldots g_k$, $w_1 = g_1' g_2' \ldots g_k'$, и пусть $hv^m = w_1^m h$. Рассмотрим равенство $hg_1 g_2 \ldots g_k v^{m-1} = g_1' g_2' \ldots g_k' w_1^{m-1} h$, из которого следует система соотношений

$$hg_1 = g_1' h_1, \quad h_1 g_2 = g_2' h_2, \ldots, \quad h_{k-1} g_k = g_k' h_k, \quad h_i \in C_n, \quad i = \overline{1,k};$$

$hv = w_1 h'$, где $h' = h_k$. Лемма доказана. □

Из леммы 4 следует, что если слово v и ни одна из циклических перестановок не удовлетворяют соотношению (4), то никакие степени слов v и w не сопряжены в G_{Γ_n}.

Лемма 5. *Пусть w, v — циклически несократимые слова группы G_{Γ_n}, $l(v) = l(w) > 1$ и существуют $h_1, h_1', h_2, h_2' \in C_n$ и некоторая циклическая перестановка w_1 слова w, для которых выполнены соотношения*

$$h_1 v = w_1 h_1', \quad h_2 v = w_1 h_2'.$$

Тогда $h_1 = h_2 h_0$, $h_1' = h_2' h_0$, $h_0 v = v h_0$, $h_0 w_1 = w_1 h_0$ для некоторого $h_0 \in C_n$.

Доказательство. Действительно, из равенств $h_1 v = w_1 h_1'$, $h_2 v = w_1 h_2'$ получаем равенства $v^{-1} h_2^{-1} h_1 v = {h_2'}^{-1} h_1'$ и $h_1 h_2^{-1} = w_1 h_1' {h_2'}^{-1} w_1^{-1}$, из которых на основании следствия 1 получаем, что $h_2^{-1} h_1 = {h'}_2^{-1} h_1' = h_0$, $h_0 \in C_n$. Полученное h_0 удовлетворяет равенствам $h_1 = h_2 h_0$, $h_1' = h_2' h_0$, $h_0 v = v h_0$, $h_0 w_1 = w_1 h_0$. Лемма доказана. □

Таким образом, если $w, v \in G_{\Gamma_n}$ удовлетворяют условиям леммы 5 и существуют циклическая перестановка w_1 слова w, $m \in N$ и $h \in C_n$, такие что $hv^m = w_1^m h$, то в качестве h можно взять любое h_1, удовлетворяющее равенству $h_1 v = w_1 h_1'$, т. е. $h_1 v^m h_1^{-1} = w_1^m$.

Лемма 6. *Существует алгоритм, позволяющий для любых двух циклически несократимых слов $w, v \in G_{\Gamma_n}$, $l(v) = l(w) > 1$, определить, существуют ли $h, h' \in C_n$ и циклическая перестановка w_1 слова w, такие что выполняется равенство*

$$hv = w_1 h'. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть v и w_1 имеют следующие нормальные представления в группе $G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$: $v = g_1 g_2 \dots g_k$, $w_1 = g'_1 g'_2 \dots g'_k$.

Построение h, h', удовлетворяющих (5), будем осуществлять, последовательно преобразуя каждый слог g_i слова v в g'_i умножением g_i слева на некоторый элемент $h_i \in C_n$, существование которого для каждого i определяется эффективно.

Определим $h_0, h'_0 \in C_n$ так, чтобы $h_0 g_1 = g'_1 h'_0$. Решение данного уравнения эквивалентно решению следующей алгоритмической проблемы: установить, пусто или не пусто пересечение смежных классов циклических подгрупп $(g_1^{-1} C_n g_1) \cap (g_1^{-1} g'_1) C_n$. В силу леммы1 данная проблема алгоритмически разрешима.

Если $(g_1^{-1} C_n g_1) \cap (g_1^{-1} g'_1) C_n = \varnothing$, то для v и данной циклической перестановки w_1 слова w равенство (5) не выполняется.

Пусть $(g_1^{-1} C_n g_1) \cap (g_1^{-1} g'_1) C_n \neq \varnothing$. Определяем $h_0 \in (g_1^{-1} C_n g_1) \cap (g_1^{-1} g'_1) C_n$. Используя разрешимость проблемы вхождения в группе G_{Γ_n} [1, 2], определяем $h_0 \in C_n$, такое что $h_0 g_1 = g'_0 h'_0$. Для этого выясняем, принадлежит ли ${g'}_0^{-1} h_0 g_1$ подгруппе C_n.

Определяем единственность h_0. Для этого, используя лемму 1, определяем пересечение циклических подгрупп $(g_1^{-1} C_n g_1)$ и C_n, где $C_n \in F_{m_n}$. Если $(g'_1 C_n {g'}_1^{-1}) \cap C_n = C'_n = E$ (E — единичная подгруппа), то h_0 — единственный элемент из $(g_1^{-1} C_n g_1) \cap (g_1^{-1} g'_1) C_n$. В этом случае определяем, существует ли h', такое что $h_0 v = w_1 h'$, решая проблему вхождения элемента $w_1^{-1} h_0 v$ в циклическую подгруппу C_n.

Пусть $(g'_1 C_n {g'_1}^{-1}) \cap C_n = C'_n \neq E$. Используя следствие 1, можно легко убедиться в том, что элементы из C'_n коммутируют с g'_1, т. е. $C'_n < C_{G_{\Gamma_n}}^{(g'_1)}$, где $C_{G_{\Gamma_n}}^{(g'_1)}$ — централизатор элемента g'_1 в G_{Γ_n}.

Преобразуем $h_0 v = h_0 g_1 g_2 \dots g_k = g'_1 \bar{g}_2 g_3 \dots g_k$, где $\bar{g}_2 = h'_0 g_2$. Далее слог $\bar{g}_2$ в слове $h_0 v$ умножением на $h_1 \in C'_n$, который определяется из пересечения $\bar{g}_2^{-1} {g'_1}^{-1} C'_n g'_1 \bar{g}_2 \cap (\bar{g}_2^{-1} g'_2) C_n$, преобразуем в g'_2. При этом если $\bar{g}_2^{-1} {g'_1}^{-1} C'_n g'_1 \bar{g}_2 \cap (\bar{g}_2^{-1} g'_2) C_n = \varnothing$, то соотношение (5) не выполняется.

Пусть $\bar{g}_2^{-1} {g'_1}^{-1} C'_n g'_1 \bar{g}_2 \cap (\bar{g}_2^{-1} g'_2) C_n \neq \varnothing$. Тогда определяем h_1, принадлежащий пересечению, и находим h'_1, удовлетворяющий равенству $h_1 \bar{g}_2 = g'_2 h_1$ (h_1 определяется вследствие решения проблемы вхождения ${g'}_2^{-1} h_1 \bar{g}_2$ в C_n).

Переписываем $h_1 h_0 v = g'_1 g'_2 (h'_1 g_3) g_4 \dots g_k = g'_1 g'_2 \bar{g}_3 g_4 \dots g_k$, $\bar{g}_3 = h'_1 g_3$.

Рассматриваем пересечение циклических подгрупп:

$$g'_1 g'_2 C'_n {g'_2}^{-1} {g'_1}^{-1} \cap C'_n = C''_n.$$

Если $C''_n = E$, то h_1 — единственный элемент из пересечения

$$\bar{g}_2^{-1} {g'_1}^{-1} C'_n g'_1 \bar{g}_2 \cap (\bar{g}_2^{-1} g'_2) C_n$$

и для того чтобы выполнялось соотношение (5), $h_1 h_0 v = w_1 h'$, необходимо, чтобы $w_1^{-1} h_1 h_0 v$ принадлежало подгруппе C_n.

Пусть $C''_n \neq E$. Тогда, используя следствие 1, можно легко убедиться в том, что элементы подгруппы C''_n коммутируют с $g'_1 g'_2$, т. е. $C''_n < C_{G_{\Gamma_n}}^{(g'_1 g'_2)}$. Действительно, для любого $h \in C''_n$ существует h', такой что $h g'_1 g'_2 = g'_1 g'_2 h'$, отсюда следует, что $h = h'$ (следствие 1).

Пусть на i-м шаге, $0 < i < k$, слово v будет преобразовано в слово

$$h_i h_{i-1} \dots h_1 h_0 v = g'_1 g'_2 \dots g'_i \bar{g}_{i+1} g_{i+2} \dots g_k,$$

где $\bar{g}_{i+1} = h'_i g_i$, $h_i g_i = g'_i h'_i$, h_i принадлежит пересечению смежных классов циклических подгрупп:

$$\bar{g}_i^{-1} {g'}_i^{-1} \dots {g'}_1^{-1} C_n^{(i-1)} g'_1 g'_2 \dots g'_i \bar{g}_i \cap (\bar{g}_i^{-1} g'_i) C_n.$$

Согласно лемме 1 h_i можно эффективно определить. Пусть h_i не единственный элемент из пересечения. В этом случае

$$g'_1 g'_2 \dots g'_i C_n^{(i-1)} {g'}_i^{-1} \dots {g'}_1^{-1} \cap C_n = C_n^{(i)} \neq E$$

и любой элемент из $C_n^{(i)}$ коммутирует с $g'_1 g'_2 \dots g'_i$.

Следующим шагом определяем, пусто или не пусто пересечение

$$\bar{g}_{i+1}^{-1} {g'}_{i+1}^{-1} \dots {g'}_1^{-1} C_n^{(i)} g'_1 g'_2 \dots g'_{i+1} \bar{g}_{i+1} \cap (\bar{g}_{i+1}^{-1} g'_{i+1}) C_n$$

(лемма 1). Если данное пересечение пусто, то соотношение (5) не выполняется для v и данной циклической перестановки w_1 слова w.

Пусть рассматриваемое пересечение

$$\bar{g}_{i+1}^{-1} {g'}_{i+1}^{-1} \dots {g'}_1^{-1} C_n^{(i)} g'_1 g'_2 \dots g'_{i+1} \bar{g}_{i+1} \cap (\bar{g}_{i+1}^{-1} g'_{i+1}) C_n \neq \varnothing.$$

Тогда существует h_{i+1}, принадлежащий пересечению, и $h_{i+1} \bar{g}_{i+1} = {g'}_{i+1} {h'}_{i+1}$ и $h_{i+1} h_i h_{i-1} \dots h_1 h_0 v = g'_1 g'_2 \dots g'_i g'_{i+1} \bar{g}_{i+2} g_{i+3} \dots g_k$, где $\bar{g}_{i+2} = {h'}_{i+1} g_{i+2}$.

Определяем, является ли h_i единственным элементом пересечения. Рассмотрим пересечение циклических подгрупп

$$g'_1 g'_2 \dots g'_i {g'}_{i+1} C_n^{(i)} {g'_{i+1}}^{-1} {g'_i}^{-1} \dots {g'}_1^{-1} \cap C_n = C_n^{(i+1)}.$$

Если $C_n^{(i+1)} = E$, то проверяем, принадлежит ли элемент $w_1^{-1}(h_i h_{i-1} \dots h_1 h_0 v)$ подгруппе C_n. Если принадлежит, то соотношение (5) справедливо.

Пусть $C_n^{(i+1)} \neq E$. Тогда элементы циклической подгруппы $C_n^{(i+1)}$ коммутируют с $g'_1 g'_2 \dots g'_i {g'}_{i+1}$. Далее аналогично рассмотренному выше случаю определяем элемент h_{i+2}, с помощью которого преобразуем $\bar{g}_{i+2}$ в g'_{i+2}: $h_{i+2} \bar{g}_{i+2} = g'_{i+2} {h'}_{i+2}$, и так далее.

В результате через конечное число шагов, не превосходящее k, выясняем, выполняется ли для v и w_1 равенство (5). Если не выполняется, то рассматриваем другую циклическую перестановку слова w. Лемма доказана. $\square$

Лемма 7. *Пусть* $w, v \in G_{\Gamma_n}$ — *циклически несократимые слова,* $l(v) = l(w) > 1$, *и пусть существуют* $h, h' \in C_n$ *и циклическая перестановка* w_1 *слова* w, *такие что*

$$hv = w_1 h'. \tag{6}$$

Соотношение

$$hv^m = w_1^m h \tag{7}$$

справедливо для некоторого $m \in N$ *тогда и только тогда, когда* $h = h'$.

Доказательство. Пусть выполнены равенства (6) и (7). Покажем, что в этом случае $h = h'$, т. е. слова v и w_1 сопряжены.

Рассмотрим

$$hv^m h^{-1} = hv(v^{m-1}h^{-1}) = w_1 h' h^{-1}(hv)v^{m-2}h^{-1} = \\ = w_1 h' h^{-1} w_1 h' h^{-1} \ldots h' h^{-1} w_1 h' h^{-1} = w_1^m.$$

Обозначим $h' h^{-1} = \bar{h}$. Тогда имеем равенство

$$(w_1 \bar{h})^m = w_1^m. \tag{8}$$

Сократив обе части равенства (8) на w_1, перепишем его в виде

$$(w_1^{m-1})^{-1} \bar{h} w_1 \ldots \bar{h} w_1 = 1. \tag{9}$$

Так как w_1 — циклически несократимое слово, для того чтобы имело место сокращение в левой части равенства (9), должно выполняться следующее:

$$w_1^{-1} \bar{h} w_1 = \bar{h}_1', \quad \bar{h}_1' \in C_n.$$

Тогда на основании следствия 1 имеем $\bar{h} = \bar{h}'$ и равенство (9) преобразуем к равенству

$$(w_1^{m-1})^{-1}(w_1^{m-1})\bar{h}^m = 1,$$

из которого следует, что $\bar{h}^m = 1$ в свободной группе F_{mn}, но тогда $\bar{h} = 1$ и $h = h'$.

Обратное утверждение очевидно. Лемма доказана. □

Следствие 3. *Пусть* $w, v \in G_{\Gamma_n}$ — *циклически несократимые слова,* $l(v) \neq l(w)$, $l(v) > 1$, $l(w) > 1$. *Их степени сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены слова* $v^{l(w)}$, $w^{l(v)}$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 7.

Справедливость теоремы 4 доказана.

Из доказательства теоремы 4 непосредственно вытекают следствия 4—6.

Следствие 4. *Пусть* w, v — *циклически несократимые элементы группы* G_{Γ_n}, *такие что* $l(w) = l(v)$. *Тогда из степенной сопряжённости* w *и* v *следует их сопряжённость в группе* G_{Γ_n}.

Следствие 5. *Пусть* w, v — *циклически несократимые элементы группы* G_{Γ_n}, *такие что* $l(w) \neq l(v)$. *Тогда из степенной сопряжённости* w *и* v *следует сопряжённость слов* $w^{l(v)}$ *и* $v^{l(w)}$ *в группе* G_{Γ_n}.

Следствие 6. *Степени двух любых слов w и v неравной длины сопряжены в G_{Γ_n} тогда и только тогда, когда сопряжены $w^{l(v)}$ и $v^{l(w)}$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-41-710002 р_а.

Литература

[1] Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула, 1981. — С. 20—62.

[2] Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула, 1986. — С. 3—25.

[3] Безверхний В. Н., Логачёва Е. С. Проблема сопряжённости слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением // Дискрет. матем. — 2016. — Т. 28, № 1. — С. 3—18.

[4] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.

[5] Логачёва Е. С. Теорема Магнуса для древесного произведения свободных групп с циклическим объединением // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Тез. Междунар. конф., ТГПУ им. Л. Н. Толстого. — 2015. — С. 84—87.

[6] Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. — М.: Наука, 1974.

[7] Karras A., Solitar D. The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup // Trans. Am. Math. Soc. — 1970. — Vol. 150. — P. 227—255.

[8] Lipschutz S. On powers in generalized free products of groups // Arch. Math. Soc. — 1968. — Vol. 1. — P. 575—576.