О полугруппах Артина

В. Н. БЕЗВЕРХНИЙ
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

А. Е. УСТЯН
Тульский государственый педагогический
университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ustyan37@mail.ru

УДК 519.14

Ключевые слова: полугруппа, группа, диаграмма.

Аннотация

Вводится понятие полугруппы Артина большого (экстрабольшого) типа. Доказывается инъективное вложение этих полугрупп в соответствующие им группы Артина большого (экстрабольшого) типа и разрешимость проблемы сопряжённости слов в данном классе полугрупп.

Abstract

V. N. Bezverkhnii, A. E. Ustyan, On the Artin semigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 39—49.

This paper introduces the concept of the Artin semigroup of a large (extra large) type. We prove their injective embedding in the corresponding Artin groups of large (extra large) type and the solvability of the word conjugacy problem in this class of semigroups.

Группой Артина называется группа, заданная конечной системой образующих $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и системой определяющих соотношений

$$\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}},$$

где $i, j \in I$, через $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ обозначается слово $a_i a_j a_i \ldots$, состоящие из m_{ij} чередующихся букв a_i, a_j; m_{ij} — элемент симметрической матрицы Коксетера, соответствующей данной группе G.

Запишем копредставление группы G:

$$G = \langle a_1, \ldots, a_n;\ \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ij}},\ i, j \in I \rangle. \tag{1}$$

Каждой группе Артина G можно поставить в соответствие полугруппу Артина

$$G^+ = \langle\langle a_1, \ldots, a_n;\ \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ij}},\ i, j \in I \rangle\rangle. \tag{2}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 4, с. 39—49.
© 2019 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Группа Артина называется группой Артина конечного типа, если соответствующая ей группа Коксетера

$$\bar{G} = \langle a_1, \ldots, a_n;\ \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ij}},\ a_i^2 = 1,\ i, j \in I \rangle \tag{3}$$

является конечной группой. Данный класс групп был введён Э. Брискорном и К. Сайто [3], решившими в данном классе проблему равенства и сопряжённости слов.

Полугруппа

$$G^+ = \langle \langle \{a_i\}_{i \in I};\ \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ij}},\ i, j \in I \rangle \rangle, \tag{4}$$

соответствующая группе группе Артина G (1), называется полугруппой Артина.

Если G — группа Артина конечного типа, то G^+ вложена в G [3, 4]. Доказательство данного утверждения непосредственно использует теорему О. Оре, согласно которой полугруппа G^+ должна содержать центральный элемент, в G^+ разрешены левая и правая делимость и для любых элементов $a, b \in G^+$ должны существовать левое и правое наименьшие общие кратные.

Так как группы Артина большого и экстрабольшого типов с числом образующих n при $n > 2$ являются группами с тривиальным центром, то к ним теорема Оре неприменима.

Группа Артина

$$G_{ab} = \langle ab;\ \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ba \rangle^{m_{ab}} \rangle$$

является группой Артина конечного типа, поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [3, 4]. *Полугруппа Артина G_{ab}^+ инъективно вложима в группу Артина G_{ab}.*

Таким образом, два положительных слова $w, v \in G_{ab}^+$ равны в G_{ab} тогда и только тогда, когда они равны в полугруппе G_{ab}^+.

Пусть G — конечно порождённая с n образующими ($n > 2$) группа Артина $G(1)$ большого (экстрабольшого) типа,

$$G = \langle \{a_i\}_{i=\overline{1,n}};\ \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ij}},\ i \in I \rangle,$$

и G^+ — соответствующая полугруппа Артина, $m_{ij} \geqslant 3$ ($m_{ij} > 3$); m_{ij} — элемент симметрической матрицы Коксетера.

Каждую подгруппу

$$G_{ij} = \langle a_i, a_j;\ \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ij}} \rangle$$

представим в виде

$$G_{ij} = \langle a_i, a_j;\ R_{ij} \rangle,$$

где R_{ij} — циклически несократимые, не равные единице в свободной группе слова, равные единице в G_{ij}. Через $R = \bigcup\limits_{i,j \in I} R_{ij}$ обозначим соотношения в G, и копредставление группы G будет иметь вид

$$G = \langle \{a_i\}_{i=\overline{1,n}};\ R \rangle.$$

Теорема 2. *Пусть $w, v \in G^+$, G^+ — полугруппа Артина большого (экстрабольшого типа), и пусть $w = v$ в соответствующей G^+ группе Артина G. Тогда $|w| = |v|$ ($|w|$ — длина слова в свободной группе).*

Доказательство. Пусть $w, v \in G^+$, и пусть $w = v$ в группе G. Диаграмму, соответствующую равенству $w = v$ в G, обозначим M. Пусть $\gamma\delta$ — граничный цикл M, где $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta)^{-1} = v$, пусть слова wv^{-1}, $v^{-1}w$ циклически свободно несократимы.

Подвергнем M следующим преобразованиям:

α) если D', D'' с $\varphi(\partial D')$, $\varphi(\partial D'')$, принадлежащими G_{ij}, пересекаются: $\partial D' \cap \partial D'' = \eta$, где $\varphi(\eta) \geqslant 1$, то стираем η, получаем область D с меткой, являющейся меткой подкарты, состоящей из областей D', D'';

β) если метка области D равна единице в свободной группе, то вырезаем её и склеиваем по границе.

Диаграмма M называется приведённой, если она инвариантна относительно преобразований α, β.

Пусть M — однослойная диаграмма, $M = \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i$, для каждого i, $1 \leqslant i < m$, $\partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_{i+1}$, e_{i+1} — общее ребро, $\partial D_i = \gamma_i e_i \delta_i e_{i+1}$, где $\gamma_i = \partial D_i \cap \gamma$, $\delta_i = \partial D_i \cap \delta$, $\varphi(\gamma_i), \varphi(\delta_i)^{-1} \in G^+$, слоговая длина метки ребра e_i равна 1, $\|\varphi(e_i)\| = 1$.

Каждая область $D \in M$ является в общем случае поддиаграммой над соответствующей подгруппой G_{ij}. Метки областей $D \in M$ состоят из двух частей $\varphi(S_1)$, $\varphi(S_2)$, где $\partial D = S_1 S_2$, $\varphi(S_1), \varphi(S_2)^{-1} \in G^+$, $\varphi(S_1) = \varphi(S_2)^{-1}$ в G^+.

Введём в каждой области $D_i \in M$ делящие точки, отделяющие положительную часть метки от отрицательной. Для областей D_i, D_{i+1} их делящие точки не могут быть тождественны одной вершине $e_{i+1} = \partial D_i \cap \partial D_{i+1}$.

Область $D_i \in M$ назовём левосторонней, если её делящие точки совпадают с точками $e_i \cap \gamma_i$, $e_{i+1} \cap \delta_{i+1}$, и правосторонней, если делящие точки совпадают с точками $e_i \cap \delta_i$, $e_{i+1} \cap \gamma_i$.

Область $D_i \in M$ назовём областью первого типа, если её делящие точки являются концевыми точками γ_{ij}, и областью второго типа, если её делящие точки являются концевыми точками δ_i.

Заметим, что области одного типа (первого, второго) не могут в последовательности следовать одна за другой. Это означает следующее: пусть $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_k}$ — области из M, $\partial D_{i_j} \cap D_{i_{j+1}} = e_{i_j+1}$ и D_{i_1}, D_{i_k} одного типа, то $D_{i_2}, \ldots, D_{i_{k-1}}$ должны быть областями левосторонними, если D_{i_1} второго типа, и правосторонними, если D_{i_1} первого типа, что невозможно.

Введём следующие обозначения: $\gamma' = \gamma_n \gamma_{n-1} \ldots \gamma_1$, $\delta' = \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$. Тогда возможен один из следующих случаев:

1) $\gamma = e_{n+1} \gamma' e_1$, $\delta = \delta'$;
2) $\gamma = e_{n+1} \gamma'$, $\delta = e_1 \delta'$;

3) $\gamma = \gamma' e_1$, $\delta = \delta' e_{n+1}$;
4) $\gamma = \gamma'$, $\delta = e_1 \delta' e_{n+1}$.

Рассмотрим случай, когда все области D_i диаграммы M являются левосторонними. Тогда для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$|\varphi(\gamma_i)| + |\varphi(e_{i+1})| = |\varphi(\delta_i)| + |\varphi(e_i)|.$$

Используя данное соотношение, получаем для меток однослойной диаграммы M соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} |\varphi(\gamma_i)| + |\varphi(e_{m+1})| = \sum_{i=1}^{m} |\varphi(\delta_i)| + |\varphi(e_1)|,$$

и, так как $\gamma = e_{n+1}\gamma'$, $\delta = e_1\delta'$, выводим, что $|\varphi(\gamma)| = |\varphi(\delta)|$, где $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v^{-1}$.

Если все области в M правосторонние, то для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$|\varphi(\gamma_i)| + |\varphi(e_i)| = |\varphi(\delta_i)| + |\varphi(e_{i+1})|.$$

Используя данные соотношения, получаем

$$|\varphi(e_1)| + \sum_{i=1}^{m} |\varphi(\gamma_i)| = \sum_{i=1}^{m} |\varphi(\delta_i)| + |\varphi(e_{m+1})|.$$

Отсюда следует, что $|\varphi(\gamma)| = |\varphi(\delta)|$.

Если D_i $(1 < i < m)$ — область первого типа, то для каждого j, $1 \leqslant j < i$, области D_j левосторонние, а для каждого s, $i < s \leqslant m$, области D_s правосторонние. Тогда имеет место следующая система соотношений:

$$\begin{array}{ll} \text{для каждого } j,\ 1 \leqslant j < i, & |\varphi(\gamma_j)| + |\varphi(e_{j+1})| = |\varphi(\delta_j)| + |\varphi(e_j)|, \\ & |\varphi(\gamma_i)| = |\varphi(e_i)| + |\varphi(\delta_i)| + |\varphi(e_{i+1})|, \\ \text{для каждого } s,\ i < s \leqslant m, & |\varphi(\gamma_s)| + |\varphi(e_s)| = |\varphi(\delta_s)| + |\varphi(e_{s+1})|. \end{array} \tag{5}$$

Используя данную систему соотношений для меток диаграммы M, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} |\varphi(\gamma_i)| = |\varphi(e_1)| + \sum_{i=1}^{m} |\varphi(\delta_i)| + |\varphi(e_{m+1})|, \tag{6}$$

т. е. $|\varphi(\gamma)| = |\varphi(\delta)|$.

Аналогично если M содержит область D_i, $1 < i < m$, второго типа, то для каждого j, $1 < j < i$, области D_j правосторонние, для каждого s, $i < s \leqslant m$, области D_s левосторонние. В данном случае имеет место система соотношений

$$\begin{array}{ll} \text{для каждого } j,\ 1 \leqslant j < i, & |\varphi(\gamma_j)| + |\varphi(e_j)| = |\varphi(\delta_j)| + |\varphi(e_{j+1})|, \\ & |\varphi(e_i)| + |\varphi(\gamma_i)| + |\varphi(e_{i+1})| = |\varphi(\delta_i)|, \\ \text{для каждого } s,\ i < s \leqslant m, & |\varphi(\gamma_s)| + |\varphi(e_{s+1})| = |\varphi(\delta_s)| + |\varphi(e_s)|, \end{array} \tag{7}$$

из которой следует, что

$$|\varphi(e_1)| + \sum_{i=1}^{m} |\varphi(\gamma_i)| + |\varphi(e_{m+1})| = \sum_{i=1}^{m} |\varphi(\delta_i)|, \tag{8}$$

т. е. $|\varphi(\gamma)| = |\varphi(\delta)|$.

Пусть M содержит p областей первого типа. В зависимости от типов самой левой и самой правой областей из последовательности областей первого и второго типов имеем, что областей второго типа $p-1$, либо p, либо $p+1$, причём любые две последовательные области из данного множества могут разделяться областями левосторонними или правосторонними. Теперь, чтобы доказать, что для данной диаграммы M имеем $|\varphi(\gamma)| = |\varphi(\delta)|$, разбиваем множество областей $\bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i$ диаграммы M на подмножества, каждое из которых содержит только по одной области первого или второго типов. Получаем поддиаграммы, для которых выписываем соответствующие им соотношения (5) или (7). Складывая отдельно их левые и правые части, получаем $|\varphi(\gamma)| = |\varphi(\delta)|$.

Действительно, пусть M будет разбито на поддиаграммы $I_1, I_2, \ldots, I_k$, причём I_1 содержит область первого типа, I_2 — второго типа и т. д., I_{k-1} — первого, I_k — второго. Пусть $I_j \cap I_{j+1} = e_{j+1}$, $j = \overline{i, k-1}$, $I_j = e_j \tilde{\gamma}_j e_{j+1} \tilde{\delta}_{j+1}$, $\tilde{\gamma}_j = I_j \cap \gamma$, $\tilde{\delta}_j = I_j \cap \delta$. Тогда метки поддиаграмм I_j связаны соотношениями (6) либо (8). В результате имеем следующую систему равенств:

$$\begin{aligned}
&|\varphi(\tilde{\gamma}_1)| = |\varphi(e_1)| + |\varphi(\tilde{\delta}_1)| + |\varphi(e_2)|;\\
&|\varphi(e_2)| + |\varphi(\tilde{\gamma}_2)| + |\varphi(e_3)| = |\varphi(\tilde{\delta}_2)|;\\
&\ldots\\
&|\varphi(\tilde{\gamma}_{k-1})| = |\varphi(e_{k-1})| + |\varphi(\tilde{\delta}_{k-1})| + |\varphi(e_k)|;\\
&|\varphi(e_k)| + |\varphi(\tilde{\gamma}_k)| + |\varphi(e_{k+1})| = |\varphi(\tilde{\delta}_k)|.
\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\sum_{i=1}^{k} |\varphi(\tilde{\gamma}_i)| + |\varphi(e_{k+1})| = |\varphi(e_1)| + \sum_{i=1}^{k} |\varphi(\tilde{\delta}_i)|,$$

т. е. $|\varphi(\gamma)| = |\varphi(\delta)|$. Другие возможные случаи рассматриваются аналогично.

Рассмотрим теперь случай, когда слову wv^{-1}, равному единице в группе Артина большого типа, соответствует многослойная диаграмма M над G, гомеоморфная кругу. Пусть M инвариантна относительно преобразований α), β). Тогда диаграмма M является диаграммой типа $C(6)$ [5]. Пусть $\gamma\delta$ — граничный цикл M, $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta)^{-1} = v$, w и v принадлежат полугруппе G^+. Пусть A и B — концевые точки путей γ, δ. Область $D \in M$ называется простой, если $\partial M \cap \partial D$ — связное множество, являющееся правильной частью граничного цикла ∂M [5].

Обозначим через $i(D)$ внутреннее число рёбер области D [5]. Простая область $D \in M$ называется деновской, если $i(D) \leqslant 2$.

Удаление внешней части деновской области называется деновским сокращением. Пусть D', D'' — области M, содержащие точки A, B соответственно.

Определение 1 [1]. Поддиаграмма Π диаграммы M, состоящая из простых областей $D_1, D_2, \ldots, D_m$, удовлетворяющая условиям

1) для каждого i, $1 \leqslant i < m$, $D_i \cap D_{i+1} = e_{i+1}$ — ребро,
2) $i(D_1) = i(D_m) = 3$,
3) для каждого i, $1 < i < m$, $i(D_i) = 4$, если $m > 2$,
4) $\partial\Pi \cap \partial M$ — правильная часть ограниченного цикла ∂M,

называется специальной.

Удаление границы $\partial\Pi \cap \partial M$ называется специальным $\bar{R}$-сокращением.

Теорема 3 [1]. *Если связная односвязная приведённая диаграмма M над G не содержит деновских областей, то она содержит минимум три непересекающиеся специальные полосы.*

Очевидно, что для диаграммы M с граничным циклом $\gamma\delta$, где $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)^{-1}$ принадлежат G^+, деновскими областями являются только области D', D'' с $i(D') \leqslant 2$, $i(D'') \leqslant 2$.

Пусть $i(D') = i(D'') = 2$. Обозначим через Γ поддиаграмму M, ограниченную областями D', D'', т. е. $M = D' \cup \Gamma \cup D''$. Тогда $\partial\Gamma \cap \gamma = \gamma'$, $\partial\Gamma \cap \delta = \delta'$; $\gamma = (\partial D' \cap \gamma) \cup \gamma' \cup (\partial D'' \cap \gamma)$, $\delta = (\partial D' \cap \delta) \cup \delta' \cup (\partial D'' \cap \delta)$.

Для связных однозначных приведённых диаграмм типа $C(6)$ справедлива формула

$$\sum_{M}^{*} \bigl(4 - i(D)\bigr) \geqslant 6, \tag{9}$$

где суммирование производится по граничным областям [1, 5].

В поддиаграмме Γ не содержится деновской области D, где $\partial D \cap \gamma' \neq \varnothing$, $i(D) \leqslant 2$. Аналогично вдоль границы δ' в Γ нет деновской области D', $i(D') \leqslant 2$. Однако из формулы (9) следует, что Γ содержит граничную область D с $i(D) = 3$.

Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_n$ — области Γ, граничащие с γ', и $D_1', D_2', \ldots, D_n'$ — области Γ, граничащие с δ'. Покажем, что в Γ вдоль γ' (δ') нельзя выделить полосу. Допустим противное, т. е. пусть существуют граничные области $D_i, D_{i+1}, \ldots, D_{i+k}$, где $1 \leqslant i < i+k \leqslant n$, для каждого j, $i < j < i+k$, $i(D_j) = 4$.

Можно легко убедиться, что

$$\varphi(\partial D_i) \setminus (\partial D_i \cap \gamma')^{-1} \in G^+,$$

т. е. делящие точки областей D_i, D_{i+k} являются концевыми вершинами соответственно $\partial D_i \cap \gamma'$, $\partial D_{i+k} \cap \gamma'$. Тогда получаем, что делящие точки областей D_j, $i < j < i+k$, совпадают с вершинами $\delta' \cap e_j$, $\gamma' \cap e_{j+1}$, что невозможно, так как области D_{i+k-1}, D_{i+1} имеют общую делящую точку.

Тем не менее среди областей, граничащих с γ' (δ'), может содержаться $k+1$ область с внутренней степенью 3 и k областей с внутренней степенью 5, причём первой должна быть область D с $i(D) = 3$, данные области должны чередоваться, их могут разделять области с внутренней степенью 4. Для областей D_j с $i(D_j) = 5$ делящие точки совпадают с концами S_j, где $\partial D_j = \gamma_j e_j S_j e_{j+1}$, $\gamma_j = \delta D_j \cap \gamma'$, $e_j = \partial D_{j-1} \cap \partial D_j$, $e_{j+1} = \partial D_j \cap \partial D_{j+1}$.

Если допустить, что делящая точка является внутренней точкой S_j, то, так как области D_j предшествует область D с $i(D) = 3$ и за ней следует область $\bar{D}$ с $i(\bar{D}) = 3$, области D_j и D, а также D_j и $\bar{D}$ могут быть разделены левосторонними либо правосторонними областями. Используя этот факт, можно легко убедиться, что данный случай невозможен.

Если $i(D_j) = 4$, то делящая точка также не может быть внутренней точкой S_j.

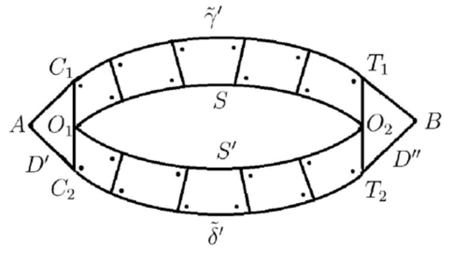
Граничные области D_s, расположенные слева от первой области D с $i(D) = 3$, являются левосторонними областями D_j с $i(D_j) = 4$, области D_j, расположенные справа от области D с $i(D) = 3$, являются правосторонними с $i(D_j) = 4$. Обозначим через K_γ поддиаграмму Γ, образованную областями $D_1, D_2, \ldots, D_n$, граничащими с γ. Тогда $\partial K_\gamma = \gamma' e_1 S e_{n+1}$, где $S = S_1 S_2 \ldots S_n$, $S_i = \partial D_i \setminus (e_{i+1}\gamma_i e_i)$.

Аналогично обозначим K_δ поддиаграмму из Γ, образованную областями $D'_1, D'_2, \ldots, D'_n$, $\partial K_\delta = \delta' e'_{n+1} S' e'_1$, где $S' = S'_n S'_{n-1} \ldots S'_1$, $S'_i = \partial D'_i \setminus (e'_i \delta_i e'_{i+1})$. Для области D' граничным циклом является $\partial D' = \gamma_0 \delta_0 e'_1 e_1$, для D'' — $\partial D'' = \gamma' e_{n+1} e'_{n+1} \delta'_0$.

В результате имеем, что $\varphi(S)^{-1}, \varphi(S'), \varphi(e_1 S e_{n+1})^{-1}, \varphi(e'_{n+1} S' e'_1) \in G^+$. Для областей D', D'' имеем, что $\varphi(e_1\gamma_0), \varphi(\delta_0 e'_1)^{-1} \in G^+$, вершины A и $O_1 = e_1 \cap e'_1$ являются разделяющими для D', $\varphi(\gamma'_0 e_{n+1}), \varphi(e'_{n+1}\delta_0)^{-1} \in G^+$, вершины B и $e'_{n+1} \cap e_{n+1} = O_2$ разделяющие в D''.

Доказательство равенства длин граничных меток $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ проведём по индукции, предполагая, что для диаграмм M над G с числом слоёв меньше m утверждение справедливо, т. е. если $\partial M = \gamma'\delta'$, где $\varphi(\gamma'), \varphi(\delta')^{-1} \in G^+$, то $|\varphi(\gamma')| = |\varphi(\delta')|$.

Пусть исходная диаграмма M с граничным циклом $\gamma\delta$, $\varphi(\gamma), \varphi(\delta)^{-1} \in G^+$, содержит m слоёв. Удалим её внешний слой, получим диаграмму M' с граничным циклом SS', $\varphi(S)^{-1}, \varphi(S') \in G^+$. Из индуктивного предположения следует, что $|\varphi(S)| = |\varphi(S')|$. По условию M является многослойной, гомеоморфной кругу: $M = D' \cup \Gamma \cup D''$. Пусть данная диаграмма имеет вид



Пусть $AC_1\tilde{\gamma}'T_2B = \gamma^{-1}$, $AC_2\tilde{\delta}'T_2 = \delta$.

Рассмотрим однослойную поддиаграмму $AC_2O_1SO_2T_2BT_1\tilde{\gamma}'C_1A$. Граничными метками данной поддиаграммы будут $\varphi(AC_2O_1SO_2T_2B)^{-1} \in G^+$, $\varphi(BT_1\tilde{\gamma}'C_1A) \in G^+$. Из их равенства в группе G следует, что

$$|\varphi(AC_2O_1SO_2T_2B)| = |\varphi(BT_1\tilde{\gamma}'C_1A)| = |\varphi(\gamma)|.$$

Перепишем левую часть данного равенства:

$$|\varphi(AC_2)| + |\varphi(C_2O_1)| + |\varphi(S)| + |\varphi(O_2T_2)| + |\varphi(T_2B)| = \\ = |\varphi(AC_2)| + (|\varphi(C_2O_1)| + |\varphi(S')| + |\varphi(O_2T_2)|) + |\varphi(T_2B)|. \quad (10)$$

Рассмотрим однослойную поддиаграмму $T_2O_2S'O_1C_2\tilde{\delta}'T_2$, в которой $\varphi(T_2O_2S'O_1C_2) \in G^+$, $\varphi(\tilde{\delta}')^{-1} \in G^+$, поэтому $|\varphi(T_2O_2S'O_1C_2)| = |\varphi(\tilde{\delta}')|$. Перепишем левую часть данного равенства:

$$|\varphi(T_2O_2S'O_1C_2)| = |\varphi(C_2O_1)| + |\varphi(S')| + |\varphi(O_2T_2)|. \quad (11)$$

Заменяя выражение в скобках в равенстве (10) на левую часть равенства (11), получаем

$$|\varphi(AC_2)| + (|\varphi(C_2O_1)| + |\varphi(S')| + |\varphi(O_2T_2)|) + |\varphi(T_2B)| = \\ = |\varphi(AC_2)| + |\varphi(\tilde{\delta}')| + |\varphi(T_2B)| = |\varphi(AC_2\tilde{\delta}'T_2B)| = |\varphi(\delta)|.$$

Таким образом, мы показали, что в диаграмме M $|\varphi(\gamma)| = |\varphi(\delta)|$. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Полугруппа Артина большого типа инъективно вложена в соответствующую группу Артина большого типа.*

Доказательство. Пусть $w, v \in G^+$, $w = v$ в группе G, и пусть M — связная, односвязная, приведённая диаграмма над G с граничным циклом $\gamma\delta$, где $\varphi(\gamma), \varphi(\delta)^{-1} \in G^+$. Тогда, как следует из рассмотренных выше случаев, в M содержится граничная область D, делящие точки которой совпадают с концами $\gamma' = \partial D \cap \gamma$, $\varphi(\gamma') \in G^+$, $\partial D = \gamma' e' S e''$. Тогда $\varphi(e'Se'')^{-1} \in G^+$, $\varphi(\gamma)', \varphi(e'Se'')^{-1} \in G^+_{ab}$, и так как группа G_{ab} является группой Артина конечного типа, то $\varphi(\gamma') = \varphi(e'Se'')^{-1}$ в полугруппе G^+_{ab}. Но тогда слово $\varphi(e'Se'')^{-1}$ можно получить из $\varphi(\gamma')$, применяя к нему соотношение полугруппы G^+_{ab}. Отсюда следует справедливость теоремы. □

Теорема 5. *Пусть G^+ — полугруппа экстрабольшого типа, соответствующая полугруппе Артина экстрабольшого типа. Тогда G^+ инъективно вложима в G.*

Доказательство теоремы 5 непосредственно следует из того факта, что связные односвязные приведённые диаграммы над группами Артина экстрабольшого типа являются однослойными.

Покажем разрешимость проблемы сопряжённости слов в полугруппах Артина большого (экстрабольшого) типа.

Определение 2. Будем говорить, что слова w, v, принадлежащие полугруппе G^+, сопряжены в G^+, если существует $z \in G^+$, такое что $zw = vz$ либо $wz = zv$.

Определение 3. Будем говорить, что в полугруппе G^+ разрешима проблема сопряжённости слов, если существует алгоритм, который для любых слов w, v, принадлежащих G^+, позволяет установить, существует ли $z \in G^+$, такое что $zw = vz$ либо $wz = zv$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Слова $w, v \in G^+$, где G^+ — полугруппа Артина большого (экстрабольшого) типа, сопряжены в G^+ тогда и только тогда, когда они сопряжены в группе Артина G, соответствующей полугруппе G^+.*

Доказательство. Пусть w и v сопряжены в G. Тогда существует кольцевая R-диаграмма в M над G с граничными циклами γ, δ, $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v^{-1}$.

Если M — однослойная кольцевая диаграмма, то в этом случае, очевидно, теорема справедлива.

Пусть M — многослойная кольцевая диаграмма сопряжённости слов w, v.

Докажем вначале теорему, когда G есть группа G_{ab}. В этом случае кольцевая диаграмма M является диаграммой типа $C(4)\&T(4)$.

Пусть M содержит n слоёв. Обозначим через K_i слой i с граничными циклами $\gamma^{(i)}$, $\delta^{(i)}$, при $i = 1$ $\gamma^{(1)} = \gamma$, $\delta^{(1)} = \gamma^{(2)}$, при $i = n$ $\gamma^{(n)} = \delta^{(n)}$, $\delta^{(n+1)} = \delta$.

Рассмотрим граничный слой K_1. Пусть данный слой образуют области $D_1, D_2, \ldots, D_m$, где $\partial D_i = \gamma_i e_i \delta_i^{(1)} e_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $e_{n+1} = e_1$; для любой области $D \subset M$ имеем $\|\varphi(D)\| = 2m_{ab}$. Определяем, как это делалось выше, делящие точки областей. Покажем, что для каждой области $D_j \in K_1$ делящая точка не является внутренней точкой отрезка $\delta_j^{(1)}$.

Пусть $i(D_j) = 4$ и делящая точка является внутренней точкой $\delta_j^{(1)}$, обозначим её v_j, и пусть точка $e_j \cap \gamma$ тоже делящая; v_j разбивает отрезок $\delta_j^{(1)}$ на отрезки $\delta_{j_1}^{(1)}, \delta_{j_2}^{(1)}, \ldots$. Тогда $\varphi\bigl(\delta_{j_2}^{(1)} e_{j+1} \gamma_j\bigr) \in G_{ab}^+$, $\varphi\bigl(e_j \delta_{j_1}^{(1)}\bigr)^{-1} \in G^+$. Делящими точками области D_{j+1} являются точки $e_{j+1} \cap \gamma$, $e_{j+2} \cap \delta^{(1)}$, поэтому $\varphi\bigl(e_{j+1} \delta_{j+1}^{(1)}\bigr)^{-1} \in G_{ab}^+$. Но тогда в точке $e_{i+1} \cap \delta^{(1)}$ имеет место свободное сокращение в слове $\varphi\bigl(\delta^{(1)}\bigr) \in G_{ab}$. Поэтому $\varphi\bigl(\delta^{(1)}\bigr)^{-1} \in G_{ab}^+$.

Заметим, что если слой K_i состоит из однонаправленных областей, то и K_{i+1} состоит из областей того же вида. Таким образом, легко видно, что в данном случае теорема справедлива.

Рассмотрим теперь случай, когда G — группа Артина с числом образующих $k > 2$.

Пусть M — n-слойная кольцевая R-диаграмма сопряжённости слов w, v над G. Пусть K_i — слой i в диаграмме M. Известно, что диаграмма M является диаграммой типа $C(6)$. Обозначим через $\gamma^{(i)}$, $\delta^{(i)}$ граничные циклы K_i. Покажем, что метки каждого цикла $\gamma^{(i)}$, $\delta^{(i)}$ являются словами, записанными в положительной или отрицательной системе образующих группы G.

Рассмотрим граничный слой K_1.

Пусть K_1 состоит из областей $D_1, D_2, \ldots, D_m$ (мы считаем, что диаграмма M является приведённой диаграммой), $\partial D_i = \gamma_i e_i \delta_i^{(1)} e_{i+1}$, $\gamma_i = \partial D_i \cap \gamma$, $\delta_i^{(1)} = \partial D_i \cap \delta^{(1)}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $e_1 = e_{n+1}$.

Заметим, что диаграмма M не содержит деновских областей и полос.

Пусть в области $D_j \in K_1$, $i(D_j) = 5$, делящая точка является внутренней точкой отрезка $\delta_j^{(1)}$ и разбивает $\delta_j^{(1)}$ на отрезки $\delta_{j_1}^{(1)}$, $\delta_{j_2}^{(1)}$, и пусть $\varphi\bigl(\delta_{j_2}^{(1)} e_{j+1}\gamma_j\bigr) \in G^+$, $\varphi\bigl(e_j \delta_{j_1}^{(1)}\bigr)^{-1} \in G^+$. С учётом того, что K_1 — кольцевая диаграмма, все области, предшествующие D_j, являются левосторонними, и так как для кольцевых диаграмм имеет место соотношение

$$\sum_M{}^{*}\bigl(4 - i(D)\bigr) \geqslant 0,$$

то вдоль границы γ

$$\sum_\gamma{}^{*}\bigl(4 - i(D)\bigr) < 0$$

а вдоль границы δ

$$\sum_\delta{}^{*}\bigl(4 - i(D)\bigr) > 0.$$

Поэтому в слое K_n содержится область D'_s с $i(D'_s) = 3$, где $\partial D'_s = \gamma_s^{(n)} e'_s \delta_s e'_{s+1}$, $\gamma_s^{(n)} = \partial D'_s \cap \gamma^{(n)}$, $\gamma^{(n)} = \delta^{(n)}$, $\delta_s = \partial D'_s \cap \delta$, $\|\varphi(\delta_s)\| = 3$ и $\varphi(\delta_s)^{-1} \in G^+$, $\varphi(e_{j+1}\gamma_s^{(n)} e_j)^{-1} \in G^+$, т. е. делящие точки областей D'_s совпадают с концами отрезка δ_s. Тогда согласно неравенству

$$\sum_\delta{}^{*}\bigl(4 - i(D)\bigr) > 0$$

K_n содержит область D'_r, $i(D'_r) = 3$, $\partial D'_r = \gamma_r^{(n)} e'_r \delta_r e'_{r+1}$, где $\|\varphi(\delta_r)\| = 3$, $\varphi(\delta_r)^{-1} \in G^+$, $\varphi\bigl(e_{r+1}\gamma_r^{(n)} e_r\bigr) \in G^+$, которая должна быть связана с областью D'_s областями одного вида, что невозможно.

Случай, когда

$$\sum_\delta{}^{*}\bigl(4 - i(D)\bigr) \geqslant 0,$$

невозможен.

Нетрудно убедиться в том, что области D_j с $i(D_j) = 4$ являются левосторонними или правосторонними. Поэтому $e\bigl(\delta^{(1)}\bigr)^{-1} \in G^+$. Отсюда следует, что для каждого слоя K_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, с граничными циклами $\gamma^{(i)}$, $\delta^{(i)}$ $\varphi(\gamma^i) \in G^+$, а $\varphi(\delta^i)^{-1} \in G^+$, либо наоборот. Используя структуру кольцевой диаграммы M можно легко убедиться в том, что существует $z \in G^+$, такое что $zw = vz$ либо $wz = zv$. Теорема доказана. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-41-710002 р_а.

Литература

[1] Безверхний В. Н. О нормализаторах элементов в группах $C(p)$ и $T(q)$ группах // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузов. сб. науч. тр. — Тула, 1994. — С. 4—58.

[2] Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщённой сопряжённости слов в группах Артина большого типа // Фундамент. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 1—38.

[3] Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Коксетера // Математика. — 1974. — Т. 18, № 6. — С. 56—79.

[4] Кассель К., Тураев В. Г. Группы кос. — М.: МЦНМО, 2014.

[5] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.

[6] Appel K., Schupp P. Artin groups and infinite Coxeter groups // Invent. Math. — 1983. — Vol. 72. — P. 201—220.