О массивных подмножествах в пространстве конечно порождённых групп диффеоморфизмов прямой и окружности в случае гладкости $C^{(1)}$

Л. А. БЕКЛАРЯН
Центральный экономико-математический институт РАН
e-mail: beklar@cemi.rssi.ru, lbeklaryan@outlook.com

УДК 512.544.43

Ключевые слова: группы диффеоморфизмов прямой и окружности, массивные подмножества.

Аннотация

Среди конечно порождённых групп диффеоморфизмов прямой и окружности выделяются группы, которые действуют свободно на орбите почти каждой точки прямой (окружности). Работа посвящена изучению структуры множества конечно порождённых групп диффеоморфизмов прямой и окружности, сохраняющих ориентацию, гладкости $C^{(1)}$ с заданным числом образующих и свойством, отмеченным выше. Показано, что такое множество содержит массивное подмножество (содержит счётное пересечение открытых всюду плотных подмножеств). Ранее такой результат был получен автором для конечно порождённых групп диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию, в случае гладкости $C^{(2)}$.

Abstract

L. A. Beklaryan, On massive subsets in the space of finitely generated groups of diffeomorphisms of the line and the circle in the case of $C^{(1)}$ smoothness, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 51—74.

Among the finitely generated groups of diffeomorphisms of the line and the circle, groups that act freely on the orbit of almost every point of the line (circle) are allocated. The paper is devoted to the study of the structure of the set of finitely generated groups of orientation-preserving diffeomorphisms of the line and the circle of $C^{(1)}$ smoothness with a given number of generators and the property noted above. It is shown that such a set contains a massive subset (contains a countable intersection of open everywhere dense subsets). Such a result for finitely generated groups of orientation-preserving diffeomorphisms of the circle, in the case of $C^{(2)}$ smoothness, was obtained by the author earlier.

Введение

При изучении различных задач геометрии, а также теории функционально-дифференциальных уравнений и задачи оптимального управления с дифференциальными связями в форме функционально-дифференциальных уравнений

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 4, с. 51—74.

возникают конечно порождённые группы диффеоморфизмов прямой (окружности), которые действуют свободно на орбите почти каждой точки прямой (окружности) [3, 5]. Важным достаточным условием для выполнения такого свойства является условие взаимной трансверсальности для элементов конечно порождённой группы диффеоморфизмов прямой (окружности). Статья посвящена исследованию условия взаимной трансверсальности элементов конечно порождённой группы диффеоморфизмов прямой и окружности (диффеоморфизмов прямой, являющихся накрытиями диффеоморфизмов окружности). Изучается степень общности такого условия.

В дальнейшем полную группу всех гомеоморфизмов прямой и окружности, сохраняющих ориентацию, будем обозначать через $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{X})$, $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{S}$ соответственно. Полную группу всех накрытий гомеоморфизмов единичной окружности, сохраняющих ориентацию, будем обозначать через $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$, т. е. для любого $q \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ справедливо тождество $q(t+1) = q(t) + 1$. Наряду с группой $Q = \langle q_1, \ldots, q_s \rangle$, где $Q \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ ($Q \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$), будем рассматривать расширенную группу $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \ldots, q_s, \hat{q} \rangle$, где $\hat{q}(t) = t + 1$. Очевидно, что в случае $Q \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ элемент $\hat{q}$ принадлежит центру группы $\mathcal{J}_Q$, т. е. перестановочен с любым элементом группы. Для циклической группы $Q = \langle q \rangle$ расширенную группу $\mathcal{J}_Q$ будем обозначать через $\mathcal{J}_q$.

Любому гомеоморфизму окружности $\bar{q} \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ мы можем поставить в соответствие гомеоморфизм прямой $q \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$, являющийся накрытием гомеоморфизма окружности $\bar{q}$. Такое соответствие не однозначное. Исследование свойств группы гомеоморфизмов окружности $\bar{Q} = \langle \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_s \rangle$, $\bar{Q} \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$, эквивалентно исследованию свойств соответствующей расширенной группы накрытий гомеоморфизмов окружности $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \ldots, q_s, \hat{q} \rangle$, где $Q = \langle q_1, \ldots, q_s \rangle$, $Q \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$.

Определение 1. Диффеоморфизмы $q_1, q_2 \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R})$ ($\mathrm{Diff}^1(\mathbb{S}^1)$), $q_1 \neq q_2$, прямой (окружности) называются взаимно трансверсальными, если из условия $q_1(t) = q_2(t)$, $t \in \mathbb{R}(\mathbb{S}^1)$, следует, что $\dot{q}_1(t) \neq \dot{q}_2(t)$.

Важное замечание состоит в том, что для группы $Q = \langle q_1, \ldots, q_s \rangle$ с образующими $q_j \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R})$ ($\mathrm{Diff}^1(\mathbb{S}^1)$), $j = 1, \ldots, s$, и взаимно трансверсальными элементами для любого $t \in \mathbb{R}(\mathbb{S}^1)$, за исключением счётного множества точек, группа Q действует свободно на орбите $Q(t)$. Отмеченное множество может быть построено следующим образом. В силу взаимной трансверсальности всякого элемента $q \in Q \setminus e$ и единичного элемента $e(t) \equiv t$ для любого $q \in Q \setminus e$ множество $\mathrm{Fix}\langle q \rangle = \{t \colon t \in \mathbb{R}\ (\mathbb{S}^1),\ q(t) = t\}$ будет не более чем счётно. Определим объединение орбит всех точек не более чем счётного множества

$$\bigcup_{q \in Q \setminus e} \mathrm{Fix}\langle q \rangle,$$

т. е. множество

$$\bigcup_{\bar{q} \in Q} \bar{q}\Bigl(\bigcup_{q \in Q \setminus e} \mathrm{Fix}\langle q \rangle\Bigr).$$

Полученное множество также не более чем счётно. Тогда для любой точки t из дополнения к этому множеству, т. е. для любого

$$t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\bar{q}\in Q} \bar{q}\Big(\bigcup_{q\in Q\setminus e} \mathrm{Fix}\langle q\rangle\Big) \quad \Big(t \in \mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_{\bar{q}\in Q} \bar{q}\Big(\bigcup_{q\in Q\setminus e} \mathrm{Fix}\langle q\rangle\Big)\Big)$$

группа Q будет действовать свободно на орбите $Q(t)$. В задачах, где возникла необходимость в таком свойстве, достаточно было, чтобы оно выполнялось для почти всех точек $t \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{S}^1$). В данном случае указано чуть более точное описание этого множества.

Определим важную топологическую характеристику группы $Q \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ ($\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$).

Определение 2. Пусть $Q \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ ($\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$). Непустое подмножество $\mathbb{R}$ ($\mathbb{S}^1$) называется *минимальным*, если оно замкнуто, Q-инвариантно и не содержит собственных замкнутых Q-инвариантных подмножеств.

Для произвольной группы $Q \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ ($\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$) и группы $Q \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с конечным числом образующих минимальное множество не пусто [2, теорема 3.6] и имеет одну из взаимоисключающих структур: является дискретным множеством (возможно, не единственным); является единственным совершенным нигде не плотным подмножеством $\mathbb{R}$ ($\mathbb{S}^1$) (гомеоморфно канторову множество); совпадает со всем $\mathbb{R}$ ($\mathbb{S}^1$). Объединение минимальных множеств для групп $Q \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ ($\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$), $Q \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, обозначаемое через $E(Q)$, является замкнутым множеством [2, теорема 3.7].

Хорошо известно, что в пространстве

$$\mathrm{Diff}^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$$

множество диффеоморфизмов q, для которых число сдвига $\tau(q)$ рациональное ($\tau(q) \in \mathbb{Q}$), а элементы расширенной коммутативной группы $\mathcal{J}_q = \langle q, \hat{q}\rangle$ взаимно трансверсальны и $\mathcal{J}_q^S \neq \langle e\rangle$, т. е. множество

$$\begin{aligned}\mathbb{P} = \{q\colon q \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1);\ \tau(q) \in \mathbb{Q};\\ \text{элементы расширенной группы } \mathcal{J}_q = \langle q, \hat{q}\rangle \text{ взаимно трансверсальны;}\\ \mathcal{J}_q^S \neq \langle e\rangle\},\end{aligned}$$

является открытым всюду плотным подмножеством. Диффеоморфизмы окружности, соответствующие таким диффеоморфизмам прямой, называются диффеоморфизмами с невырожденными циклами [1, гл. 3, § 11, разд. Ж]. В частности, из условия рациональности числа $\tau(q)$ следует, что минимальные множества расширенной группы $\mathcal{J}_q$ являются дискретными множествами. Из условия взаимной трансверсальности элементов расширенной группы $\mathcal{J}_q$ и условия $\mathcal{J}_q^S \neq \langle e\rangle$ следует, что число дискретных минимальных множеств конечное.

Если для $q \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ число сдвига иррациональное, то $\mathcal{J}_q^S = \langle e\rangle$. Более того, при дополнительном предположении $q \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ по теореме Данжуа [1, гл. 3, § 11, разд. З] минимальное множество расширенной группы $\mathcal{J}_q$ совпадает со всей прямой $\mathbb{R}$. Приведённые факты и лежали в основе доказательства анонсируемого результата для групп гомеоморфизмов окружности в случае диффеоморфизмов гладкости $C^{(2)}$ [4].

Доказательство результата в случае диффеоморфизмов окружности гладкости $C^{(1)}$ может быть построено на соответствующем утверждении из [4], полученном для диффеоморфизмов гладкости $C^{(2)}$, и свойстве плотности пространства диффеоморфизмов гладкости $C^{(2)}$ в пространстве диффеоморфизмов гладкости $C^{(1)}$. В схеме доказательства из [4] наиболее сложным является процедура аппроксимации группами диффеоморфизмов с взаимно трансверсальными элементами. Сама процедура аппроксимации имеет самостоятельный интерес при изучении групп диффеоморфизмов. Поэтому представляется целесообразным использование схемы доказательства из [4] с усовершенствованной (детализированной) процедурой аппроксимации. Доказательство для групп диффеоморфизмов прямой гладкости $C^{(1)}$ использует соответствующий результат для групп диффеоморфизмов окружности гладкости $C^{(1)}$, а также ряд конструкций, построенных для них.

1. Формулировка основных результатов

При каждом заданном $m = 1, 2, \ldots$ определим пространство Θ^m как прямое произведение

$$\Theta^m = \bigotimes_m [\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)].$$

Всякую группу $\langle q_1, \ldots, q_m \rangle$ с образующими $q_j \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$, $j = 1, \ldots, m$, будем рассматривать как элемент пространства Θ^m с естественной топологией равномерной сходимости на интервале $[0, 1]$.

Также при каждом заданном $m = 1, 2, \ldots$ определим пространство Ξ^m как прямое произведение

$$\Xi^m = \bigotimes_m \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}).$$

Всякую группу $\langle q_1, \ldots, q_m \rangle$ с образующими $q_j \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R})$, $j = 1, \ldots, m$, будем рассматривать как элемент пространства Ξ^m с естественной топологией компактной сходимости на $\mathbb{R}$. Теперь мы можем сформулировать основной результат, в котором приводится процедура определения массивного подмножества в пространстве диффеоморфизмов.

Теорема A. *Множество свободных групп диффеоморфизмов*

$$Q = \langle q_1, \ldots, q_s \rangle, \quad q_j \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1), \quad j = 1, \ldots, s,$$

с фиксированным числом s образующих, для которых элементы расширенной группы $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \ldots, q_s, \hat{q} \rangle$, $\hat{q} = t + 1$, взаимно трансверсальны, в метрике пространства $\bigotimes_s [\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)]$ является счётным пересечением открытых всюду плотных подмножеств (массивным множеством).

Переформулируем теорему A в терминах групп диффеоморфизмов окружности. Всякую группу $\langle g_1, \ldots, g_m \rangle$ с образующими $g_j \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{S}^1)$, $j = 1, \ldots, m$, будем рассматривать как элемент пространства $\bigotimes\limits_m \mathrm{Diff}^1(\mathbb{S}^1)$.

Теорема A*. *Множество свободных групп диффеоморфизмов*

$$G = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle, \quad g_j \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{S}^1), \quad j = 1, \ldots, s,$$

окружности с фиксированным числом s образующих, для которых элементы взаимно трансверсальны, в метрике пространства $\bigotimes\limits_s \mathrm{Diff}^1(\mathbb{S}^1)$ является счётным пересечением открытых всюду плотных подмножеств (массивным множеством).

Теорема B. *Множество свободных групп диффеоморфизмов*

$$Q = \langle q_1, \ldots, q_s \rangle, \quad q_j \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}), \quad j = 1, \ldots, s,$$

с фиксированным числом s образующих, для которых элементы группы Q взаимно трансверсальны, в метрике пространства $\bigotimes\limits_s \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R})$ является счётным пересечением открытых всюду плотных подмножеств (массивным множеством).

2. Доказательство основных результатов

Сформулируем несколько утверждений, прежде чем приступим к доказательству основных результатов.

Предложение 1. *Пусть $Q = \langle q_1, \ldots, q_m \rangle$ — группа с образующими из пространства $\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R})$. Элементы расширенной группы $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \ldots, q_s, \hat{q} \rangle$ взаимно трансверсальны тогда и только тогда, когда элементы канонического подмножества*

$$\mathcal{J}_Q^S = \{q\colon q \in \mathcal{J}_Q, \text{ найдётся } t \in \mathbb{R}, \text{ такой что } q(t) = t\}$$

трансверсальны единичному элементу e.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из определения взаимной трансверсальности двух диффеоморфизмов. $\square$

Для группы $Q = \langle q_1, \ldots, q_m \rangle$ с образующими из пространства $\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R})$ при каждом $k = 1, 2, \ldots$ определим каноническое подмножество

$$Q_\perp^k = \{q\colon q \in Q^k; \text{ элементы множества диффеоморфизмов } \{q, \langle \hat{q} \rangle\} \\ \text{взаимно трансверсальны}\},$$

где Q^k — слова в группе Q длины не более k. В терминах подмножеств $Q_\perp^k$, $k = 1, 2, \ldots$, мы также можем сформулировать критерий взаимной трансверсальности элементов расширенной группы $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \ldots, q_m, \hat{q} \rangle$.

Предложение 2. *Пусть $Q = \langle q_1, \ldots, q_m \rangle$ — группа с образующими из пространства $\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R})$. Элементы расширенной группы $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \ldots, q_m, \hat{q} \rangle$ являются взаимно трансверсальными тогда и только тогда, когда для любого $k = 1, 2, \ldots$ справедливо условие $Q^k = Q_\perp^k$.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из определения взаимной трансверсальности двух диффеоморфизмов. □

Определение 3. Пусть $Q = \langle q_1, \dots, q_m \rangle$ — группа с образующими из пространства $\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R})$. Группа $Q = \langle q_1, \dots, q_m \rangle$ называется k-свободной, если в группе Q не существует соотношений, длина которых меньше или равна $2k$ (это означает, что все элементы множества Q^k различны).

Сформулируем критерий того, что группа Q является свободной.

Предложение 3. *Группа $Q = \langle q_1, \dots, q_m \rangle$ является свободной тогда и только тогда, когда для любого $k = 1, 2, \dots$ она является k-свободной.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из определения k-свободности. □

2.1. Случай группы диффеоморфизмов прямой, являющихся накрытиями гомеоморфизмов окружности

Установим ряд утверждений для групп диффеоморфизмов прямой класса $C^{(1)}$, сохраняющих ориентацию и являющихся накрытиями гомеоморфизмов окружности. В пространстве Θ^m при каждом $k = 1, 2, \dots$ определим подмножество $W^m(k)$ следующим образом:

$$W^m(k) = \{Q \colon Q \in \Theta^m;\ Q^k = Q^k_\perp,\ Q^k \cap \langle \hat{q} \rangle = e,\ Q \text{ является } k\text{-свободной}\}.$$

Для таких подмножеств справедливо вложение

$$W^m(k+1) \subseteq W^m(k), \quad k = 1, 2, \dots.$$

Лемма 1. *Множества $W^m(k)$, $k = 1, 2, \dots$, являются открытыми множествами пространства Θ^m.*

Доказательство. Так как группа $Q \in W^m(k)$ является k-свободной, то при малом возмущении её образующих новых соотношений, длина которых меньше или равна $2k$, не возникают, а аналог условия $Q^k = Q^k_\perp$ и $q \notin \langle \hat{q} \rangle$ для возмущённой группы сохраняются. Следовательно, множества $W^m(k)$, $k = 1, 2, \dots$, являются открытыми в пространстве Θ^m. □

Рассмотрим $(p+1)$-свободную группу $Q \in W^m(p)$, $p \geqslant 1$. Элемент $q \in Q$ длины $p + 1$ имеет представление

$$q = q^{\varepsilon_{(p+1)}}_{i_{(p+1)}} \grave{q}, \quad \grave{q} = q^{\varepsilon_p}_{i_p} \dots q^{\varepsilon_1}_{i_1}, \quad i_j \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad j = 1, 2, \dots, (p+1).$$

Определим подмножества

$\Gamma_1(q) = \{t \colon q^{\varepsilon_1}_{i_1}(t) = t \,(\mathrm{mod}\ 1)\}$,

$\Gamma(q) = \{t \colon q^{\varepsilon_1}_{i_1}(t) \neq t \,(\mathrm{mod}\ 1)$ и

либо найдётся $r \in \{3, \dots, p\}$, для которого $q^{\varepsilon_r}_{i_r} \dots q^{\varepsilon_1}_{i_1}(t) = t \,(\mathrm{mod}\ 1)$, $q^{\varepsilon_r}_{i_r} = q^{-\varepsilon_1}_{i_1}$,

либо найдётся $r \in \{3, \dots, p\}$, для которого $q^{\varepsilon_r}_{i_r} \dots q^{\varepsilon_1}_{i_1}(t) = t \,(\mathrm{mod}\ 1)$, $q^{\varepsilon_{(r+1)}}_{i_{(r+1)}} = q^{\varepsilon_1}_{i_1}\}$.

Определённые таким образом множества могут оказаться и пустыми. Заметим, что подмножество $\Gamma(q)$ корректно определено для элементов q длины $p \geqslant 3$. В случае непустоты подмножества $\Gamma(q)$ в определении $\Gamma(q)$ приведённые два случая возможной структуры в представлении элемента q являются взаимоисключающими.

Утверждение 1. *Подмножества* $\Gamma_1(q)$, $\Gamma(q)$ *дискретные, замкнутые в* $\mathbb{R}$ *и дизъюнктные.*

Доказательство. Для $t \in \Gamma_1(q)$ имеет место условие $t \in \Delta(q_{i_1}^{\varepsilon_1})$. Так как $q_{i_1}^{\varepsilon_1} \in Q^p$, то такие точки t образуют дискретное и замкнутое в $\mathbb{R}$ подмножество. Следовательно, подмножество $\Gamma_1(q)$ дискретное и замкнутое в $\mathbb{R}$.

Пусть $t \in \Gamma(q)$ и существует $r \in \{3, \ldots, p\}$, для которого

$$q_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = t \,(\mathrm{mod}\ 1) \ \text{ и } \ q_{i_r}^{\varepsilon_r} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1}.$$

Так как $r \in \{3, \ldots, p\}$, то справедливо условие $q_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1} \in Q^p$. В таком случае из условия $q_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = t \,(\mathrm{mod}\ 1)$ следует, что такие точки t образуют дискретное и замкнутое в $\mathbb{R}$ подмножество. Так как r, удовлетворяющих условию $r \in \{3, \ldots, p\}$, конечное число, то множество таких точек t образуют дискретное и замкнутое в $\mathbb{R}$ подмножество.

Пусть $t \in \Gamma(q)$ и существует $r \in \{3, \ldots, p\}$, для которого

$$q_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = t \,(\mathrm{mod}\ 1) \ \text{ и } \ q_{i_{(r+1)}}^{\varepsilon_{(r+1)}} = q_{i_1}^{\varepsilon_1}.$$

Так как $q_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1} \in Q^p$, то из условия $q_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = t \,(\mathrm{mod}\ 1)$ следует, что такие точки t образуют дискретное и замкнутое в $\mathbb{R}$ подмножество. Так как r, удовлетворяющих условию $r \in \{3, \ldots, p\}$, конечное число, то множество таких точек t образуют дискретное и замкнутое в $\mathbb{R}$ подмножество.

Дизъюнктность подмножеств $\Gamma_1(q)$, $\Gamma(q)$ следует из их определения. Предложение доказано. $\square$

В случае непустого множества $\Gamma_1(q)$ для точки $t \in \Gamma_1(q)$ определим подмножества

$$\begin{aligned}
&N_{1q}(t) = \{r \colon r \in \{1, \ldots, p\},\ q_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = t \,(\mathrm{mod}\ 1)\},\\
&N_{1q}^{+}(t) = \{r \colon r \in N_{1q}(t),\ q_{i_r}^{\varepsilon_r} = q_{i_1}^{\varepsilon_1}\},\\
&N_{1q}^{-}(t) = \{r \colon r \in N_{1q}(t),\ q_{i_r}^{\varepsilon_r} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1}\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $N_{1q}(t) = N_{1q}^{+}(t) \cup N_{1q}^{-}(t)$ и всегда справедливо включение $1 \in N_{1q}^{+}(t)$. Поэтому множество $N_{1q}(t)$ не пусто. В случае пустого множества $\Gamma_1(q)$ множество $N_{1q}(t)$ также будем полагать пустым.

Также в случае непустого множества $\Gamma(q)$ для точки $t \in \Gamma(q)$ определим подмножества

$$\begin{aligned}
N_q(t) = \{r \colon r \in \{3, \ldots, p\},\ &q_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = t \,(\mathrm{mod}\ 1)\\
&\text{и либо } q_{i_r}^{\varepsilon_r} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1},\ \text{либо } q_{i_{(r+1)}}^{\varepsilon_{(r+1)}} = q_{i_1}^{\varepsilon_1}\},
\end{aligned}$$

$$N_q^+(t) = \{r\colon r \in N_q(t),\ q_{i_{(r+1)}}^{\varepsilon_{(r+1)}} = q_{i_1}^{\varepsilon_1}\},$$
$$N_q^-(t) = \{r\colon r \in N_q(t),\ q_{i_r}^{\varepsilon_r} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1}\}.$$

Очевидно, что $N_q(t) = N_q^+(t) \cup N_q^-(t)$ и множество $N_q(t)$ не пусто. В случае пустого множества $\Gamma(q)$ множество $N_q(t)$ также будем полагать пустым.

Утверждение 2. *Множества $N_q(t)$ и $N_{1q}(t)$ дизъюнктны.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из определений. □

Утверждение 3. *Для элемента $\tilde{q}$ как малого возмущения элемента q справедливо равенство $|\Gamma_1(q)| = |\Gamma_1(\tilde{q})|$. Для элементов q длины $p \geqslant 3$ справедливы оценки*

$$|\Gamma(q)| \leqslant |\Gamma(\tilde{q})|, \quad |\Gamma(\tilde{q})| \leqslant \sum_{t\in\Gamma(q)} |N_q(t)| + \sum_{t\in\Gamma_1(q)} |N_{1q}(t)|,$$

а также закон сохранения

$$\sum_{t\in\Gamma(q)} |N_q^{\pm}(t)| + \sum_{t\in\Gamma_1(q)} |N_{1q}^{\pm}(t)| = \sum_{\tilde{t}\in\Gamma(\tilde{q})} |N_{\tilde{q}}^{\pm}(t)| + \sum_{\tilde{t}\in\Gamma_1(\tilde{q})} |N_{1\tilde{q}}^{\pm}(t)|.$$

Более того, каждой точке $t \in \Gamma(q)$ и $r \in N_q(t)^{\pm}$ соответствует единственная точка $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ из малой окрестности точки t, для которой справедливо условие $r \in N_{\tilde{q}}(t)^{\pm}$. Каждой точке $t \in \Gamma_1(q)$ и $r \in N_{1q}(t)^{\pm}$ соответствует единственная точка $\tilde{t} \in \Gamma_1(\tilde{q}) \cup \Gamma(\tilde{q})$ из малой окрестности точки t, для которой справедливо условие $r \in N_{1\tilde{q}}(t)^{\pm} \cup N_{\tilde{q}}(t)^{\pm}$. Каждой точке $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ и $r \in N_{\tilde{q}}(\tilde{t})^{\pm}$ соответствует единственная точка $t \in \Gamma_{1q}(q) \cup \Gamma(q)$, для которой справедливо условие $r \in N_{1q}(t)^{\pm} \cup N_q(t)^{\pm}$. Каждой точке $\tilde{t} \in \Gamma_1(\tilde{q})$ и $r \in N_{1\tilde{q}}(\tilde{t})^{\pm}$ соответствует единственная точка $t \in \Gamma_{1q}(q)$, для которой справедливо условие $r \in N_{1q}(t)^{\pm}$.

Доказательство. В случае пустых множеств $\Gamma_1(q)$, $\Gamma(q)$ оценки очевидны. Пусть $t \in \Gamma_1(q)$. Для такой точки выполняется равенство $q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = t$. Так как $q_{i_1}^{\varepsilon_1} \in Q^p$, то для возмущения $\tilde{q} = \tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \tilde{q}_{i_p}^{\varepsilon_p} \ldots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ существует единственная точка $\tilde{t}$, близкая к точке t, для которой также справедливо условие $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) = \tilde{t} \pmod 1$. Следовательно, $\tilde{t} \in \Gamma_1(\tilde{q})$. В силу малости возмущения других точек с таким свойством не существует. Поэтому имеет место равенство $|\Gamma_1(q)| = |\Gamma_1(\tilde{q})|$. Более того, для любого $r \in N_{1q}(t)$ по определению выполняются соотношения $q_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = t \pmod 1$, $q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = t \pmod 1$, а также включение $q_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1} \in Q^p$. Тогда найдётся единственная точка $\breve{t}$, ближайшая к точке t, для которой также справедливо соотношение $\tilde{q}_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\breve{t}) = \breve{t} \pmod 1$. Если $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\breve{t}) = \breve{t} \pmod 1$, то в силу условия $q_{i_1}^{\varepsilon_1} \in Q^p$ выполнено равенство $\breve{t} = \tilde{t}$. Если $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\breve{t}) \neq \breve{t} \pmod 1$, то имеет место включение $\breve{t} \in \Gamma(\tilde{q})$, т. е. из точки $t \in \Gamma_1(q)$ возникает точка $\breve{t} \in \Gamma(\tilde{q})$.

Пусть $t \in \Gamma(q)$. Для такой точки выполнено условие $N_q(t) \neq \varnothing$. Пусть $r \in N_q(t)$. По определению выполняются соотношения $q_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = t \pmod 1$,

$q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) \neq t \,(\mathrm{mod}\ 1)$, а также включение $q_{i_r}^{\varepsilon_r} \dots q_{i_1}^{\varepsilon_1} \in Q^p$. Тогда найдётся единственная точка $\tilde{t}$, ближайшая к точке t, для которой также справедливы соотношения $\tilde{q}_{i_r}^{\varepsilon_r} \dots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) = \tilde{t} \,(\mathrm{mod}\ 1)$, $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) \neq \tilde{t} \,(\mathrm{mod}\ 1)$. Следовательно, $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$, т. е. из точки $t \in \Gamma(q)$ возникает точка $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$, для которой также справедливо условие $r \in N_{\tilde{q}}(\tilde{t})$. Вдобавок к этому по первому пункту новые точки $\breve{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ могут возникнуть и из точек $t \in \Gamma_1(q)$. Поэтому будет выполнено неравенство $|\Gamma(q)| \leqslant |\Gamma(\tilde{q})|$.

Согласно рассуждениям первого абзаца доказательства при каждом $t \in \Gamma_1(q)$ и значении $r \in N_{1q}^{\pm}(t)$ в малой окрестности точки t может возникнуть точка $\breve{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ также со свойством $r \in N_{\tilde{q}}^{\pm}(t)$. Во втором абзаце доказательства было показано, что при каждом $t \in \Gamma(q)$ и значении $r \in N_q^{\pm}(t)$ в малой окрестности точки t возникает точка $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ также со свойством $r \in N_{\tilde{q}}^{\pm}(\tilde{t})$. Более того, других точек $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$, кроме этих, не существует. Из этих замечаний и вытекают последняя оценка, закон сохранения, а также последующие высказывания из утверждения. Утверждение доказано. □

Утверждение 4. *Пусть для элемента q выполнено условие $\Gamma_1(q) \neq \varnothing$. Тогда элемент q сколь угодно малым возмущением $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ образующей $q_{i_1}^{\varepsilon_1}$ в окрестности дискретного, замкнутого в $\mathbb{R}$ подмножеста $\Gamma_1(q)$ может быть преобразован в элемент $\tilde{q}$, для которого при каждом $\tilde{t} \in \Gamma_1(\tilde{q})$ множество $N_{1\tilde{q}}(\tilde{t})$ имеет вид $\{1, \dots, \delta(\tilde{t}; \tilde{q})\}$ и, соответственно, $N_{1\tilde{q}}(\tilde{t}) = N_{1\tilde{q}}^{+}(\tilde{t})$.*

Доказательство. Рассмотрим точку $t \in \Gamma_1(q)$ и соответствующее множество $N_{1q}(t)$. Очевидно, что найдётся некоторое максимальное число $\delta(t; q) \in \{1, \dots, p\}$, такое что либо $\{1, \dots, \delta(t; q)\} = N_{1q}(t)$, либо одновременно выполняются условия $\{1, \dots, \delta(t; q)\} \neq N_{1q}(t)$, $(\delta(t; q) + 1) \notin N_{1q}(t)$. Заметим, что по определению для элемента q имеют место равенства $q_{i_j}^{\varepsilon_j} = q_{i_1}^{\varepsilon_1}$, $j = 1, \dots, \delta(t; q)$. Если $\{1, \dots, \delta(t; q)\} = N_{1q}(t)$ и, в частности, $\delta(t; q) = p$, то точка t удовлетворяет условию из утверждения.

Пусть $\{1, \dots, \delta(t; q)\} \neq N_{1q}(t)$, $\delta(t; q) + 1 \notin N_{1q}(t)$. Найдётся элемент $\sigma \in N_{1q}(t)$ со свойством

$$\{(\delta(t; q) + 1), \dots, (\sigma - 1)\} \cap N_{1q}(t) = \varnothing.$$

Очевидно, что для точки t выполняются условия

$$t \in \Delta\bigl(q_{i_\sigma}^{\varepsilon_\sigma} \dots q_{i_{\delta(t;q)}}^{\varepsilon_{\delta(t;q)}} \dots q_{i_1}^{\varepsilon_1}\bigr), \quad q_{i_\sigma}^{\varepsilon_\sigma} \dots q_{i_{\delta(t;q)}}^{\varepsilon_{\delta(t;q)}} \dots q_{i_1}^{\varepsilon_1} \in Q^p,$$
$$t \in \Delta\bigl(q_{i_{\delta(t;q)}}^{\varepsilon_{\delta(t;q)}} \dots q_{i_1}^{\varepsilon_1}\bigr), \quad q_{i_{\delta(t)}}^{\varepsilon_{\delta(t;q)}} \dots q_{i_1}^{\varepsilon_1} \in Q^p.$$

Поэтому по определению числа $\delta(t; q)$ и условию $t \in \Delta(q_{i_1}^{\varepsilon_1})$ будут справедливы также и условия

$$t \in \Delta\bigl(q_{i_{(\sigma-1)}}^{\varepsilon_{(\sigma-1)}} \dots q_{i_{(\delta(t;q)+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(t;q)+1)}}\bigr), \quad q_{i_{(\sigma-1)}}^{\varepsilon_{(\sigma-1)}} \dots q_{i_{(\delta(t;q)+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(t;q)+1)}} \in Q^p. \tag{1}$$

Возмущение $\tilde{q}$ имеет представление

$$\tilde{q} = \tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \dots \tilde{q}_{i_\sigma}^{\varepsilon_\sigma} \dots \tilde{q}_{i_{\delta(t;q)}}^{\varepsilon_{\delta(t;q)}} \dots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}, \tag{2}$$

в котором $\tilde{q}_{i_j}^{\varepsilon_j}=\tilde{q}_{i_1}^{\pm\varepsilon_1}$ в случае $q_{i_j}^{\varepsilon_j}=q_{i_1}^{\pm\varepsilon_1}$ и $\tilde{q}_{i_j}^{\varepsilon_j}=q_{i_j}^{\varepsilon_j}$ в случае $q_{i_j}^{\varepsilon_j}\neq q_{i_1}^{\pm\varepsilon_1}$, $j=1,\dots,p+1$. Будем полагать, что малое возмущение $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ отличается от $q_{i_1}^{\varepsilon_1}$ в малой окрестности точки t и удовлетворяет условию $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)\neq q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)$. Так как $t\in\Delta(q_{i_1}^{\varepsilon_1})$, $q_{i_1}^{\varepsilon_1}\in Q^p$, то в малой окрестности точки t, найдётся единственная точка $\tilde{t}$, для которой также справедливо условие $\tilde{t}\in\Delta(\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1})$ и $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\in Q^p$, т. е. имеет место включение $\tilde{t}\in\Gamma_1(\tilde{q})$ и точка $\tilde{t}$ является ближайшей к точке t. Так как по построению $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)\neq q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)$, то будет выполняться условие $\tilde{t}\neq t$. Для элемента $\tilde{q}$ и точки $\tilde{t}\in\Gamma_1(\tilde{q})$ по аналогии с элементом q определим число $\delta(\tilde{t};\tilde{q})$. По определению возмущения $\tilde{q}$ верно равенство $\delta(t;q)=\delta(\tilde{t};\tilde{q})$. Поэтому будут справедливы также и условия

$$\tilde{t}\in\Delta\big(\tilde{q}_{i_{\delta(t;q)}}^{\varepsilon_{\delta(t;q)}}\dots\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\big),\quad \tilde{q}_{i_{\delta(t;q)}}^{\varepsilon_{\delta(t;q)}}\dots\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\in Q^p.$$

Покажем, что для возмущения $\tilde{q}$ имеет место условие

$$\tilde{t}\notin\Delta\big(\tilde{q}_{i_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}\dots\tilde{q}_{i_{\delta(t;q)}}^{\varepsilon_{\delta(t;q)}}\dots\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\big),$$

т. е. для возмущения $\tilde{q}$ либо $\{1,\dots,\delta(t;q)\}=N_{1\tilde{q}}(\tilde{t})$, либо соответствующее число $\tilde{\sigma}\in N_{1\tilde{q}}(\tilde{t})$ удовлетворяет строгому неравенству $\tilde{\sigma}>\sigma$. Доказательство проведём от противного. Пусть $\tilde{t}\in\Delta\big(\tilde{q}_{i_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}\dots\tilde{q}_{i_{\delta(t;q)}}^{\varepsilon_{\delta(t;q)}}\dots\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\big)$. Тогда должны выполняться также условия

$$\tilde{t}\in\Delta\big(\tilde{q}_{i_{(\sigma-1)}}^{\varepsilon(\sigma-1)}\dots\tilde{q}_{i_{(\delta(t;q)+1)}}^{\varepsilon(\delta(t;q)+1)}\big),\quad \tilde{q}_{i_{(\sigma-1)}}^{\varepsilon(\sigma-1)}\dots\tilde{q}_{i_{(\delta(t;q)+1)}}^{\varepsilon(\delta(t;q)+1)}\in Q^p.$$

По построению

$$\big(\tilde{q}_{i_{(\sigma-1)}}^{\varepsilon(\sigma-1)}\dots\tilde{q}_{i_{(\delta(t;q)+1)}}^{\varepsilon(\delta(t;q)+1)}\big)(\tilde{t})=\big(q_{i_{(\sigma-1)}}^{\varepsilon(\sigma-1)}\dots q_{i_{(\delta(t;q)+1)}}^{\varepsilon(\delta(t;q)+1)}\big)(\tilde{t}).$$

Тогда справедливо также и условие

$$\tilde{t}\in\Delta\big(q_{i_{(\sigma-1)}}^{\varepsilon(\sigma-1)}\dots q_{i_{(\delta(t;q)+1)}}^{\varepsilon(\delta(t;q)+1)}\big).$$

Так как

$$q_{i_{(\sigma-1)}}^{\varepsilon(\sigma-1)}\dots q_{i_{(\delta(t;q)+1)}}^{\varepsilon(\delta(t;q)+1)}\in Q^p,$$

то в силу первого соотношения из (1) должно выполняться равенство $\tilde{t}=t$, чего не может быть.

Повторяя такую процедуру конечное число раз, мы получим, что элемент q сколь угодно малым возмущением $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ образующей $q_{i_1}^{\varepsilon_1}$ в окрестности точки $t\in\Gamma_1(q)$ дискретного, замкнутого в $\mathbb{R}$ подмножества $\Gamma_1(q)$ может быть преобразован в элемент $\tilde{q}$, для которого в точке $\tilde{t}\in\Gamma_1(\tilde{q})$, ближайшей к точке $t\in\Gamma_1(q)$, множество $N_{1\tilde{q}}(\tilde{t})$ имеет вид $\{1,\dots,\delta(\tilde{t};\tilde{q})\}$ и $\delta(\tilde{t};\tilde{q})=\delta(t;q)$. Очевидно, что для такого множества $N_{1\tilde{q}}(\tilde{t})$ имеет место равенство $N_{1\tilde{q}}(\tilde{t})=N_{1\tilde{q}}^{+}(\tilde{t})$. Следовательно, мы получили доказательство утверждения относительно точки $t\in\Gamma_1(q)$. Так как таких точек конечное число, то, проведя подобную процедуру для каждой точки, мы и получим доказательство утверждения. Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 5. *Пусть для элемента q выполнено условие $\Gamma_1(q) \neq \varnothing$ и при каждом $t \in \Gamma_1(q)$ множество $N_{1q}(t) = N_{1q}^{+}(t)$ имеет вид $\{1, \ldots, \delta(t;q)\}$. Тогда для малого возмущения $\tilde{q}$ элемента q при каждом $t \in \Gamma_1(q)$ существует единственная точка $\tilde{t} \in \Gamma_1(\tilde{q})$ из малой окрестности t, такая что для множества $N_{1\tilde{q}}(\tilde{t})$ также имеет место равенство $N_{1\tilde{q}}(\tilde{t}) = N_{1\tilde{q}}^{+}(\tilde{t})$ и оно имеет вид $\{1, \ldots, \delta(t;q)\}$, а закон сохранения из утверждения 3 принимает вид*

$$\sum_{t \in \Gamma(q)} |N_q^{\pm}(t)| = \sum_{\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})} |N_{\tilde{q}}^{\pm}(t)|. \tag{3}$$

Доказательство. Доказательство равенства $N_{1\tilde{q}}(\tilde{t}) = N_{1\tilde{q}}^{+}(\tilde{t})$ непосредственно следует из того, что для малого возмущения $\tilde{q}$ элемента q также справедливы условия

$$\tilde{q}_{i_{\delta(t;q)}}^{\varepsilon_{\delta(t;q)}} \ldots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1} \in Q^p, \quad \tilde{q}_{i_{\delta(t;q)}}^{\varepsilon_{\delta(t;q)}} \ldots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1} = \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}.$$

Тогда равенство (3) непосредственно следует из закона сохранения в утверждении 3. □

Утверждение 6. *Пусть для элемента q выполнено условие $\Gamma_1(q) \neq \varnothing$. Тогда элемент q сколь угодно малым возмущением $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ образующей $q_{i_1}^{\varepsilon_1}$ в окрестности дискретного, замкнутого в $\mathbb{R}$ подмножества $\Gamma_1(q)$ может быть преобразован в элемент $\tilde{q}$, для которого в каждой точке $\tilde{t} \in \Gamma_1(\tilde{q})$ элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{q}$ — возмущение из утверждения 4. Рассмотрим точку $\tilde{t} \in \Gamma_1(\tilde{q})$. Если $\tilde{t} \notin \Delta(\tilde{q})$, т. е. $\tilde{q}(\tilde{t}) \neq \tilde{t} \pmod 1$, то в такой точке $\tilde{t}$ элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$. Рассмотрим точку $\tilde{t} \in \Gamma_1(\tilde{q}) \cap \Delta(\tilde{q})$, т. е. точку $\tilde{t} \in \Gamma_1(\tilde{q})$, для которой выполняется равенство $\tilde{q}(\tilde{t}) = \tilde{t} \pmod 1$. По утверждению 4 имеет место равенство $N_{1\tilde{q}}(\tilde{t}) = \{1, \ldots, \delta(\tilde{t}; \tilde{q})\}$.

Пусть $\delta(\tilde{t}; \tilde{q}) = p$. Тогда элемент $\tilde{q}$ будет иметь представление

$$\tilde{q} = \tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1},$$

в котором $\tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} = \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ в случае $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} = q_{i_1}^{\varepsilon_1}$ и $\tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} = q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}}$ в случае $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \neq q_{i_1}^{\varepsilon_1}$. При этом случай $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1}$ нереализуемый. Так как $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) = \tilde{t} \pmod 1$, то несложно видеть, что

$$\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) = \dot{\tilde{q}}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}}(\tilde{t}) \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) \ldots \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}).$$

Если $\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) \neq 1$, то в точке $\tilde{t}$ элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$. Если $\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) = 1$, то с помощью малого изменения значения $\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})$ в возмущении $\tilde{q}$ можно добиться выполнения условия $\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) \neq 1$. Это означает, что в точке $\tilde{t}$ элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$.

Пусть $\delta(\tilde{t}; \tilde{q}) = p - 1$. Тогда элемент $\tilde{q}$ имеет представление (2) и принимает вид

$$\tilde{q} = \tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} q_{i_p}^{\varepsilon_p} \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1},$$

в котором $\tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} = \tilde{q}_{i_1}^{\pm\varepsilon_1}$ в случае $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} = q_{i_1}^{\pm\varepsilon_1}$ и $\tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} = q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)}$ в случае $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} \neq q_{i_1}^{\pm\varepsilon_1}$. Так как $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) = \tilde{t}\,(\mathrm{mod}\ 1)$, то несложно видеть, что

$$\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) = \dot{\tilde{q}}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)}\big(q_{i_p}^{\varepsilon_p}(\tilde{t})\big)\dot{q}_{i_p}^{\varepsilon_p}(\tilde{t})\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})\ldots\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}).$$

Если $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} = q_{i_1}^{\pm\varepsilon_1}$, то по условию $\tilde{t} \in \Delta(\tilde{q})$ $(\tilde{q}(\tilde{t}) = \tilde{t}\,(\mathrm{mod}\ 1))$ производная $\dot{\tilde{q}}(\tilde{t})$ примет вид

$$\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) = \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\pm\varepsilon_1}(\tilde{t})\dot{q}_{i_p}^{\varepsilon_p}(\tilde{t})\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})\ldots\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}).$$

В случае $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} \neq q_{i_1}^{-\varepsilon_1}$ с помощью малого изменения значения $\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})$ в возмущении $\tilde{q}$ можно добиться выполнения условия $\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) \neq 1$. Это означает, что в точке $\tilde{t}$ элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$. В случае $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1}$ производная $\dot{\tilde{q}}(\tilde{t})$ примет вид

$$\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) = \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{-\varepsilon_1}(\tilde{t})\dot{q}_{i_p}^{\varepsilon_p}(\tilde{t})\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})\ldots\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) = \dot{q}_{i_p}^{\varepsilon_p}(\tilde{t})\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})\ldots\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}),$$

где в окончательной формуле для значения производной $\dot{\tilde{q}}(\tilde{t})$ количество сомножителей $\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})$ равно $p-2$. Заметим, что в этом случае $\tilde{t} \in \Delta(\tilde{q}_{i_p}^{\varepsilon_p}\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\ldots\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1})$, где

$$\tilde{q}_{i_p}^{\varepsilon_p}\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\ldots\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1} = q_{i_p}^{\varepsilon_p}\tilde{q}_{i_{\delta(\tilde{t};\tilde{q})}}^{\varepsilon_{\delta(\tilde{t};\tilde{q})}}\ldots\tilde{q}_{i_2}^{\varepsilon_2}.$$

Так как $q_{i_p}^{\varepsilon_p}\tilde{q}_{i_{\delta(\tilde{t};\tilde{q})}}^{\varepsilon_{\delta(\tilde{t};\tilde{q})}}\ldots\tilde{q}_{i_2}^{\varepsilon_2} \in Q^p$, то $\dot{q}_{i_p}^{\varepsilon_p}(\tilde{t})\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})\ldots\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) \neq 1$ и, соответственно, $\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) \neq 1$. Следовательно, в точке $\tilde{t}$ элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$.

Пусть $\delta(\tilde{t};\tilde{q}) < p-1$. Тогда элемент $\tilde{q}$ имеет представление (2) и для него имеет место условие

$$\tilde{q}(\tilde{t}) = \big(\tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)}q_{i_p}^{\varepsilon_p}\ldots q_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\ldots\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\big)(\tilde{t}),$$

в котором $\tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} = \tilde{q}_{i_1}^{\pm\varepsilon_1}$ в случае $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} = q_{i_1}^{\pm\varepsilon_1}$ и $\tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} = q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)}$ в случае $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} \neq q_{i_1}^{\pm\varepsilon_1}$. Так как $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) = \tilde{t}\,(\mathrm{mod}\ 1)$, то несложно видеть, что

$$\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) = \frac{d}{dt}\big(\tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)}q_{i_p}^{\varepsilon_p}\ldots q_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}\big)(\tilde{t})\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})\ldots\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}).$$

Если $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} = q_{i_1}^{\pm\varepsilon_1}$, то по условию $\tilde{t} \in \Delta(\tilde{q})$ $(\tilde{q}(\tilde{t}) = \tilde{t}\,(\mathrm{mod}\ 1))$ производная $\dot{\tilde{q}}(\tilde{t})$ примет вид

$$\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) = \dot{\tilde{q}}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)}(\tilde{t})\frac{d}{dt}\big(q_{i_p}^{\varepsilon_p}\ldots q_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}\big)(\tilde{t})\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})\ldots\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}).$$

В случае $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} \neq q_{i_1}^{-\varepsilon_1}$ (возможно, $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon(p+1)} = q_{i_1}^{\varepsilon_1}$) с помощью малого изменения значения $\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})$ в возмущении $\tilde{q}$ можно добиться выполнения условия $\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) \neq 1$. Это означает, что в точке $\tilde{t}$ элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$.

В случае $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1}$ производная $\dot{\tilde{q}}(\tilde{t})$ примет вид

$$\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) = \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{-\varepsilon_1}(\tilde{t}) \frac{d}{dt}\big(q_{i_p}^{\varepsilon_p} \dots q_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}\big)(\tilde{t}) \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) \dots \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) = \\ = \frac{d}{dt}\big(q_{i_p}^{\varepsilon_p} \dots q_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}\big)(\tilde{t}) \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) \dots \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}),$$

где в окончательной формуле для значения производной $\dot{\tilde{q}}(\tilde{t})$ количество сомножителей $\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t})$ равно $\delta(\tilde{t};\tilde{q}) - 1$. Заметим, что в этом случае $\tilde{t} \in \Delta\big(\tilde{q}_{i_p}^{\varepsilon_p} \dots \tilde{q}_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}} \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\big)$. Более того,

$$\tilde{q}_{i_p}^{\varepsilon_p} \dots \tilde{q}_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}} \tilde{q}_{i_{\delta(\tilde{t};\tilde{q})}}^{\varepsilon_{\delta(\tilde{t};\tilde{q})}} \dots \tilde{q}_{i_2}^{\varepsilon_2} = \tilde{q}_{i_p}^{\varepsilon_p} \dots \tilde{q}_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}} \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1},$$

а в малой окрестности O точки $\tilde{t}$ имеет место равенство

$$\tilde{q}_{i_p}^{\varepsilon_p} \dots \tilde{q}_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}} \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\big|_O = q_{i_p}^{\varepsilon_p} \dots q_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}} \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\big|_O.$$

Поэтому $\tilde{t} \in \Delta\big(q_{i_p}^{\varepsilon_p} \dots q_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}} \tilde{q}_{i_{\delta(\tilde{t};\tilde{q})}}^{\varepsilon_{\delta(\tilde{t};\tilde{q})}} \dots \tilde{q}_{i_2}^{\varepsilon_2}\big)$. Так как

$$q_{i_p}^{\varepsilon_p} \dots q_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}} \tilde{q}_{i_{\delta(\tilde{t};\tilde{q})}}^{\varepsilon_{\delta(\tilde{t};\tilde{q})}} \dots \tilde{q}_{i_2}^{\varepsilon_2} \in Q^p,$$

то

$$\frac{d}{dt}\big(q_{i_p}^{\varepsilon_p} \dots q_{i_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}^{\varepsilon_{(\delta(\tilde{t};\tilde{q})+1)}}\big)(\tilde{t}) \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) \dots \dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\tilde{t}) \neq 1.$$

Следовательно, в точке $\tilde{t}$ элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$. Так как таких точек $\tilde{t} \in \Gamma_1(\tilde{q}) \cap \Delta(\tilde{q})$ конечное число, то, выбрав соответствующие сколь угодно малые возмущения в окрестностях этих точек, мы и получим доказательство утверждения. □

Утверждение 7. *Пусть для элемента q длины $p \geqslant 3$ выполнены высказывания утверждений 4 и 6, а также условие $\Gamma(q) \neq \varnothing$. Тогда элемент q сколь угодно малым возмущением $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ образующей $q_{i_1}^{\varepsilon_1}$ в окрестности дискретного, замкнутого в $\mathbb{R}$ подмножества $\Gamma(q)$ может быть преобразован в элемент $\tilde{q}$, для которого в каждой точке $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ либо $N_{\tilde{q}}^{+}(\tilde{t}) \neq \varnothing$ и $N_{\tilde{q}}^{-}(\tilde{t}) = \varnothing$, либо $N_{\tilde{q}}^{+}(\tilde{t}) = \varnothing$ и $N_{\tilde{q}}^{-}(\tilde{t}) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Рассмотрим точку $t \in \Gamma(q)$ и соответствующее множество $N_q(t)$. Очевидно, что $N_q(t) \neq \varnothing$. Напомним, что по определению для таких $N_q(t)$ справедлива оценка снизу $\min\{r\colon r \in N_q(t)\} \geqslant 3$.

Если для точки $t \in \Gamma(q)$ выполняется условие $N_q^{-}(t) = \varnothing$ (и, соответственно, $N_q^{+}(t) \neq \varnothing$) либо выполняется условие $N_q^{+}(t) = \varnothing$ (и, соответственно, $N_q^{-}(t) \neq \varnothing$), то утверждение относительно такой точки доказано.

Пусть $N_q^{-}(t) \neq \varnothing$. Для точки $t \in \Gamma(q)$ в случае $N_q^{-}(t) \neq \varnothing$ корректно определена величина

$$r(t,q) = \min\{r\colon r \in N_q^{-}(t)\},$$

для которой справедлива оценка $r(t,q) \geqslant 3$.

Покажем, что сколь угодно малым возмущением $\tilde{q}$ элемента q можно для любого $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ добиться выполнения условия, что для всякой точки $\tilde{t}$ со свойством $N_{\tilde{q}}^{-}(\tilde{t}) \neq \varnothing$ выполняется условие $(r(\tilde{t}, \tilde{q}), 1) \cap N_{\tilde{q}}^{+}(\tilde{t}) = \varnothing$.

Если $\bigl(1, r(t,q)\bigr) \cap N_q^{+}(t) = \varnothing$, то просто положим $\tilde{q} = q$. Пусть $\bigl(1, r(t,q)\bigr) \cap N_q(t)^{+} \neq \varnothing$. По определению числа $r(t,q)$ справедливо условие $\bigl(1, r(t,q)\bigr) \cap N_q^{-}(t) = \varnothing$. Положим

$$j^\star = \max\bigl\{r \colon r \in \bigl(1, r(t,q)\bigr) \cap N_q^{+}(t)\bigr\}.$$

Очевидно, что $j^\star \geqslant 3$, так как $\min\{r \colon r \in N_q(t)\} \geqslant 3$. С другой стороны, $j^\star < (r(t,q) - 1)$, иначе образующие $q_{i_{r(t,q)}}^{\varepsilon_{i_{r(t,q)}}}$ и $q_{i_{(j^\star+1)}}^{\varepsilon_{i_{(j^\star+1)}}}$ в элементе (слове) q взаимно уничтожаются. По определению множества $\Gamma(q)$ имеют место соотношения

$$\begin{gathered}
t \in \Delta\bigl(q_{i_{r(t,q)}}^{\varepsilon_{i_{r(t,q)}}} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\bigr), \quad t \in \Delta\bigl(q_{i_{j^\star}}^{\varepsilon_{i_{j^\star}}} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\bigr), \\
t \in \Delta\bigl(q_{i_{r(t,q)}}^{\varepsilon_{i_{r(t,q)}}} \ldots q_{i_{(j^\star+1)}}^{\varepsilon_{i_{(j^\star+1)}}}\bigr), \quad q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(t) \in \Delta\bigl(q_{i_{(r(t,q)-1)}}^{\varepsilon_{i_{(r(t,q)-1)}}} \ldots q_{i_{(j^\star+2)}}^{\varepsilon_{i_{(j^\star+2)}}}\bigr), \\
q_{i_{r(t,q)}}^{\varepsilon_{i_{r(t,q)}}} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} = q_{i_1}^{-\varepsilon_{i_1}} q_{i_{(r(t,q)-1)}}^{\varepsilon_{i_{(r(t,q)-1)}}} \ldots q_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}} q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}, \quad q_{i_{(j^\star+1)}}^{\varepsilon_{i_{(j^\star+1)}}} = q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}, \\
q_{i_{r(t,q)}}^{\varepsilon_{i_{r(t,q)}}} \ldots q_{i_{(j^\star+1)}}^{\varepsilon_{i_{(j^\star+1)}}} = q_{i_1}^{-\varepsilon_{i_1}} q_{i_{(r(t,q)-1)}}^{\varepsilon_{i_{(r(t,q)-1)}}} \ldots q_{i_{(j^\star+2)}}^{\varepsilon_{i_{(j^\star+2)}}} q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}.
\end{gathered} \tag{4}$$

Рассмотрим сколь угодно малое возмущение $\tilde{q}$ элемента q, полученного за счёт сколь угодно малого возмущения образующей $q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}$, удовлетворяющего единственному условию $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(t) \neq q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(t)$. Так как

$$q_{i_{r(t,q)}}^{\varepsilon_{i_{r(t,q)}}} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \in Q^p, \quad q_{i_{j^\star}}^{\varepsilon_{i_{j^\star}}} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \in Q^p,$$

то в малой окрестности точки t найдутся точки $\breve{t}, \tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ со свойствами

$$\breve{t} \in \Delta\bigl(\tilde{q}_{i_{r(t,q)}}^{\varepsilon_{i_{r(t,q)}}} \ldots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\bigr), \quad \tilde{t} \in \Delta\bigl(\tilde{q}_{i_{j^\star}}^{\varepsilon_{i_{j^\star}}} \ldots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\bigr), \tag{5}$$

т. е. точка t, для которой $r(t,q) \in N_q^{-}(t)$, $j^\star \in N_q^{+}(t)$, порождает точки $\breve{t}, \tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ со свойствами $r(t,q) \in N_{\breve{q}}^{-}(\breve{t})$, $j^\star \in N_{\tilde{q}}^{+}(\tilde{t})$. Так как по построению $\{1, \ldots, j^\star\} \cap N_q^{-}(t) = \varnothing$, то из условия $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(t) \neq q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(t)$ следует справедливость соотношения $t \neq \tilde{t}$.

Покажем, что $\tilde{t} \neq \breve{t}$. Докажем от противного. Предположим, что $\tilde{t} = \breve{t}$. Тогда должны выполняться соотношения

$$\tilde{t} \in \Delta\bigl(\tilde{q}_{i_{r(t,q)}}^{\varepsilon_{i_{r(t,q)}}} \ldots \tilde{q}_{i_{(j^\star+1)}}^{\varepsilon_{i_{(j^\star+1)}}}\bigr), \quad \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(\tilde{t}) \in \Delta\bigl(\tilde{q}_{i_{(r(t,q)-1)}}^{\varepsilon_{i_{(r(t,q)-1)}}} \ldots \tilde{q}_{i_{(j^\star+2)}}^{\varepsilon_{i_{(j^\star+2)}}}\bigr).$$

В малой окрестности O точки $q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(t)$ имеет место равенство

$$\tilde{q}_{i_{(r(t,q)-1)}}^{\varepsilon_{i_{(r(t,q)-1)}}} \ldots \tilde{q}_{i_{(j^\star+2)}}^{\varepsilon_{i_{(j^\star+2)}}}\big|_O = q_{i_{(r(t,q)-1)}}^{\varepsilon_{i_{(r(t,q)-1)}}} \ldots q_{i_{(j^\star+2)}}^{\varepsilon_{i_{(j^\star+2)}}}\big|_O.$$

Поэтому, учитывая четвёртое соотношение в (4), получаем равенство $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(\tilde{t}) = q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(t)$. Так как по построению $\{1, \ldots, j^\star\} \cap N_q^{-}(t) = \varnothing$, то из равенства

$\tilde q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(\tilde t) = q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(t)$ следует справедливость равенства $\big(\tilde q_{i_{j^\star}}^{\varepsilon_{i_{j^\star}}}\dots\tilde q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\big)(\tilde t) = t$. Учитывая второе соотношение из (5), получаем равенство $t=\tilde t$, что противоречит построению возмущения $\tilde q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}$, для которого имеет место условие $t\ne\tilde t$.

Таким образом, с помощью сколь угодно малого возмущения $\tilde q$ элемента q каждая точка $t\in\Gamma(q)$ со свойством

$$N_q^-(t)\ne\varnothing,\quad \big(1,r(t,q)\big)\cap N_q^+(t)\ne\varnothing$$

порождает точку $\tilde t\in\Gamma(\tilde q)$, для которой

$$r(t,q)=r(\tilde t,\tilde q),\quad \big|\big(1,r(\tilde t,\tilde q)\big)\cap N_{\tilde q}^+(\tilde t)\big| < \big|\big(1,r(t,q)\big)\cap N_q^+(t)\big|.$$

Учитывая оценки из утверждения 3 и применив подобную процедуру конечное число раз, получаем, что существует сколь угодно малое возмущение $\tilde q$ элемента q, что для каждой точки $\tilde t\in\Gamma(\tilde q)$ со свойством $N_{\tilde q}^-(\tilde t)\ne\varnothing$ справедливо условие

$$\big(1,r(\tilde t,\tilde q)\big)\cap N_{\tilde q}^+(\tilde t)=\varnothing. \tag{6}$$

В дальнейшем сколь угодно малое возмущение $\tilde q$ элемента q, такое что для каждой точки $\tilde t\in\Gamma(\tilde q)$ со свойством $N_{\tilde q}^-(\tilde t)\ne\varnothing$ выполняется условие (6), будем называть *возмущением первого типа*.

Не нарушая общности, мы можем считать, что для элемента q выполняются высказывания утверждений 4 и 6, а также для каждой точки $t\in\Gamma(q)$ со свойством $N_q^-(t)\ne\varnothing$ справедливо условие

$$\big(1,r(t,q)\big)\cap N_q^+(t)=\varnothing.$$

Покажем, что сколь угодно малым возмущением $\tilde q$ элемента q можно для любого $\tilde t\in\Gamma(\tilde q)$ добиться выполнения условия, что для всякой точки $\tilde t$ со свойством $N_{\tilde q}^-(\tilde t)\ne\varnothing$ выполняется соотношение $N_{\tilde q}^+(\tilde t)=\varnothing$, что и будет доказывать утверждение.

Пусть для точки $t\in\Gamma(q)$ выполняется условие $(r(t,q),p]\cap N_q^+(t)\ne\varnothing$. Положим

$$j_\star=\min\{r\colon r\in(r(t,q),p]\cap N_q^+(t)\},\quad l^\star=\max\{r\colon r\in(j_\star,r(t,q)]\cap N_q^-(t)\}.$$

По определению множества $\Gamma(q)$ имеют место соотношения

$$\begin{gathered} t\in\Delta(q_{i_{j_\star}}^{\varepsilon_{i_{j_\star}}}\dots q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}),\quad t\in\Delta(q_{i_{l^\star}}^{\varepsilon_{i_{l^\star}}}\dots q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}),\quad t\in\Delta(q_{i_{j_\star}}^{\varepsilon_{i_{j_\star}}}\dots q_{i_{(l^\star+1)}}^{\varepsilon_{i_{(l^\star+1)}}}),\\ q_{i_{(j_\star+1)}}^{\varepsilon_{i_{(j_\star+1)}}}=q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}},\quad q_{i_{l^\star}}^{\varepsilon_{i_{l^\star}}}=q_{i_1}^{-\varepsilon_{i_1}},\quad q_{i_{l^\star}}^{\varepsilon_{i_{l^\star}}}\dots q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}=q_{i_1}^{-\varepsilon_{i_1}}q_{i_{(l^\star-1)}}^{\varepsilon_{i_{(l^\star-1)}}}\dots q_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}}q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}. \end{gathered}\tag{7}$$

Рассмотрим сколь угодно малое возмущение $\tilde q$ элемента q, полученного за счёт сколь угодно малого возмущения образующей $q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}$, удовлетворяющего единственному условию $\tilde q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(t)\ne q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(t)$. Так как

$$q_{i_{j_\star}}^{\varepsilon_{i_{j_\star}}}\dots q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\in Q^p,\quad q_{i_{l^\star}}^{\varepsilon_{i_{l^\star}}}\dots q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\in Q^p,$$

то в малой окрестности точки t найдутся точки $\breve t,\tilde t\in\Gamma(\tilde q)$ со свойствами

$$\breve t\in\Delta\big(\tilde q_{i_{j_\star}}^{\varepsilon_{i_{j_\star}}}\dots\tilde q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\big),\quad \tilde t\in\Delta\big(\tilde q_{i_{l^\star}}^{\varepsilon_{i_{l^\star}}}\dots\tilde q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\big),$$

т. е. точка t, для которой $j_\star \in N_q^+(t)$, $l^\star \in N_q^-(t)$, порождает точки $\check{t}, \tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ со свойствами $j_\star \in N_{\tilde{q}}^+(\check{t})$, $l^\star \in N_{\tilde{q}}^-(\tilde{t})$. Так как по построению $\{1,\dots,l^\star\} \cap \cap N_q^+(t) = \varnothing$, то из условия $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(t) \neq q_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}(t)$ следует справедливость соотношения $t \neq \tilde{t}$.

Покажем, что $\tilde{t} \neq \check{t}$. Докажем от противного. Предположим, что $\tilde{t} = \check{t}$. Тогда должно выполняться соотношение

$$\tilde{t} \in \Delta\big(\tilde{q}_{i_{j^\star}}^{\varepsilon_{i_{j^\star}}} \dots \tilde{q}_{i_{(l^\star+1)}}^{\varepsilon_{i_{(l^\star+1)}}}\big).$$

По построению в малой окрестности O точки t имеет место равенство

$$\tilde{q}_{i_{j^\star}}^{\varepsilon_{i_{j^\star}}} \dots \tilde{q}_{i_{(l^\star+1)}}^{\varepsilon_{i_{(l^\star+1)}}}\big|_O = q_{i_{j^\star}}^{\varepsilon_{i_{j^\star}}} \dots q_{i_{(l^\star+1)}}^{\varepsilon_{i_{(l^\star+1)}}}\big|_O,$$

откуда согласно третьему соотношению в (7) и условию $\big(q_{i_{j^\star}}^{\varepsilon_{i_{j^\star}}} \dots q_{i_{(l^\star+1)}}^{\varepsilon_{i_{(l^\star+1)}}}\big) \in Q^p$ следует, что $\tilde{t} = t$, что противоречит построению возмущения $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}$, для которого имеет место условие $t \neq \tilde{t}$.

Таким образом, с помощью сколь угодно малого возмущения $\tilde{q}$ элемента q каждая точка $t \in \Gamma(q)$ со свойством

$$N_q^-(t) \neq \varnothing, \quad (r(t,q),p] \cap N_q^+(t) \neq \varnothing, \quad \big(1, r(t,q)\big) \cap N_q^+(t) = \varnothing \tag{8}$$

порождает точку $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$, для которой

$$N_{\tilde{q}}^-(\tilde{t}) \neq \varnothing, \quad \big(1, r(\tilde{t},\tilde{q})\big) \cap N_{\tilde{q}}^+(\tilde{t}) = \varnothing, \tag{9}$$

$$|(r(\tilde{t},\tilde{q}),p] \cap N_{\tilde{q}}^+(\tilde{t})| < |(r(t,q),p] \cap N_q^+(t)|. \tag{10}$$

Для других точек, порождённых точкой $t \in \Gamma(q)$, может быть нарушено какое-либо из условий (9), (10).

В дальнейшем для элемента q со свойствами (8) сколь угодно малое возмущение $\tilde{q}$, такое что порождается точка $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ со свойствами (9), (10), будем называть *возмущением второго типа*.

Конечное число раз применяя последовательно к элементу q вначале возмущение первого типа, а затем возмущение второго типа, получаем элемент, для которого справедливы формулировки утверждения. Утверждение доказано. □

Утверждение 8. *Пусть для элемента q длины $p \geqslant 3$ выполнены высказывания утверждений 4 и 6, условие $\Gamma(q) \neq \varnothing$, а также для каждой точки $t \in \Gamma(q)$ либо $N_q^+(t) \neq \varnothing$ и $N_q^-(t) = \varnothing$, либо $N_q^+(t) = \varnothing$ и $N_q^-(t) \neq \varnothing$. При достаточно малом возмущении $\tilde{q}$ элемента q в каждой точке $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ либо $N_{\tilde{q}}^+(\tilde{t}) \neq \varnothing$ и $N_{\tilde{q}}^-(\tilde{t}) = \varnothing$, либо $N_{\tilde{q}}^+(\tilde{t}) = \varnothing$ и $N_{\tilde{q}}^-(\tilde{t}) \neq \varnothing$. Более того, если $\tilde{q}$ получен из элемента q сколь угодно малым возмущением $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ образующей $q_{i_1}^{\varepsilon_1}$ в окрестности в точки $t \in \Gamma(q)$ с условием $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)$, то $t \in \Gamma(\tilde{q})$, справедливы условия $N_q^{\pm}(t) = N_{\tilde{q}}^{\pm}(t)$ и в окрестности точки t не существует других точек $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из определений соответствующих величин и закона сохранения из утверждения 5. □

Утверждение 9. *Пусть для элемента q длины $p \geqslant 3$ выполнены высказывания утверждений 4, 6 и 7, а также условие $\Gamma(q) \neq \varnothing$. Тогда элемент q сколь угодно малым возмущением $\tilde{q}^{\varepsilon_1}_{i_1}$ образующей $q^{\varepsilon_1}_{i_1}$ в окрестности дискретного, замкнутого в $\mathbb{R}$ подмножества $\Gamma(q)$ может быть преобразован в элемент $\tilde{q}$, для которого в каждой точке $\tilde{t} \in \Gamma(\tilde{q})$ элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$.*

Доказательство. Согласно утверждению 7 мы можем считать, что в каждой точке $t \in \Gamma(q)$ либо $N^+_q(t) \neq \varnothing$ и $N^-_q(t) = \varnothing$, либо $N^+_q(t) = \varnothing$ и $N^-_q(t) \neq \varnothing$. Элемент q имеет представление $q = q^{\varepsilon(p+1)}_{i_{(p+1)}} \dots q^{\varepsilon_1}_{i_1}$.

Пусть для $t \in \Gamma(q)$ имеет место условие $N^+_q(t) \neq \varnothing$. Если $t \notin \Delta(q)$, т. е. $q(t) \neq t \,(\mathrm{mod}\, 1)$, то в такой точке t элементы множества диффеоморфизмов $\{q, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $q \notin \langle\hat{q}\rangle$. Рассмотрим случай $q(t) = t \,(\mathrm{mod}\, 1)$. Если при этом $\dot{q}(t) \neq 1$, то в такой точке t элементы множества диффеоморфизмов $\{q, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $q \notin \langle\hat{q}\rangle$.

Предположим, что $\dot{q}(t) = 1$. Согласно определению множества $\Gamma(q)$ и условию $q(t) = t \,(\mathrm{mod}\ 1)$ справедливо условие $p \notin N^+_q(t)$. Образующие $q^{\varepsilon(j+1)}_{i_{(j+1)}}$ вида $q^{\varepsilon(j+1)}_{i_{(j+1)}} = q^{\varepsilon_1}_{i_1}$ и свойство $t \in \Delta(q^{\varepsilon_j}_{i_j} \dots q^{\varepsilon_1}_{i_1})$ одновременно возникают только при $j \in N^+_q(t)$. Ещё одна такая образующая $q^{\varepsilon_1}_{i_1}$ стоит на первом месте в представлении элемента q. В итоге количество таких образующих $q^{\varepsilon_1}_{i_1}$ равно $|N^+_q(t)| + 1$. Рассмотрим возмущение $\tilde{q}$ элемента q, полученного за счёт сколь угодно малого возмущения $\tilde{q}^{\varepsilon_1}_{i_1}$ образующей $q^{\varepsilon_1}_{i_1}$ в окрестности точки t, удовлетворяющее условию $\tilde{q}^{\varepsilon_1}_{i_1}(t) = q^{\varepsilon_1}_{i_1}(t)$. Очевидно, что для такого возмущения выполняется равенство $\tilde{q}(t) = q(t)$. По утверждению 8 имеет место равенство $N^+_q(t) = N^+_{\tilde{q}}(t)$. Производная $\dot{q}(t)$ как производная сложной функции будет гарантированно иметь $(|N^+_q(t)| + 1)$ сомножителей вида $\dot{\tilde{q}}^{\varepsilon_1}_{i_1}(t)$. В случае $q^{\varepsilon(p+1)}_{i_{(p+1)}} = q^{-\varepsilon_1}_{i_1}$ дополнительно возникает сомножитель $\dot{\tilde{q}}^{-\varepsilon_1}_{i_1}\big(q^{\varepsilon_1}_{i_1}(t)\big)$, который равен $\big(\dot{\tilde{q}}^{\varepsilon_1}_{i_1}(t)\big)^{-1}$. Так как $|N^+_q(t)| + 1 \geqslant 2$, то, положив $\dot{\tilde{q}}^{\varepsilon_1}_{i_1}(t) \neq \dot{q}^{\varepsilon_1}_{i_1}(t)$, получим условие $\dot{\tilde{q}}(t) \neq 1$, т. е. в точке t элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$.

Пусть для $t \in \Gamma(q)$ имеет место условие $N^-_q(t) \neq \varnothing$. Если $t \notin \Delta(q)$, т. е. $q(t) \neq t \,(\mathrm{mod}\, 1)$, то в такой точке t элементы множества диффеоморфизмов $\{q, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $q \notin \langle\hat{q}\rangle$. Рассмотрим случай $q(t) = t \,(\mathrm{mod}\, 1)$. Если при этом $\dot{q}(t) \neq 1$, то в такой точке t элементы множества диффеоморфизмов $\{q, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $q \notin \langle\hat{q}\rangle$.

Предположим, что $\dot{q}(t) = 1$. По определению множества $\Gamma(q)$ равенство $q^{\varepsilon(p+1)}_{i_{(p+1)}} = q^{\varepsilon_1}_{i_1}$ невозможно. Образующие $q^{\varepsilon_j}_{i_j}$ вида $q^{\varepsilon_j}_{i_j} = q^{-\varepsilon_1}_{i_1}$ и свойство $t \in \Delta(q^{\varepsilon_j}_{i_j} \dots q^{\varepsilon_1}_{i_1})$ одновременно возникают при $j \in N^-_q(t)$. Единственная образующая $q^{\varepsilon_j}_{i_j}$ вида $q^{\varepsilon_j}_{i_j} = q^{\varepsilon_1}_{i_1}$ стоит на первом месте в представлении элемента q. Рассмотрим возмущение $\tilde{q}$ элемента q, полученного за счёт сколь угодно малого возмущения $\tilde{q}^{\varepsilon_1}_{i_1}$ образующей $q^{\varepsilon_1}_{i_1}$ в окрестности точки t, удовлетворяющее условию $\tilde{q}^{\varepsilon_1}_{i_1}(t) = q^{\varepsilon_1}_{i_1}(t)$. Очевидно, что для такого возмущения выполняется равенство $\tilde{q}(t) = q(t)$. По утверждению 8 имеет место равенство $N_q^-(t) = N_{\tilde{q}}^-(t)$. Производная $\dot{q}(t)$ как производная сложной функции будет гарантированно иметь один сомножитель вида $\dot{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)$ и $|N_q^-(t)|$ сомножителей вида $\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{-\varepsilon_1}\big(q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)\big)$, равных $\big(\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)\big)^{-1}$.

Если $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1}$, то дополнительно возникает сомножитель $\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{-\varepsilon_1}\big(q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)\big)$, который равен $\big(\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)\big)^{-1}$. Так как $|N_q^-(t)| + 1 \geqslant 2$, то, положив $\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) \neq \dot{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)$, получим условие $\dot{\tilde{q}}(t) \neq 1$, т. е. в точке t элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$.

Если $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \neq q_{i_1}^{-\varepsilon_1}$, возможны два случая.

Случай 1, $|N_q^-(t)| > 1$. Положив $\dot{\tilde{q}}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) \neq \dot{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)$, получим условие $\dot{\tilde{q}}(t) \neq 1$, т. е. в точке t элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$.

Случай 2, $|N_q^-(t)| = 1$. Рассмотрим возмущение $\breve{q}$ элемента $\tilde{q}$, полученного за счёт сколь угодно малого возмущения $\breve{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ образующей $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ в окрестности точки t, удовлетворяющее условию $\breve{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) \neq \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)$. Множество $N_q^-(t)$ состоит из единственного натурального числа, которое обозначим через ν. Так как

$$\begin{gathered} t \in \Delta\big(\tilde{q}_{i_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\big), \quad \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) \in \Delta\big(\tilde{q}_{i_{(\nu-1)}}^{\varepsilon_{(\nu-1)}} \ldots \tilde{q}_{i_2}^{\varepsilon_2}\big), \\ \tilde{q}_{i_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1} \in Q^p, \quad \tilde{q}_{i_{(\nu-1)}}^{\varepsilon_{(\nu-1)}} \ldots \tilde{q}_{i_2}^{\varepsilon_2} \in Q^p, \end{gathered} \tag{11}$$

и в окрестности V точки $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)$ справедливо соотношение

$$\big(\breve{q}_{i_{(\nu-1)}}^{\varepsilon_{(\nu-1)}} \ldots \breve{q}_{i_2}^{\varepsilon_2}\big)\big|_V = \big(\tilde{q}_{i_{(\nu-1)}}^{\varepsilon_{(\nu-1)}} \ldots \tilde{q}_{i_2}^{\varepsilon_2}\big)\big|_V$$

то существует единственная точка $\breve{t}$ в окрестности точки t, для которой должны выполняться условия

$$\breve{t} \in \Delta\big(\breve{q}_{i_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots \breve{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\big), \quad \breve{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(\breve{t}) = \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t),$$

откуда следует, что $\breve{t} \neq t$. Так как $\tilde{q}(t) = t$, то из первого соотношения в (11) следует, что $t \in \Delta\big(\tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \ldots \tilde{q}_{i_{(\nu+1)}}^{\varepsilon_{(\nu+1)}}\big)$. Но в окрестности O точки t также выполняется соотношение

$$\big(\breve{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \ldots \breve{q}_{i_{(\nu+1)}}^{\varepsilon_{(\nu+1)}}\big)\big|_O = \big(\tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \ldots \tilde{q}_{i_{(\nu+1)}}^{\varepsilon_{(\nu+1)}}\big)\big|_O$$

и $\big(\tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \ldots \tilde{q}_{i_{(\nu+1)}}^{\varepsilon_{(\nu+1)}}\big) \in Q^p$. Поэтому $\breve{t} \notin \Delta\big(\breve{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \ldots \breve{q}_{i_{(\nu+1)}}^{\varepsilon_{(\nu+1)}}\big)$. Следовательно, $\breve{q}(\breve{t}) \neq \breve{t}$, т. е. в точке $\breve{t}$ элементы множества диффеоморфизмов $\{\breve{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\breve{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$. Утверждение доказано. □

Лемма 2. *Для $(p+1)$-свободной группы $Q \in W^m(p)$ любой элемент $q \in Q$ длины $p+1$ сколь угодно малым возмущением образующих может быть преобразован в элемент $\tilde{q}$, для которого элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$.*

Доказательство. Действительно, элемент $q \in Q$ длины $p+1$ имеет представление

$$q = q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \grave{q}, \quad \grave{q} = q_{i_p}^{\varepsilon_p} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1}, \quad i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad j = 1, 2, \ldots, p+1.$$

Так как $Q \in W^m(p)$, то элементы множества диффеоморфизмов $\{\grave{q}, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\grave{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$.

Для произвольного элемента $\bar{q} \in Q$ определим множество

$$\Delta(\bar{q}) = \{t \colon \bar{q}(t) = t \pmod 1\},$$

являющееся замкнутым множеством $\mathbb{R}$.

Если не существует точек $t \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}$, для которых выполняется соотношение $q(t) = \hat{q}^n(t)$ $(q(t) = t \pmod 1)$, т. е. $\Delta(q) = \varnothing$, то элементы множества диффеоморфизмов $\{q, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $q \notin \langle \hat{q} \rangle$, что и требовалось показать.

Остаётся рассмотреть случай, когда $\Delta(q) \neq \varnothing$. Согласно утверждениям 6 и 9 мы можем считать, что в каждой точке $t \in \Gamma_1(q) \cup \Gamma(q)$ элементы множества диффеоморфизмов $\{q, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $q \notin \langle \hat{q} \rangle$. В таком случае элементы множества диффеоморфизмов $\{q, \langle \hat{q} \rangle\}$ будут взаимно трансверсальны и $q \notin \langle \hat{q} \rangle$ также и в некоторой малой окрестности множества $\Gamma_1(q) \cup \Gamma(q)$, которую обозначим через W. Так как множество $\Gamma_1(q) \cup \Gamma(q)$ инвариантно относительно сдвига $\hat{q}(t) = t + 1$, то и окрестность вокруг неё можно выбрать инвариантной относительно сдвига. Пусть $\mathcal{F} = \mathbb{R} \setminus W$. Если $t \notin \mathcal{F} \cap \Delta(q)$, то в такой точке t элементы множества диффеоморфизмов $\{q, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $q \notin \langle \hat{q} \rangle$.

Рассмотрим множество $\mathcal{F} \cap \Delta(q)$. Если оно пустое, то высказывание леммы доказано. Пусть $\mathcal{F} \cap \Delta(q) \neq \varnothing$. В случае $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} = q_{i_1}^{-\varepsilon_1}$ для точки $t \in \mathcal{F} \cap \Delta(q)$ имеет место соотношение

$$\dot{q}(t) = \dot{q}_{i_1}^{-\varepsilon_1}\big(q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)\big)(q_{i_p}^{\varepsilon_p} \overset{\cdot}{\ldots} q_{i_2}^{\varepsilon_2})\big(q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)\big)\dot{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) = (q_{i_p}^{\varepsilon_p} \overset{\cdot}{\ldots} q_{i_2}^{\varepsilon_2})\big(q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)\big).$$

Так как $(q_{i_p}^{\varepsilon_p} \ldots q_{i_2}^{\varepsilon_2}) \in Q^p$, то $(q_{i_p}^{\varepsilon_p} \overset{\cdot}{\ldots} q_{i_2}^{\varepsilon_2})\big(q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t)\big) \neq 1$. Следовательно, $\dot{q}(t) \neq 1$ и в точке t, соответственно и в её малой окрестности, элементы множества диффеоморфизмов $\{q, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $q \notin \langle \hat{q} \rangle$. Так как это справедливо для произвольной точки $t \in \mathcal{F} \cap \Delta(q)$, то мы получим, что элементы множества диффеоморфизмов $\{q, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны в каждой точке $t \in \mathbb{R}$ и $q \notin \langle \hat{q} \rangle$, что и доказывает высказывание леммы.

Рассмотрим случай $q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \neq q_{i_1}^{-\varepsilon_1}$. Заметим, что множество $\Delta(q)$ также инвариантно относительно сдвига $\hat{g}$. Для всякой точки $t \in \mathcal{F} \cap \Delta(q) \cap [0, 1]$ найдётся окрестность V_t, такая что она дизъюнктна с каждым из множеств

$$q_{i_1}^{\varepsilon_1}(V_t),\ (q_{i_2}^{\varepsilon_2} q_{i_1}^{\varepsilon_1})(V_t), \ldots,\ (q_{i_p}^{\varepsilon_p} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1})(V_t). \tag{12}$$

Выберем конечное покрытие такими окрестностями компакта $\mathcal{F} \cap \Delta(q) \cap [0, 1]$. Не нарушая общности, будем полагать, что эти множества пронумерованы следующим образом: $V_{t_1}, \ldots, V_{t_n}$, $t_1 < \ldots < t_n$. Рассмотрим сколь угодно малое возмущение $\tilde{q}$ элемента q, полученное за счёт возмущения $\tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ образующей $q_{i_1}^{\varepsilon_1}$ в окрестности V_{t_1}. По свойству (12) будет выполняться соотношение

$$\left(\tilde{q}_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \dots \tilde{q}_{i_2}^{\varepsilon_2} \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\right)\Big|_{V_{t_1}} = \left(q_{i_{(p+1)}}^{\varepsilon_{(p+1)}} \dots q_{i_2}^{\varepsilon_2} \tilde{q}_{i_1}^{\varepsilon_1}\right)\Big|_{V_{t_1}}.$$

Поэтому за счёт выбора сколь угодно малого возмущения можем добиться, чтобы элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ были взаимно трансверсальны в каждой окрестности V_{t_1} и $\tilde{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$. Более того, элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ будут взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$ во всех точках множества $\mathbb{R} \setminus (V_{t_2} \cup \ldots \cup V_{t_n})$. Проведя такую процедуру n раз, мы получим сколь угодно малое возмущение $\breve{q}$ элемента q, для которого элементы множества диффеоморфизмов $\{\breve{q}, \langle\hat{q}\rangle\}$ взаимно трансверсальны в каждой точке $t \in \mathbb{R}$ и $\breve{q} \notin \langle\hat{q}\rangle$, что и доказывает лемму. $\square$

Лемма 3. *Открытые множества* $W^m(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *плотны в пространстве* Θ^m.

Доказательство. Доказательство проведём методом математической индукции.

1. Пусть $k = 1$. Множество

$$\{Q \colon Q \in \Theta^m;\ Q^1 = Q^1_\perp,\ Q^1 \cap \langle\hat{q}\rangle = e\} \tag{13}$$

является открытым подмножеством пространства Θ^m. Более того, оно будет всюду плотным в пространстве Θ^m.

Легко заметить, что для любой группы Q из множества (13) сколь угодно малым возмущением образующих можно добиться того, чтобы возмущённая группа стала 1-свободной. Это означает, что открытое множество $W^m(1)$ всюду плотно в множестве (13). Следовательно, открытое подмножество $W^m(1)$ будет всюду плотным также и в пространстве Θ^m.

2. Пусть для любого $k \leqslant p$ открытое множество $W^m(k)$ является плотным в пространстве Θ^m.

Для завершения доказательства нам следует показать, что открытое множество $W^m(p+1)$ также будет плотным в пространстве Θ^m. Учитывая вложение $W^m(p+1) \subseteq W^m(p)$, для этого достаточно установить, что $W^m(p+1)$ плотно в $W^m(p)$.

Выберем группу $Q \in W^m(p)$. Так как группа Q является p-свободной, то образующие группы Q можно сколь угодно мало возмутить так, что возмущённая группа будет принадлежать открытому множеству $W^m(p)$ и являться $(p+1)$-свободной.

Поэтому мы можем изначально полагать, что рассматриваемая группа $Q \in W^m(p)$, которую мы собираемся аппроксимировать группами из множества $W^m(p+1)$, является $(p+1)$-свободной. Заметим, что для группы $Q \in W^m(p)$ свойство быть $(p+1)$-свободной устойчиво относительно малого возмущения образующих.

Таким образом, нам следует показать, что $(p+1)$-свободная группа $Q \in W^m(p)$ может быть сколь угодно малым возмущением образующих преобразована в группу $\tilde{Q}$ со свойствами $\tilde{Q}^{(p+1)} = \tilde{Q}^{(p+1)}_{\perp}$, $\tilde{Q}^{(p+1)} \cap \langle \hat{q} \rangle = e$, что эквивалентно условию $\tilde{Q} \in W^m(p+1)$. Ввиду принадлежности $Q \in W^m(p)$ для группы Q выполняются условия $Q^p = Q^p_{\perp}$, $Q^p \cap \langle \hat{q} \rangle = e$, которые устойчивы относительно малого возмущения образующих. Поэтому остаётся показать, что любой элемент $q \in Q$ длины $p+1$ сколь угодно малым возмущением образующих может быть преобразован в элемент $\tilde{q}$, для которого элементы множества диффеоморфизмов $\{\tilde{q}, \langle \hat{q} \rangle\}$ взаимно трансверсальны и $\tilde{q} \notin \langle \hat{q} \rangle$. Но это следует из леммы 2. □

На основании полученных утверждений мы можем провести доказательство теоремы A.

Доказательство теоремы A. Доказательство проведём для произвольного пространства $\bigotimes_m [\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)]$, $m = 1, 2, \ldots$, и, соответственно, групп $Q = \langle q_1, \ldots, q_m \rangle$ из этого пространства. Согласно леммам 2 и 3 $W^m(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, являются открытыми всюду плотными подмножествами пространства Θ^m. Тогда согласно предложениям 2 и 3 пересечение

$$\mathbb{W}^m = \bigcap_{k=1}^{\infty} W^m(k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

и определяет массивное подмножество из теоремы A (если положить $m = s$). Теорема доказана. □

Теорема A*, сформулированная для группы диффеоморфизмов окружности, является очевидной переформулировкой теоремы A.

2.2. Случай группы диффеоморфизмов прямой

Используя теорему A, проведём доказательство теоремы B. Для этого определим некоторые конструкции и установим ряд утверждений.

Определение 4. Пусть $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Диффеоморфизмы прямой $q_1, q_2 \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R})$, $q_1 \neq q_2$, называются Δ-взаимно трансверсальными, если из условия $q_1(t) = q_2(t)$, $t \in \Delta$, следует, что $\dot{q}_1(t) \neq \dot{q}_2(t)$.

Пусть группа $Q = \langle q_1, \ldots, q_m \rangle$ является k-свободной. Очевидно, что каждый элемент $q \in Q$ имеет единственное представление

$$q = q_{i_l}^{\varepsilon_l} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1}, \quad i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad j = 1, 2, \ldots, l, \quad l \leqslant k. \tag{15}$$

Основываясь на представлении из (15) элементов k-свободной группы $Q = \langle q_1, \ldots, q_m \rangle$, для любого $q \in Q^k$ и любого $p = 1, 2, \ldots$ определим множества

$$\Delta_q^p = \{t \colon t \in [-p, p],\ q_{i_r}^{\varepsilon_r} \ldots q_{i_1}^{\varepsilon_1}(t) \in [-p, p],\ r = 1, \ldots, (l-1)\}.$$

Легко заметить, что для любого $q \in Q^k$ имеют место соотношения

$$\Delta_q^p \subseteq \Delta_q^{(p+1)}, \quad \bigcup_{p=1}^{\infty} \Delta_q^p = \mathbb{R}. \tag{16}$$

Определим множество

$$Q_{k\perp}^k = \{q\colon q \in Q^k;\ \text{диффеоморфизмы } q \text{ и } e \\ \text{являются } \Delta_q^k\text{-взаимно трансверсальными}\}.$$

Предложение 4. *Пусть $Q = \langle q_1, \dots, q_m \rangle$ — свободная группа с образующими из пространства $\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R})$. Элементы группы Q являются взаимно трансверсальными тогда и только тогда, когда для любого $k = 1, 2, \dots$ справедливо условие $Q^k = Q_{k\perp}^k$.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из определения взаимной трансверсальности двух диффеоморфизмов и соотношений (16). □

В пространстве Ξ^m, $m = 1, 2, \dots$, при каждом $k = 1, 2, \dots$ определим подмножество $V^m(k)$ следующим образом:

$$V^m(k) = \{Q\colon Q \in \Xi^m;\ Q \text{ является } k\text{-свободной},\ Q^k = Q_{k\perp}^k\}.$$

Для таких подмножеств справедливо вложение

$$V^m(k+1) \subseteq V^m(k), \quad k = 1, 2, \dots . \tag{17}$$

Лемма 4. *Множества $V^m(k)$, $k = 1, 2, \dots$, являются открытыми множествами пространства Ξ^m.*

Доказательство. Так как группа $Q \in V^m(k)$ является k-свободной, то при малом возмущении её образующих новые соотношения, длина которых меньше или равна $2k$, не возникают, а аналог условия $Q^k = Q_{k\perp}^k$ для возмущённой группы сохраняется. Следовательно, множества $V^m(k)$, $k = 1, 2, \dots$, являются открытыми в пространстве Ξ^m. □

При каждом заданном $m = 1, 2, \dots$ определим пространство Θ_k^m, $k = 1, 2, \dots$, в виде прямого произведения

$$\Theta_k^m = \bigotimes_m [\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}_k^1)],$$

где через $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}_k^1)$ обозначается группа всех гомеоморфизмов прямой, являющихся накрытиями окружности длины k. Всякую группу $\langle q_1, \dots, q_m \rangle$ с образующими $q_j \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}_k^1)$, $j = 1, \dots, m$, будем рассматривать как элемент пространства Θ_k^m с естественной топологией равномерной сходимости на интервале $[0, k]$. Очевидно, что множество Θ_1^m совпадает с Θ^m, определённым в начале статьи.

Лемма 5. *При каждом заданном $m = 1, 2, \ldots$ множество всех свободных групп $Q \in \Xi^m$ с взаимно трансверсальными элементами совпадает с множеством*

$$\mathbb{V}^m = \bigcap_{r=1}^{\infty} V^m(r).$$

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из определения множеств $V^m(r)$, $r = 1, 2, \ldots$. □

Лемма 6. *При каждом заданном $m = 1, 2, \ldots$ для всякой свободной группы $Q \in \Theta_k^m$, $k \in \mathbb{N}$, с взаимно трансверсальными элементами для расширенной группы $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \ldots, q_m, \hat{q} \rangle$, $\hat{q} = t + k$, справедливо включение*

$$Q \in \bigcap_{r=1}^{\infty} V^m(r).$$

Доказательство. Группа $Q \in \Theta_k^m$, $k \in \mathbb{N}$, с взаимно трансверсальными элементами для расширенной группы $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \ldots, q_m, \hat{q} \rangle$, $\hat{q} = t + k$, является группой с взаимно трансверсальными элементами, и доказательство следует из леммы 5. □

Лемма 7. *Для каждого заданного $m = 1, 2, \ldots$ элементы множества всех свободных групп $Q \in \Theta_k^m$, $k \in \mathbb{N}$, с взаимно трансверсальными элементами для расширенной группы $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \ldots, q_m, \hat{q} \rangle$, $\hat{q} = t + k$, всюду плотны в пространстве Ξ^m.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $Q \in \Xi^m$, $Q = \langle q_1, \ldots, q_m \rangle$. Для каждого $r = 1, 2, \ldots$ рассмотрим ограничение диффеоморфизмов q_j, $j = 1, \ldots, m$ на интервал $[0, r]$, т. е. $q_j|_{[0,r]}$, $j = 1, \ldots, m$. Ограничения $q_j|_{[0,r]}$, $j = 1, \ldots, m$, продолжим на всю прямую так, чтобы продолжения, обозначаемые через $\tilde{q}_j$, $j = 1, \ldots, m$, образовали группу $\tilde{Q} = \langle \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_m \rangle$, $\tilde{Q} \in \Theta_{(r+1)}^m$. Тогда $\mathbb{W}^m$ из (14) будет определять множество всех свободных групп $\check{Q} \in \Theta_{(r+1)}^m$ с взаимно трансверсальными элементами для расширенной группы $\mathcal{J}_{\check{Q}} = \langle \check{q}_1, \ldots, \check{q}_m, \hat{q} \rangle$, $\hat{q} = t + r + 1$. По теореме A такое множество всюду плотно в пространстве $\Theta_{(r+1)}^m$, и поэтому найдутся элементы $\check{Q} \in \Theta_{(r+1)}^m$, $\check{Q} = \langle \check{q}_1, \ldots, \check{q}_m \rangle$, для которых ограничения диффеоморфизмов $\check{q}_j|[0, r]$, $j = 1, \ldots, m$, будут сколь угодно близки к ограничениям диффеоморфизмов $q_j|_{[0,r]}$, $j = 1, \ldots, m$. Из этого и следует, что в топологии компактной сходимости на пространстве Ξ^m элементы множества всех свободных групп $Q \in \Theta_k^m$, $k \in \mathbb{N}$, с взаимно трансверсальными элементами для расширенной группы $\mathcal{J}_Q = \langle q_1, \ldots, q_m, \hat{q} \rangle$, $\hat{q} = t + k$, всюду плотны в пространстве Ξ^m. □

Доказательство теоремы B. Утверждение теоремы непосредственно следует из лемм 5—7 (следует всюду положить $m = s$). □

Автор признателен всем участникам семинара «Динамические системы и эргодическая теория» и его руководителям А. М. Стёпину и А. А. Давыдову за полезные советы и внимание к работе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00110.

Литература

[1] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

[2] Бекларян Л. А. Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты // Успехи матем. наук. — 2004. — Т. 59, № 4. — С. 3—68.

[3] Бекларян Л. А. Введение в теорию функционально-дифференциональных уравнений. Групповой подход. — М.: Факториал Пресс, 2007.

[4] Бекларян Л. А. О массивных подмножествах в пространстве конечно-порождённых групп диффеоморфизмов окружности // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 2. — С. 825—833.

[5] Beklaryan L. A. Group specialties in the problem of the maximum principle for systems with deviating argument // J. Dynam. Control Systems. — 2012. — Vol. 18, no. 3. — P. 419—432.