Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. VIII. Геометрические эквивалентности и особые классы алгебраических систем

Э. Ю. ДАНИЯРОВА
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: evelina.omsk@list.ru

А. Г. МЯСНИКОВ
Технологический институт Стивенса, США
e-mail: amiasnikov@gmail.com

В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru

УДК 510.67+512.71

Ключевые слова: универсальная алгебраическая геометрия, алгебраическая система, геометрическая эквивалентность, универсальная геометрическая эквивалентность, квазиэкваціональная эквивалентность, универсальная эквивалентность, элементарная эквивалентность, нётеровость по уравнениям, $\mathfrak{q}_\omega$-компактность, $\mathfrak{u}_\omega$-компактность, эквациональная область, эквациональная кообласть.

Аннотация

Статья продолжает цикл работ по алгебраической геометрии над произвольными алгебраическими системами. В ней исследуются семь эквивалентностей, а именно геометрическая, универсальная геометрическая, квазиэквациональная, универсальная, элементарная эквивалентность и их комбинации, в особых классах алгебраических систем (нётеровых по уравнениям, $\mathfrak{q}_\omega$-компактных, $\mathfrak{u}_\omega$-компактных, эквациональных областей, эквациональных кообластей и др.). Основные вопросы: 1) какие эквивалентности внутри данного класса $\mathbf{K}$ совпадают, какие разнятся? 2) относительно каких эквивалентностей данный класс $\mathbf{K}$ инвариантен, относительно каких нет?

Abstract

E. Yu. Daniyarova, A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, Algebraic geometry over algebraic structures. VIII. Geometric equivalences and special classes of algebraic structures, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 75—100.

This paper belongs to our series of works on algebraic geometry over arbitrary algebraic structures. In this one, there will be investigated seven equivalences (namely: geometrical, universal geometrical, quasi-equational, universal, elementary, and combinations thereof) in specific classes of algebraic structures (equationally Noetherian, $\mathfrak{q}_\omega$-compact, $\mathfrak{u}_\omega$-compact, equational domains, equational co-domains, etc.). The main questions are the following: (1) Which equivalences coincide inside a given class $\mathbf{K}$, which do not? (2) With respect to which equivalences a given class $\mathbf{K}$ is invariant, with respect to which it is not?

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 4, с. 75—100.

1. Введение

В работах нашего цикла статей по универсальной алгебраической геометрии [2—8, 12, 13] последовательно конструируется аппарат для исследования алгебраической геометрии над произвольной алгебраической системой $\mathcal{A}$ произвольной сигнатуры L. Одной из основных целей этого цикла статей является подготовка удобного базового инструмента для тех исследователей, которые работают или будут работать в направлении построения алгебраической геометрии над конкретными алгебраическими системами (конкретными группами, алгебрами, моноидами, кольцами, графами и т. д.). При этом важно выделить общие результаты, которые справедливы для произвольных алгебраических систем, и доказать их универсальными методами, не зависящими от специфики тех или иных алгебраических систем, т. е. методами теории моделей и универсальной алгебры. Также важно ограничить горизонт потенциально возможных универсальных результатов и отметить те утверждения, которые неверны в общем случае.

Поскольку спектр всевозможных алгебраических систем необъятно широк, мы выделяем несколько особых классов алгебраических систем, в которых справедлив тот или иной набор специфических результатов, существенно помогающих при построении алгебраической геометрии, но неверных в общем случае. В этот перечень входят следующие классы: нётеровых по уравнениям алгебраических систем $\mathbf{N}$, слабо нётеровых по уравнениям $\mathbf{N}'$, q_ω-компактных $\mathbf{Q}$, u_ω-компактных $\mathbf{U}$, (геометрически) слабо u_ω-компактных $\mathbf{U}'$ ($\mathbf{U}''$), эквациональных областей $\mathbf{D}$, эквациональных кообластей $\mathbf{D^c}$ и пересечения перечисленных классов. Выход за пределы этих классов можно назвать тупиковым направлением, поскольку по объективным причинам решение алгебро-геометрических задач в этом случае представляется малоперспективным.

Кроме исследования алгебраической геометрии над конкретной алгебраической системой $\mathcal{A}$, важно научиться сравнивать две различные алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одной сигнатуры L с точки зрения их алгебро-геометрических свойств. С этой целью Б. И. Плоткиным было введено понятие геометрической эквивалентности. Алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *геометрически эквивалентными*, если любая система уравнений от конечного числа переменных обладает над $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одинаковым набором следствий. Можно привести довольно большой и активно пополняющийся список работ, в той или иной степени посвящённых понятию геометрической эквивалентности и связанной с нею проблеме Плоткина в различных классических многообразиях алгебр, например [9, 11, 14—21]. Общим теоретико-модельным свойствам геометрической эквивалентности алгебраических систем произвольной сигнатуры посвящена статья [7] нашего цикла.

Отметим, что, несмотря на очевидную пользу и важность геометрической эквивалентности, по ряду причин можно утверждать, что она не в полной мере отражает алгебро-геометрическое родство алгебраических систем. Соответствующие аргументы изложены во введении статьи [8] нашего цикла, в которой мы предлагаем ввести альтернативное понятие, не исключающее геометрическую эквивалентность, а при необходимости дополняющее её, — понятие универсальной геометрической эквивалентности. Этому понятию целиком посвящена статья [8].

Геометрическая эквивалентность влечёт квазиэквациональную эквивалентность (равенство множеств истинных квазитождеств), а в некоторых классах они совпадают (например, в $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{Q}$). Аналогично универсальная геометрическая эквивалентность влечёт универсальную эквивалентность (совпадение универсальных теорий), они также совпадают в некоторых классах (например, в $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$). Кроме того, в [7, 8] введены ω-геометрическая и универсальная ω-геометрическая эквивалентности, которые всегда совпадают с квазиэквациональной и универсальной эквивалентностями соответственно и являются геометрическими аналогами для последних.

Остаётся ряд вопросов, которые не были раскрыты в предшествующих статьях по геометрическим эквивалентностям [7, 8]. Итак, у нас есть четыре геометрические эквивалентности, прибавим к ним ещё элементарную эквивалентность и некоторые комбинации этих эквивалентностей, и у нас есть несколько особых классов алгебраических систем. Необходимо выяснить: 1) какие из этих эквивалентностей совпадают в данном классе $\mathbf{K}$, а какие разнятся; 2) относительно каких эквивалентностей данный класс $\mathbf{K}$ инвариантен, относительно каких нет. К этим вопросам непосредственно примыкает и проблема Плоткина как в слабой, так и в сильной форме. Ответам на такого рода вопросы и посвящена данная статья. Исследуя эти вопросы, мы также поясняем и дополняем уже известную из предыдущих статей нашего цикла информацию об особых классах и их пересечениях. Вся итоговая информация относительно поставленных вопросов, найденные ответы, а также немногие нерешённые на этом пути вопросы аккумулированы в заключительном разделе статьи.

Отметим также, что эта работа самым тесным образом связана с предшествующими работами нашего цикла статей по универсальной алгебраической геометрии. Часто оказывается, что результаты здесь имеют простые и короткие доказательства по модулю уже доказанных утверждений из предыдущих статей цикла.

2. Предварительные сведения

В этом разделе мы напоминаем для удобства читателей базовые понятия и факты универсальной алгебраической геометрии, следуя [2, 4, 5, 7, 8, 12, 13]. В теоретико-модельных вопросах мы опираемся на [1].

Пусть L — язык исчисления предикатов первого порядка (или сигнатура). Отметим, что в [2, 4, 12, 13] мы всюду ограничивали себя функциональными языками (т. е. языками без предикатов). В [5] мы показываем, как все определения, конструкции и почти все результаты предыдущих работ переносятся на произвольный язык L (исключения здесь — несколько утверждений из [2]).

Далее по умолчанию для языка L нет ограничений. Через $\mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$ обозначим множество атомарных формул языка L от переменных из $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. *Уравнением* языка L называется любая атомарная формула из $\mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$; *системой уравнений* — любое подмножество $S \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$.

Зафиксируем алгебраическую систему $\mathcal{A} = \langle A; \mathrm{L}\rangle$ языка L. Множество

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \ \forall \varphi \in S\}$$

всех решений системы уравнений S в $\mathcal{A}$ называется *алгебраическим множеством* над $\mathcal{A}$, определённым системой уравнений S. Среди алгебраических множеств выделяют *неприводимые*, которые определяются топологически, при этом существует следующий критерий: непустое алгебраическое множество Y над $\mathcal{A}$ неприводимо в том и только том случае, когда его нельзя представить в виде конечного объединения собственных алгебраических над $\mathcal{A}$ подмножеств [4, лемма 3.35]; в противном случае Y *приводимо*. *Радикалом* алгебраического множества $Y = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S)$ или системы уравнений S называется совокупность всех следствий системы S:

$$\mathrm{Rad}(Y) = \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = \{\varphi \in \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X) \mid \mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \ \forall\, (a_1, \ldots, a_n) \in Y\}.$$

Две системы уравнений $S_1, S_2 \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$ называются *эквивалентными* над $\mathcal{A}$ ($S_1 \sim_{\mathcal{A}} S_2$), если $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_1) = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_2)$. *Координатной алгеброй* $\Gamma(Y)$ алгебраического множества $Y = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S)$ или координатной алгеброй $\Gamma_{\mathcal{A}}(S)$ системы уравнений S называется фактор-система термальной алгебраической L-системы $\mathcal{T}_{\mathrm{L}}(X)$ по обобщённой конгруэнции Горбунова—Туманова $\theta_{\mathrm{Rad}(Y)}$. Все подробности можно найти в [5]; понимание их не требуется для знакомства с данной статьёй.

В этой статье мы используем ряд операторов, переводящих класс алгебраических L-систем $\mathbf{K}$ в новый класс L-систем. Для удобства перечислим здесь все такие операторы:

$\mathbf{Pvar}(\mathbf{K})$ — наименьшее предмногообразие, содержащее $\mathbf{K}$;

$\mathbf{Qvar}(\mathbf{K})$ — наименьшее квазимногообразие, содержащее $\mathbf{K}$;

$\mathbf{Ucl}(\mathbf{K})$ — универсальное замыкание класса $\mathbf{K}$;

$\mathbf{Res}(\mathbf{K})$ — класс алгебраических систем, аппроксимируемых классом $\mathbf{K}$ (определение см. ниже);

$\mathbf{Dis}(\mathbf{K})$ — класс алгебраических систем, дискриминируемых классом $\mathbf{K}$ (определение см. ниже);

$\mathbf{K}_{\mathbf{e}}$ — присоединение к классу $\mathbf{K}$ тривиальной L-системы $\mathcal{E}$, $\mathbf{K}_{\mathbf{e}} = \mathbf{K} \cup \{\mathcal{E}\}$;

$\mathbf{K}_{\omega}$ — класс конечно порождённых алгебраических систем из $\mathbf{K}$.

Для любого класса $\mathbf{K}$ имеем:

$$\mathbf{Dis}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{Ucl}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{Qvar}(\mathbf{K}), \quad \mathbf{Dis}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{Res}(\mathbf{K}) = \mathbf{Pvar}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{Qvar}(\mathbf{K}).$$

Напомним определение аппроксимируемости и дискриминируемости в более краткой форме (определение в другой форме можно найти в [5]). Говорят, что алгебраическая система $\mathcal{C} = \langle C; \mathrm{L}\rangle$ *аппроксимируется* классом алгебраических

L-систем $\mathbf{K}$ (или алгебраической системой $\mathcal{A}$ при $\mathbf{K}=\{\mathcal{A}\}$), если для любого натурального числа $n\geqslant 1$, любой атомарной формулы $\varphi\in\mathrm{At}_{\mathrm{L}}(x_1,\ldots,x_n)$ и любых элементов $y_1,\ldots,y_n\in C$, таких что $\mathcal{C}\models\neg\varphi(y_1,\ldots,y_n)$, существуют такая $\mathcal{A}\in\mathbf{K}$ и такой гомоморфизм $h\colon\mathcal{C}\to\mathcal{A}$, что $\mathcal{A}\models\neg\varphi\big(h(y_1),\ldots,h(y_n)\big)$. Аналогично $\mathcal{C}$ *дискриминируется* классом $\mathbf{K}$ (или алгебраической системой $\mathcal{A}$ при $\mathbf{K}=\{\mathcal{A}\}$), если для любого натурального числа $n\geqslant 1$, любых атомарных формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_m\in\mathrm{At}_{\mathrm{L}}(x_1,\ldots,x_n)$ и любых элементов $y_1,\ldots,y_n\in C$ существуют такая $\mathcal{A}\in\mathbf{K}$ и такой гомоморфизм $h\colon\mathcal{C}\to\mathcal{A}$, что для каждого $i=1,\ldots,m$ справедлива импликация

$$\mathcal{C}\models\neg\varphi_i(y_1,\ldots,y_n)\longrightarrow\mathcal{A}\models\neg\varphi_i\big(h(y_1),\ldots,h(y_n)\big).$$

Существенным результатом для нас является то, что класс координатных алгебр алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ совпадает с $\mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega$, а класс координатных алгебр неприводимых алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ совпадает с $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_\omega$ [4].

Среди всех алгебраических систем мы выделяем несколько особых классов, в которых изучение алгебраической геометрии в большей или меньшей степени упрощается за счёт специфических свойств; к ним относятся классы следующих алгебраических систем:

нётеровых по уравнениям ($\mathbf{N}$) [4];
слабо нётеровых по уравнениям ($\mathbf{N}'$) [13];
q_ω-компактных ($\mathbf{Q}$) [13];
u_ω-компактных ($\mathbf{U}$) [13];
слабо u_ω-компактных ($\mathbf{U}'$) [13];
геометрически слабо u_ω-компактных ($\mathbf{U}''$) [13];
эквациональных областей ($\mathbf{D}$) [2];
эквациональных кообластей ($\mathbf{D^c}$) [2].

Приведём определения каких-то из перечисленных выше свойств, для других ограничимся некоторыми критериями. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *нётеровой по уравнениям*, если любая система уравнений S эквивалентна над $\mathcal{A}$ некоторой своей конечной подсистеме $S_0\subseteq S$. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *слабо нётеровой по уравнениям*, если любая система уравнений S эквивалентна над $\mathcal{A}$ некоторой конечной подсистеме $S_0\subseteq\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(S)$. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ является q_ω*-компактной* в том и только том случае, если $\mathbf{Pvar}(\mathcal{A})_\omega=\mathbf{Qvar}(\mathcal{A})_\omega$ [13, теорема 4.1]. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ является u_ω*-компактной* в том и только том случае, если $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_\omega=\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_\omega$ [13, теорема 4.2]. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ является *слабо* u_ω*-компактной* в том и только том случае, если $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_{\mathbf{e}}\cap\mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega=\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega\,\mathbf{e}}$ [13, предложение 5.12]. Далее неоднократно будем ссылаться на факт, что для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ существует u_ω-компактное элементарное расширение $\mathcal{A}\prec\mathcal{B}$ [13, теорема 7.4]. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *геометрически слабо* u_ω*-компактной*, если для любого конечного множества X, любой системы уравнений $S\subseteq\mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$ и любых уравнений

$s_1, \ldots, s_m \in \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$, таких что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(s_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(s_m)$ и $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S) \nsubseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(s_i)$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$, найдётся такая конечная подсистема $S_0 \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(S)$, что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_0) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(s_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(s_m)$. Соотношения между классами $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}'$ и $\mathbf{U}''$ выражаются следующим образом:

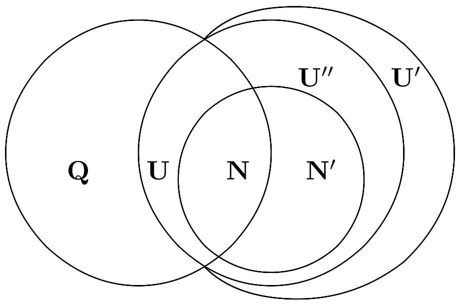
$$\mathbf{Q} \supseteq \mathbf{U} \supseteq \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}' \subseteq \mathbf{U}'' \subseteq \mathbf{U}'$$

и

$$\mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}'' \subseteq \mathbf{U}',$$

причём

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}' \cap \mathbf{Q} = \mathbf{N}' \cap \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{Q} \cap \mathbf{U}' = \mathbf{Q} \cap \mathbf{U}''.$$



Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *эквациональной областью*, если для любого конечного множества X и любых систем уравнений $S_1, \ldots, S_m \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$ множество $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_m)$ является алгебраическим над $\mathcal{A}$. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *эквациональной кообластью* в том случае, если никакое конечное собственное объединение алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ не является алгебраическим над $\mathcal{A}$, или, что эквивалентно, если любое непустое алгебраическое множество над $\mathcal{A}$ неприводимо, или, на языке координатных алгебр, $\mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega\,\mathbf{e}}$. Бесконечная декартова степень произвольной алгебраической системы является эквациональной кообластью [2, утверждение 3.5].

Понятиям геометрической эквивалентности и универсальной геометрической эквивалентности посвящены статьи [7,8]. Кратко напомним, что алгебраические L-системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *геометрически эквивалентными*, если для любого конечного множества X и любой системы уравнений $S \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$ имеет место равенство $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = \mathrm{Rad}_{\mathcal{B}}(S)$; геометрическая эквивалентность равносильна условию $\mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Res}(\mathcal{B})_\omega$. Если при геометрической эквивалентности потребовать, чтобы алгебраическое множество $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S)$ было неприводимо в том и только том случае, когда $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S)$ неприводимо, то получим *универсальную геометрическую эквивалентность*; она равносильна условию $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_\omega$. Если в определении геометрической эквивалентности наложить ограничение на мощность системы уравнений S, перебирая только конечные системы, получим определение *ω-геометрической эквивалентности*; такая эквивалентность равносильна условию $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B})$. Исходное определение *универсальной ω-геометрической эквивалентности* пропустим для краткости, напомнив лишь, что эта эквивалентность равносильна условию $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$. Множество других критериев для всех перечисленных геометрических эквивалентностей дано в [7,8], и мы будем ими пользоваться в данной работе. Кроме того, будем иметь в виду, что универсальная геометрическая эквивалентность влечёт геометрическую и универсальную ω-геометрическую, а ω-геометрическая эквивалентность следует из всех перечисленных эквивалентностей.

3. Универсальная геометрическая эквивалентность в особых классах

Во введении к статье [8] отмечалось, что есть ряд несостыковок между геометрически эквивалентными алгебраическими системами, причём все они имеют общий корень, суть которого в том, что среди классов $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{D^c}$ есть не инвариантные относительно геометрической эквивалентности (инвариантны только $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$ и $\mathbf{Q}$). Проиллюстрируем это на конкретных примерах и покажем, что при универсальной геометрической эквивалентности эти неприятности полностью устраняются.

Пример 3.0.1. Возьмём произвольную алгебраическую систему $\mathcal{A} \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{U}$ (такие существуют [22]). Имеем $\mathcal{A} \notin \mathbf{U}'$, ведь в противном случае $\mathcal{A} \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{U}' = \mathbf{U}$, что не так. Рассмотрим u_ω-компактное элементарное расширение $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, которое геометрически эквивалентно $\mathcal{A}$ в силу [7, лемма 10]. Геометрически и элементарно эквивалентные алгебраические системы $\mathcal{A} \notin \mathbf{U}'$ и $\mathcal{B} \in \mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}'' \subseteq \mathbf{U}'$ показывают, что классы $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$ не инвариантны относительно геометрической и элементарной эквивалентностей.

Пример 3.0.2. Пусть $\mathtt{L} = \{+, -, \cdot, 0\}$ — кольцевой язык и $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}; \mathtt{L} \rangle$. Алгебра $\mathcal{A}$ является нётеровой по уравнениям эквациональной областью [2]. Геометрически эквивалентная алгебре $\mathcal{A}$ алгебра $\mathcal{A}^2$ также нётерова по уравнениям, но она не удовлетворяет универсальному предложению

$$\forall\, x, y\ (x \cdot y = 0 \to x = 0 \vee y = 0)$$

(в частности, не является эквациональной областью), а значит, универсально $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^2$ не эквивалентны. Таким образом, класс $\mathbf{D}$ не инвариантен относительно геометрической эквивалентности, причём то же самое можно сказать про любой класс $\mathbf{D} \cap \mathbf{K}$, если $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{N}$.

Пример 3.0.3. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}; \mathtt{L} \rangle$ из примера 3.0.2 и её бесконечную декартову степень $\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически эквивалентны, причём $\mathcal{B} \in \mathbf{D^c} \cap \mathbf{N}$, в то время как $\mathcal{A} \notin \mathbf{D^c}$. Следовательно, класс $\mathbf{D^c}$ не инвариантен относительно геометрической эквивалентности, и то же самое верно для любого класса $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{K}$, такого что $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{N}$.

Утверждение 3.0.4. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — универсально геометрически эквивалентные алгебраические системы языка* L. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$\mathcal{A}$ нётерова по уравнениям тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ нётерова по уравнениям;*
2) *$\mathcal{A}$ слабо нётерова по уравнениям тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ слабо нётерова по уравнениям;*
3) *$\mathcal{A}$ q_ω-компактна тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ q_ω-компактна;*
4) *$\mathcal{A}$ u_ω-компактна тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ u_ω-компактна;*
5) *$\mathcal{A}$ слабо u_ω-компактна тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ слабо u_ω-компактна;*
6) *$\mathcal{A}$ геометрически слабо u_ω-компактна тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ геометрически слабо u_ω-компактна;*
7) *$\mathcal{A}$ является эквациональной областью тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ является эквациональной областью;*
8) *$\mathcal{A}$ является эквациональной кообластью тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ является эквациональной кообластью.*

Доказательство. Утверждения 1)—3) верны даже при геометрической эквивалентности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ [7, предложение 12]. Так как $\mathbf{U} = \mathbf{Q} \cap \mathbf{U}'$, то утверждение 4) следует из утверждений 3) и 5). Если $\mathcal{A} \in \mathbf{U}'$, то

$$\mathbf{Dis}(\mathcal{B})_{\omega\,\mathbf{e}} = \mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega\,\mathbf{e}} = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_{\,\mathbf{e}} \cap \mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})_{\,\mathbf{e}} \cap \mathbf{Res}(\mathcal{B})_\omega,$$

т. е. $\mathcal{B} \in \mathbf{U}'$, что доказывает утверждение 5). Утверждение 6) тривиально выводится из [8, предложение 2] и определения слабой геометрической u_ω-компактности.

Для доказательства утверждения 7) заметим, что алгебраическая система $\mathcal{A}$ является эквациональной областью тогда и только тогда, когда для любого конечного множества X и любых систем уравнений $S_1, S_2 \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$ найдётся такая система уравнений $S \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$, что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_2) = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S)$, поэтому достаточно снова воспользоваться [8, предложение 2].

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ является эквациональной кообластью тогда и только тогда, когда $\mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega\,\mathbf{e}}$. Таким образом, если $\mathcal{A}$ — эквациональная кообласть, то

$$\mathbf{Res}(\mathcal{B})_\omega = \mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega\,\mathbf{e}} = \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_{\omega\,\mathbf{e}},$$

тем самым $\mathcal{B}$ — эквациональная кообласть, и утверждение 8) доказано. □

3.1. Универсальная геометрическая эквивалентность в классах $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$

Пример 3.0.2 показывает, что универсальная геометрическая эквивалентность отличается от геометрической эквивалентности в классе нётеровых по уравнениям алгебраических систем $\mathbf{N}$, а значит, и во всех классах, включающих $\mathbf{N}$. В классах $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$ универсальная геометрическая эквивалентность совпадает с универсальной эквивалентностью [8, теоремы 21, 22]. Распространяется ли этот результат на классы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$?

Лемма 3.1.1. *Неверно, что в классах $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$ универсальная геометрическая эквивалентность совпадает с универсальной эквивалентностью.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{K}$ — один из классов $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$. Если в $\mathbf{K}$ понятия универсальной и универсальной геометрической эквивалентностей совпадают, то $\mathbf{K} = \mathbf{U}$ согласно [8, следствие 14]. Однако равенство $\mathbf{Q} = \mathbf{U}$ может нарушаться [22]. Точно так же если $\mathbf{U} = \mathbf{U}''$ или $\mathbf{U} = \mathbf{U}'$, то $\mathbf{N}' \subseteq \mathbf{U}$, откуда следует, что $\mathbf{N}' = \mathbf{N}$, что, вообще говоря, не так [22]. □

Тут же отметим, что в классах $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$ геометрическая эквивалентность совпадает с квазиэквациональной [7], но дальше этот результат не распространяется.

Лемма 3.1.2. *Неверно, что в классах $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$ геометрическая эквивалентность совпадает с квазиэквациональной эквивалентностью.*

Доказательство. Действительно, в противном случае согласно [7, следствие 14] получаем включение $\mathbf{U}'' \subseteq \mathbf{Q}$, откуда следует, что $\mathbf{N}' \subseteq \mathbf{Q}$, и тогда $\mathbf{N} = \mathbf{N}'$, но это не так [22]. □

Теперь охарактеризуем универсальную геометрическую эквивалентность в классах $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$.

Предложение 3.1.3. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — слабо u_ω-компактные алгебраические системы языка* L. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны*;
2) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически и универсально ω-геометрически эквивалентны*;
3) *$\mathbf{Pvar}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Pvar}(\mathcal{B})_\omega$ и $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$.*

Доказательство. То, что условие 1) влечёт условия 2) и 3), а также эквивалентность последних двух между собой справедливо для произвольных алгебраических систем [7, 8]. Проверим, что условие 3) влечёт условие 1). Имеем

$$\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega\,\mathbf{e}} = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_{\,\mathbf{e}} \cap \mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})_{\,\mathbf{e}} \cap \mathbf{Res}(\mathcal{B})_\omega = \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_{\omega\,\mathbf{e}}.$$

Условие $\mathcal{E} \in \mathbf{Dis}(\mathcal{A})$ равносильно тому, что $\mathcal{A}$ содержит тривиальную подсистему $\mathcal{E}$, но поскольку геометрически эквивалентные алгебраические системы одновременно содержат или не содержат $\mathcal{E}$ [7, лемма 5], получаем равенство $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_\omega$, что равносильно универсальной геометрической эквивалентности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. □

Замечание 3.1.4. Критерий универсальной геометрической эквивалентности, который даёт предложение 3.1.3 для классов $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$, вообще говоря, неверен в классе $\mathbf{Q}$. Действительно, равенство $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$ влечёт равенство $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B})$, которое в классе $\mathbf{Q}$ равносильно равенству $\mathbf{Pvar}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Pvar}(\mathcal{B})_\omega$. Далее по лемме 3.1.1 получаем требуемое.

Из [7, теорема 23] получаем следующий критерий универсальной геометрической эквивалентности в классе $\mathbf{Q}$.

Предложение 3.1.5. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — q_ω-компактные алгебраические системы языка* $\mathtt{L}$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны*;
2) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ω-геометрически эквивалентны, причём для любого конечного множества X и любой системы уравнений $S \subseteq \mathrm{At}_{\mathtt{L}}(X)$ алгебраическое множество $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S)$ неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S)$.*

Замечание 3.1.6. Критерий универсальной геометрической эквивалентности, который даёт предложение 3.1.5 для класса $\mathbf{Q}$, верен и в классе $\mathbf{N}'$, причём в более сильной форме [8, теорема 22], однако он неверен в классах $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$, что показывает следующий пример.

Пример 3.1.7. Рассмотрим язык $\mathtt{L} = \{P_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, состоящий из одноместных предикатов, множество $A = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ и алгебраическую систему $\mathcal{A} = \langle A; \mathtt{L}\rangle$ со следующей интерпретацией: $\mathcal{A} \models P_0(x) \iff x = 0$; $\mathcal{A} \models P_k(x) \iff -1/k < x < 1/k$, $k > 0$. Нетрудно убедиться в том, что $\mathcal{A} \in \mathbf{N}' \setminus \mathbf{N}$. Кроме того, все алгебраические множества над $\mathcal{A}$ неприводимы, пустых нет, поэтому $\mathcal{A} \in \mathbf{D^c}$. Пусть $\mathcal{B}$ — u_ω-компактное элементарное расширение для $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{B} \in \mathbf{U} \setminus \mathbf{N}$, поскольку условие $\mathcal{B} \in \mathbf{N}$ с неизбежностью привело бы к условию $\mathcal{A} \in \mathbf{N}$, которое не выполняется. Далее, $\mathcal{B} \in \mathbf{D^c}$ (см. следствие 4.1.5 ниже). Получается, что все непустые алгебраические множества над $\mathcal{B}$ неприводимы, а пустое множество не является алгебраическим над $\mathcal{B}$ по построению. Таким образом, алгебраические системы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{U}''$ удовлетворяют условию 2) предложения 3.1.5, но они универсально геометрически не эквивалентны (в противном случае согласно предложению 3.0.4 $\mathcal{B} \in \mathbf{N}'$, следовательно, $\mathcal{B} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{N}' = \mathbf{N}$, что не так). Далее мы будем ещё не раз ссылаться на этот пример, поэтому повторим то, что алгебраические системы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{D^c}$ элементарно эквивалентны, но геометрически не эквивалентны, причём $\mathcal{A} \in \mathbf{N}' \setminus \mathbf{N}$ и $\mathcal{A} \notin \mathbf{U}$, а $\mathcal{B} \in \mathbf{U} \setminus \mathbf{N}$ и $\mathcal{B} \notin \mathbf{N}'$.

3.2. Универсальная геометрическая эквивалентность в классах $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D^c}$

Далее покажем, что в классах эквациональных областей и кообластей понятия геометрической и универсальной геометрической эквивалентностей совпадают. Начнём с класса $\mathbf{D}$.

Напомним, что одним из критериев того, что алгебраическая $\mathtt{L}$-система $\mathcal{A}$ является эквациональной областью является существование такой системы уравнений $S_{R,P} \subseteq \mathrm{At}_{\mathtt{L}}(x_1, \ldots, x_{n_R}, y_1, \ldots, y_{n_P})$ для каждой пары (с возможными повторениями) предикатных символов $R, P \in \mathtt{L} \cup \{=\}$, что в $\mathcal{A}$ истинно (бесконечное) универсальное предложение

$$\Phi_{R,P} = \forall x_1, \ldots, \forall x_{n_R}, \forall y_1, \ldots, \forall y_{n_P}$$
$$\Big(\bigwedge_{\varphi \in S_{R,P}} \varphi(x_1, \ldots, x_{n_R}, y_1, \ldots, y_{n_P}) \longleftrightarrow [R(x_1, \ldots, x_{n_R}) \vee P(y_1, \ldots, y_{n_P})] \Big). \quad (1)$$

В том случае, когда все системы уравнений $S_{R,P}$ конечны, эквациональную область $\mathcal{A}$ будем называть *формульной*. Если для двух эквациональных областей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ языка $\mathtt{L}$ для каждой пары предикатных символов $R, P \in \mathtt{L} \cup \{=\}$ существует такая система уравнений $S_{R,P}$, что (бесконечное) предложение $\Phi_{R,P}$ истинно как в $\mathcal{A}$, так и в $\mathcal{B}$, то такие эквациональные области будем называть *однотипными*.

Лемма 3.2.1. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — однотипные эквациональные области языка $\mathtt{L}$. Тогда для любого конечного множества X, любого натурального числа $m > 1$ и любых систем уравнений $S_1, \ldots, S_m \subseteq \mathrm{At}_{\mathtt{L}}(X)$ найдётся такая система уравнений $S \subseteq \mathrm{At}_{\mathtt{L}}(X)$, что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S) = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_m)$ и $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S) = \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S_m)$.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что согласно [5, следствие 6] для любого конечного множества X, любого натурального числа $m > 1$ и любых уравнений $f_1, \ldots, f_m \in \mathrm{At}_{\mathtt{L}}(X)$ найдётся такая система уравнений $S_{f_1,\ldots,f_m} \subseteq \mathrm{At}_{\mathtt{L}}(X)$, что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_{f_1,\ldots,f_m}) = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f_1\}) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f_m\})$ и $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S_{f_1,\ldots,f_m}) = \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\{f_1\}) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\{f_m\})$. Во-вторых,

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_m) = \bigcap_{f_1 \in S_1, \ldots, f_m \in S_m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f_1\}) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f_m\}) = \bigcap_{f_1 \in S_1, \ldots, f_m \in S_m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_{f_1,\ldots,f_m}) = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S),$$

где

$$S = \bigcup_{f_1 \in S_1, \ldots, f_m \in S_m} S_{f_1,\ldots,f_m},$$

и аналогично $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S_m) = \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S)$. □

Лемма 3.2.2. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — ω-геометрически эквивалентные эквациональные области языка $\mathtt{L}$. Тогда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ однотипны.*

Доказательство. Согласно [5, теорема 5] алгебраическая система $\mathcal{A}$ является эквациональной областью тогда и только тогда, когда для каждой пары предикатных символов $R, P \in \mathtt{L} \cup \{=\}$ на ней истинно (бесконечное) универсальное предложение (1) при $S_{R,P} = \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}\big(R(x_1, \ldots, x_{n_R})\big) \cap \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}\big(P(y_1, \ldots, y_{n_P})\big)$. А поскольку алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ω-геометрически эквивалентны, то $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(P) = \mathrm{Rad}_{\mathcal{B}}(P)$ для любого предиката $P \in \mathtt{L} \cup \{=\}$, откуда получаем требуемое. □

Предложение 3.2.3. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — эквациональные области языка $\mathtt{L}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально ω-геометрически эквивалентны;*

2) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ω-геометрически эквивалентны*;
3) $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$;
4) $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B})$.

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ω-геометрически эквивалентны, и пусть для конечного множества X, конечной системы уравнений $S \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$, натурального числа $m > 1$ и уравнений $f_1, \ldots, f_m \in \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$ выполнено включение $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f_1\}) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f_m\})$. Тогда в силу лемм 3.2.1, 3.2.2 найдётся такая система уравнений $S' \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$, что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S') = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f_1\}) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f_m\})$ и $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S') = \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\{f_1\}) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\{f_m\})$. Для каждого уравнения $f \in S'$ имеем $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f\})$, откуда получаем, что $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\{f\})$ [7, лемма 19], следовательно, $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S') = \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\{f_1\}) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\{f_m\})$, что доказывает универсальную ω-геометрическую эквивалентность $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ [8, лемма 18]. □

Предложение 3.2.4. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — эквациональные области языка* L. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны*;
2) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически эквивалентны.*

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически эквивалентны, и покажем, что тогда они универсально геометрически эквивалентны. Возьмём произвольное конечное множество X и произвольные системы уравнений $S, S_1, \ldots, S_m \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$, и пусть имеет место равенство $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S) = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_m)$. Тогда в силу лемм 3.2.1, 3.2.2 найдётся такая система уравнений $S' \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$, что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S') = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_m)$ и $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S') = \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S_m)$. В этом случае $S \sim_{\mathcal{A}} S'$, откуда следует, что $S \sim_{\mathcal{B}} S'$ [7, предложение 1], поэтому имеем $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S) = \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S_m)$, что доказывает универсальную геометрическую эквивалентность $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ [8, предложение 2]. □

Теорема 3.2.5. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — эквациональные области языка* L, *которые одновременно являются нётеровыми по уравнениям, или слабо нётеровыми по уравнениям, или u_ω-компактными, или q_ω-компактными. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны*;
2) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически эквивалентны*;
3) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально ω-геометрически эквивалентны*;
4) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ω-геометрически эквивалентны.*

Доказательство. Результат непосредственно следует из предложений 3.2.3, 3.2.4 и [7, теорема 23]. □

Теперь докажем аналогичные утверждения для класса эквациональных кообластей $\mathbf{D^c}$. Нам понадобится следующий результат, верный для произвольных алгебраических систем.

Лемма 3.2.6. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — ω-геометрически эквивалентные алгебраические* L*-системы. Тогда $\mathcal{E} \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$ в том и только том случае, если $\mathcal{E} \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что $\mathcal{A}$ является тривиальной системой тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ является тривиальной системой, поскольку тривиальность выражается с помощью тождеств, причём в нашем случае $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B})$. Таким образом, можно считать, что $\mathcal{A}, \mathcal{B} \neq \mathcal{E}$. Во-вторых, включение $\mathcal{E} \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$ равносильно тому, что множество атомарных формул $\mathrm{At}_{\mathrm{L}}(x)$ от одной переменной локально выполнимо в $\mathcal{A}$, что равносильно тому, что любое антитождество от одной переменной ложно в $\mathcal{A}$. В третьих, любое антитождество в классе нетривиальных алгебраических систем эквивалентно набору квазитождеств. Поскольку $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{A}, \mathcal{B} \neq \mathcal{E}$, получаем требуемое. □

Предложение 3.2.7. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — эквациональные кообласти языка* L*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально ω-геометрически эквивалентны;*
2) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ω-геометрически эквивалентны;*
3) $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$;
4) $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B})$.

Доказательство. Для любой эквациональной кообласти $\mathcal{A}$ имеем $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_{\mathbf{e}}$ [2], поэтому равенство $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B})$ влечёт $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_{\mathbf{e}} = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})_{\mathbf{e}}$, и по лемме 3.2.6 получаем требуемое: $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$. □

Предложение 3.2.8. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — эквациональные кообласти языка* L*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны;*
2) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически эквивалентны.*

Доказательство. Действительно, если эквациональные кообласти $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически эквивалентны, то имеем

$$\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega\,\mathbf{e}} = \mathbf{Res}(\mathcal{A})_{\omega} = \mathbf{Res}(\mathcal{B})_{\omega} = \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_{\omega\,\mathbf{e}}.$$

Тривиальная алгебраическая система $\mathcal{E}$ принадлежит классу $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})$ в том и только том случае, если является подсистемой в $\mathcal{A}$, а геометрически эквивалентные алгебраические системы одновременно содержат или не содержат тривиальную подсистему [7, лемма 5], поэтому получаем равенство $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega} = \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_{\omega}$, означающее универсальную геометрическую эквивалентность $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. □

Теорема 3.2.9. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — эквациональные кообласти языка* L*, которые одновременно являются нётеровыми по уравнениям, или слабо нётеровыми по уравнениям, или u_{ω}-компактными. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны;*
2) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически эквивалентны;*
3) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально ω-геометрически эквивалентны;*

4) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ω-геометрически эквивалентны.*

Доказательство. Результат непосредственно следует из предложений 3.2.7, 3.2.8 и [7, теорема 23]. □

Обратим внимание на то, что в формулировке теоремы 3.2.9 не упоминаются q_ω-компактные эквациональные кообласти, так как данный класс редуцируется до $\mathbf{U}\cap\mathbf{D^c}$ (см. следствие 4.1.2 ниже).

Замечание 3.2.10. Важно отметить, что, несмотря на то что классы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D^c}$ инвариантны относительно универсальной геометрической эквивалентности и внутри них геометрическая и универсальная геометрическая эквивалентности совпадают, относительно геометрической эквивалентности оба класса $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D^c}$ не инвариантны (см. примеры 3.0.2 и 3.0.3).

Замечание 3.2.11. Как показано выше, внутри каждого из классов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D^c}$ универсальная геометрическая эквивалентность совпадает с геометрической, а универсальная ω-геометрическая совпадает с ω-геометрической, причём внутри классов $\mathbf{D}\cap\mathbf{Q}$, $\mathbf{D}\cap\mathbf{N'}$, $\mathbf{D^c}\cap\mathbf{U}$, $\mathbf{D^c}\cap\mathbf{N'}$ все четыре эквивалентности совпадают. Однако в общем случае внутри целых классов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D^c}$ нет равенства сразу между всеми четырьмя геометрическими эквивалентностями. В классе $\mathbf{D}$ это демонстрирует пример 4.2.8 ниже, а в классе $\mathbf{D^c}$ — пример 3.1.7.

4. Пересечения особых классов

В этом разделе нам бы хотелось несколько прояснить свойства алгебраических систем из тех классов, которые получаются пересечением классов $\mathbf{N}$, $\mathbf{N'}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U'}$, $\mathbf{U''}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{D^c}$. Прежде всего отметим, что любые пересечения классов из списка $\mathbf{N}$, $\mathbf{N'}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U'}$, $\mathbf{U''}$ являются классами из этого же списка, поэтому не требуют дополнительных разъяснений. Пересечение $\mathbf{D}\cap\mathbf{D^c}$ состоит из одних L-точек [5, лемма 4], поэтому также не представляет интереса.

4.1. Пересечения $\mathbf{D^c}$ с $\mathbf{N}$, $\mathbf{N'}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U'}$, $\mathbf{U''}$

Прежде всего покажем, что не все пересечения класса $\mathbf{D^c}$ с классами $\mathbf{N}$, $\mathbf{N'}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U'}$, $\mathbf{U''}$ являются существенными. Для этого напомним, что для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ условия $\mathcal{A}\equiv_\forall\mathcal{A}^2$ и $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A})=\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_\mathbf{e}$ эквивалентны [2, предложение 3.4], кроме того, они справедливы для любой эквациональной кообласти $\mathcal{A}$ [2, следствие 3.2]. Для дальнейшего раскрытия связи между этими свойствами докажем следующее предложение.

Предложение 4.1.1. *Для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ языка L следующие условия равносильны:*

1) *$\mathcal{A}$ — эквациональная кообласть;*
2) *$\mathcal{A}$ слабо u_ω-компактна и $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A})=\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_\mathbf{e}$;*
3) *$\mathcal{A}$ геометрически слабо u_ω-компактна и $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A})=\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_\mathbf{e}$.*

Доказательство. Непосредственно из определения следует, что любая эквациональная кообласть $\mathcal{A}$ геометрически слабо u_ω-компактна. В сумме со сказанным выше получаем, что условие 1) влечёт условие 3). Из условия 3) следует условие 2) ввиду включения $\mathbf{U}'' \subseteq \mathbf{U}'$. Предположим теперь, что справедливо условие 2) и выведем отсюда условие 1). Имеем $\mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega \subseteq \mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_{\mathbf{e}}$ и $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_{\mathbf{e}} \cap \mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega\,\mathbf{e}}$, следовательно, $\mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega\,\mathbf{e}}$, таким образом, $\mathcal{A}$ — эквациональная кообласть. □

Следствие 4.1.2. *Справедливо включение $\mathbf{D^c} \subseteq \mathbf{U}''$ и равенства $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{D^c} \cap \mathbf{U}$, $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{U}' = \mathbf{D^c} \cap \mathbf{U}''$.*

Следствие 4.1.3. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — алгебраические* L*-системы и $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$. Тогда $\mathcal{A} \in \mathbf{D^c} \cap \mathbf{N}$ в том и только том случае, если $\mathcal{B} \in \mathbf{D^c} \cap \mathbf{N}$.*

Доказательство. Действительно, если $\mathcal{A} \in \mathbf{D^c} \cap \mathbf{N}$, то согласно [4, утверждение 4.5] $\mathcal{B} \in \mathbf{N}$. А поскольку $\mathbf{Qvar}(\mathcal{B}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_{\mathbf{e}} = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})_{\mathbf{e}}$, заключаем, что $\mathcal{B} \in \mathbf{D^c}$. □

Следствие 4.1.4. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — геометрически эквивалентные алгебраические* L*-системы и $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$. Тогда $\mathcal{A} \in \mathbf{D^c} \cap \mathbf{N}'$ в том и только том случае, если $\mathcal{B} \in \mathbf{D^c} \cap \mathbf{N}'$.*

Доказательство. Если $\mathcal{A} \in \mathbf{D^c} \cap \mathbf{N}'$, то согласно [7, предложение 12] $\mathcal{B} \in \mathbf{N}'$. Кроме того, $\mathbf{Qvar}(\mathcal{B}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})_{\mathbf{e}}$, откуда следует, что $\mathcal{B} \in \mathbf{D^c}$. □

Следствие 4.1.5. *Пусть $\mathcal{A}$ — такая алгебраическая система, что $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_{\mathbf{e}}$ (например, эквациональная кообласть). Тогда её u_ω-компактное элементарное расширение $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ является эквациональной кообластью.*

Итак, согласно следствию 4.1.2 пересечения $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{Q}$ и $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{U}'$ редуцируются до $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{U}$ и $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{U}''$ соответственно, а примеры 3.0.3 и 3.1.7 показывают, что оставшиеся пересечения $\mathbf{D^c}$ с классами $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$ и $\mathbf{U}$ являются существенными, поскольку нашлись алгебраические системы в классах $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{N}$, $\mathbf{D^c} \cap (\mathbf{N}' \setminus \mathbf{N})$ и $\mathbf{D^c} \cap (\mathbf{U} \setminus \mathbf{N})$.

Далее для полноты картины разрешим один вопрос, который был пропущен в [13] при построении рисунка взаимоотношений классов $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$. А именно, там было показано, что справедливы включения $\mathbf{U} \cup \mathbf{N}' \subseteq \mathbf{U}'' \subseteq \mathbf{U}'$, причём, вообще говоря, $\mathbf{U}'' \neq \mathbf{U}'$. Теперь покажем, что $\mathbf{U} \cup \mathbf{N}' \neq \mathbf{U}''$. Для этого напомним, что алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *$\mathcal{E}$-компактной*, если из локальной выполнимости в $\mathcal{A}$ множества атомарных формул $\mathrm{At}_{\mathrm{L}}(x)$ следует его глобальная выполнимость в $\mathcal{A}$. Все алгебраические системы из класса $\mathbf{U} \cup \mathbf{N}'$ $\mathcal{E}$-компактны.

Пример 4.1.6. Возьмём алгебраическую систему $\mathcal{A} \in \mathbf{U}'$, которая не является $\mathcal{E}$-компактной [13, пример 5.18], и её произвольную бесконечную декартову степень $\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{B} \in \mathbf{D^c}$ и согласно предложению 4.1.1 $\mathcal{B} \in \mathbf{U}''$. Кроме того, алгебраическая система $\mathcal{B}$ не является $\mathcal{E}$-компактной, следовательно, $\mathcal{B} \notin \mathbf{U} \cup \mathbf{N}'$. Таким образом, имеем $\mathbf{U} \cup \mathbf{N}' \neq \mathbf{U}''$ и $\mathbf{D^c} \cap (\mathbf{U} \cup \mathbf{N}') \neq \mathbf{D^c}$.

Последнее, что хотелось бы обсудить в этом разделе, это вопросы замкнутости класса $\mathbf{D^c}$ и его подклассов относительно элементарной эквивалентности. Следствие 4.1.3 показывает замкнутость класса $\mathbf{D^c}\cap\mathbf{N}$ относительно элементарной эквивалентности (точнее, относительно универсальной эквивалентности). Попытки дальнейшего распространения этого результата напрямую сопряжены с предложением 4.1.1, точнее, со следующим естественно вытекающим из него вопросом.

Вопрос. Является ли условие $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_{\mathbf{e}}$ достаточным для того, чтобы алгебраическая система $\mathcal{A}$ была эквациональной кообластью?

Данный вопрос решается отрицательно в статье [10], что приводит к следующему утверждению.

Утверждение 4.1.7. *Неверно, что классы $\mathbf{D^c}$, $\mathbf{D^c}\cap\mathbf{U}$ и $\mathbf{D^c}\cap\mathbf{N}'$ инвариантны относительно элементарной эквивалентности. Более того, неверно, что классы $\mathbf{D^c}$ и $\mathbf{D^c}\cap\mathbf{U}$ инвариантны относительно суммы элементарной и геометрической эквивалентностей.*

Доказательство. Во-первых, рассмотрим алгебраическую систему $\mathcal{A} \in$ $\in \mathbf{Q}\setminus\mathbf{U}$, такую что $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_{\mathbf{e}}$ [10], и её u_ω-компактное элементарное расширение $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. Поскольку $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathbf{Q}$ и $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B})$, то $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически эквивалентны, к тому же, по построению они элементарно эквивалентны. Но в силу следствия 4.1.2 $\mathcal{A} \notin \mathbf{D^c}$, в то время как согласно следствию 4.1.5 $\mathcal{B} \in \mathbf{D^c}\cap\mathbf{U}$. Этот пример показывает, что классы $\mathbf{D^c}$ и $\mathbf{D^c}\cap\mathbf{U}$ не инвариантны относительно суммы элементарной и геометрической эквивалентностей.

Во-вторых, в примере 3.1.7 построены элементарно эквивалентные алгебраические системы $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathbf{D^c}$, причём $\mathcal{A} \in \mathbf{N}'$ и $\mathcal{B} \notin \mathbf{N}'$, что показывает незамкнутость класса $\mathbf{D^c}\cap\mathbf{N}'$ относительно элементарной эквивалентности. □

4.2. Пересечения D с N, N′, Q, U, U′, U″

Определение формульной эквациональной области дано в разделе 3.2. Приведём критерий формульности эквациональной области, доказанный в [2, 5], и далее докажем ещё один новый критерий.

Теорема 4.2.1 [2, теорема 2.8]. *Алгебраическая система $\mathcal{A}$ является формульной эквациональной областью тогда и только тогда, когда каждая алгебраическая система из универсального замыкания $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$ является эквациональной областью.*

Предложение 4.2.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — эквациональная область языка L. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$\mathcal{A}$ формульна*;
2) *$\mathcal{A}$ геометрически слабо u_ω-компактна.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ является геометрически слабо u_ω-компактной эквациональной областью. Покажем, что $\mathcal{A}$ формульна. Итак, (бесконечное) предложение (1) истинно в $\mathcal{A}$ для каждой пары предикатных символов $R, P \in \in \mathtt{L} \cup \{=\}$. Тогда $\mathrm{V}_\mathcal{A}(S_{R,P}) = \mathrm{V}_\mathcal{A}(R) \cup \mathrm{V}_\mathcal{A}(P)$. Определим конечную систему $S'_{R,P}$ так, чтобы формула (1) осталась истинной на $\mathcal{A}$ после замены $S_{R,P}$ на $S'_{R,P}$. Если $\mathrm{V}_\mathcal{A}(R) \subseteq \mathrm{V}_\mathcal{A}(P)$, то положим $S'_{R,P} = \{P\}$. Если $\mathrm{V}_\mathcal{A}(P) \subseteq \subseteq \mathrm{V}_\mathcal{A}(R)$, то положим $S'_{R,P} = \{R\}$. Если $\mathrm{V}_\mathcal{A}(R) \nsubseteq \mathrm{V}_\mathcal{A}(P)$ и $\mathrm{V}_\mathcal{A}(P) \nsubseteq \mathrm{V}_\mathcal{A}(R)$, то $\mathrm{V}_\mathcal{A}(S_{R,P}) \nsubseteq \mathrm{V}_\mathcal{A}(R)$ и $\mathrm{V}_\mathcal{A}(S_{R,P}) \nsubseteq \mathrm{V}_\mathcal{A}(P)$, следовательно, по определению геометрически слабой u_ω-компактности найдётся такая конечная система уравнений $S'_{R,P} \subseteq \mathrm{Rad}_\mathcal{A}(S_{R,P})$, что $\mathrm{V}_\mathcal{A}(S'_{R,P}) \subseteq \mathrm{V}_\mathcal{A}(R) \cup \mathrm{V}_\mathcal{A}(P)$, т. е. $S'_{R,P}$ является искомой.

Теперь предположим, что $\mathcal{A}$ — формульная эквациональная область, и покажем, что она геометрически слабо u_ω-компактна. Возьмём произвольную систему уравнений $S \subseteq \mathrm{At}_\mathtt{L}(X)$ и произвольные уравнения $f_1, \ldots, f_m \in \mathrm{At}_\mathtt{L}(X)$, такие что $\mathrm{V}_\mathcal{A}(S) \subseteq \mathrm{V}_\mathcal{A}(f_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_\mathcal{A}(f_m)$ и $\mathrm{V}_\mathcal{A}(S) \nsubseteq \mathrm{V}_\mathcal{A}(f_i)$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда существует такая конечная система уравнений $S' \subseteq \mathrm{At}_\mathtt{L}(X)$, что $\mathrm{V}_\mathcal{A}(S') = = \mathrm{V}_\mathcal{A}(f_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_\mathcal{A}(f_m)$ [5, следствие 6]. Ясно, что $S' \subseteq \mathrm{Rad}_\mathcal{A}(S)$, поэтому система уравнений S' является искомой. □

Следствие 4.2.3. *Формульная эквациональная область q_ω-компактна тогда и только тогда, когда она u_ω-компактна.*

Следствие 4.2.4. *Неверно, что класс $\mathbf{D}$ инвариантен относительно элементарной эквивалентности. Аналогично для любого класса $\mathbf{K}$ если в $\mathbf{K} \cap \mathbf{D}$ присутствуют неформульные эквациональные области, то класс $\mathbf{K} \cap \mathbf{D}$ не инвариантен относительно элементарной эквивалентности.*

Доказательство. Поскольку существует неформульная эквациональная область $\mathcal{A}$ [2, пример 1], её u_ω-компактное элементарное расширение $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ не будет эквациональной областью. □

Следствие 4.2.5. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — алгебраические системы языка* $\mathtt{L}$ *и* $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathcal{A} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{N}$ *в том и только том случае, если* $\mathcal{B} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{N}$;
2) $\mathcal{A} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{U}''$ *в том и только том случае, если* $\mathcal{B} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{U}''$.

Доказательство. Второе утверждение непосредственно следует из предложения 4.2.2. Для обоснования первого утверждения напомним, что условие $\mathcal{A} \in \mathbf{N}$ влечёт $\mathcal{B} \in \mathbf{N}$ согласно [4, утверждение 4.5]. □

Следствие 4.2.6. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — геометрически эквивалентные алгебраические* $\mathtt{L}$*-системы и* $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$. *Тогда следующие утверждения справедливы*:

1) $\mathcal{A} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{N}'$ *в том и только том случае, если* $\mathcal{B} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{N}'$;
2) $\mathcal{A} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{U}$ *в том и только том случае, если* $\mathcal{B} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{U}$.

Доказательство. Действительно, если $\mathcal{A} \in \mathbf{N}'$, то в силу [7, предложение 12] $\mathcal{B} \in \mathbf{N}'$. Если $\mathcal{A} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{U}$, то $\mathcal{B} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{U}''$ в силу $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{B} \in \mathbf{Q}$ в силу геометрической эквивалентности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, откуда следует, что $\mathcal{B} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{U}$. $\square$

Переход от алгебраической системы $\mathcal{A}$ к её произвольной бесконечной декартовой степени позволяет по заданной алгебраической системе построить связанную с ней эквациональную кообласть. Опишем процедуру с похожим смыслом, предназначенную для перехода к эквациональным областям.

Для любой алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A; \mathtt{L} \rangle$ построим формульную эквациональную область $\mathcal{A}^\vee = \langle A; \mathtt{L}^\vee \rangle$ языка $\mathtt{L}^\vee$, где $\mathtt{L}^\vee$ — обогащение языка $\mathtt{L}$ с помощью новых предикатных символов $R_{P_1,\ldots,P_m}$ для каждого неупорядоченного набора с возможными повторениями из предикатных символов $P_1, \ldots, P_m \in \mathtt{L} \cup \{=\}$ и следующей интерпретацией:

$$\mathcal{A}^\vee \models R_{P_1,\ldots,P_m}(x_1^1, \ldots, x_{n_{P_1}}^1, \ldots, x_1^m, \ldots, x_{n_{P_m}}^m) \iff \\ \iff \big(\mathcal{A} \models P_1(x_1^1, \ldots, x_{n_{P_1}}^1) \vee \ldots \vee \mathcal{A} \models P_m(x_1^m, \ldots, x_{n_{P_m}}^m)\big).$$

Несложные стандартные рассуждения показывают, что произвольное подмножество $Y \subseteq A^n$ является алгебраическим множеством над $\mathcal{A}^\vee$ в том и только том случае, если Y замкнуто в топологии Зариского над $\mathcal{A}$. В частности, $\mathcal{A}$ нётерова по уравнениям тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}^\vee$ нётерова по уравнениям [4, утверждение 4.3].

Понятно, что алгебраическая система $\mathcal{A}^\vee$ наследует от алгебраической системы $\mathcal{A}$ не только нётеровость по уравнениям, но и множество других свойств. Перечислим некоторые из них, используя обозначение $\equiv$ ($\equiv_\forall$ и $\sim_{\mathrm{ug}}$) для элементарной (соответственно универсальной и универсальной геометрической) эквивалентности алгебраических систем.

Лемма 4.2.7. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — алгебраические системы языка $\mathtt{L}$ и $\mathcal{A}^\vee$, $\mathcal{B}^\vee$ — соответствующие формульные эквациональные области языка $\mathtt{L}^\vee$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}^\vee \equiv \mathcal{B}^\vee$*;
2) *$\mathcal{A} \equiv_\forall \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}^\vee \equiv_\forall \mathcal{B}^\vee$*;
3) *$\mathcal{A} \sim_{\mathrm{ug}} \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}^\vee \sim_{\mathrm{ug}} \mathcal{B}^\vee$.*

Доказательство. Первые два утверждения тривиальны. Поясним, как доказывается третье утверждение. Если $\mathcal{A}^\vee \sim_{\mathrm{ug}} \mathcal{B}^\vee$, то для любого конечного множества X, любого натурального числа $m \geqslant 1$ и любых систем уравнений $S, S_1, \ldots, S_m \subseteq \mathrm{At}_{\mathtt{L}}(X)$ равенство $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S) = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S_m)$ имеет место в том и только том случае, если $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S) = \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(S_m)$, поэтому $\mathcal{A} \sim_{\mathrm{ug}} \mathcal{B}$ [8, предложение 2].

Предположим теперь, что $\mathcal{A} \sim_{\mathrm{ug}} \mathcal{B}$. Согласно предложению 3.2.4 достаточно показать, что $\mathcal{A}^\vee$ и $\mathcal{B}^\vee$ геометрически эквивалентны, т. е. что для любого конечного множества X, любой системы уравнений $S \subseteq \mathrm{At}_{\mathtt{L}^\vee}(X)$ и любого уравнения

$f \in \mathrm{At}_{\mathrm{L}^\vee}(X)$ включение $\mathrm{V}_{\mathcal{A}^\vee}(S) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}^\vee}(\{f\})$ имеет место в том и только том случае, если $\mathrm{V}_{\mathcal{B}^\vee}(S) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{B}^\vee}(\{f\})$ [7, предложение 1]. Последнее требование интерпретируется следующим образом в языке L: для любого конечного множества X, любого множества I мощности не меньше 2 с выделенным элементом $0 \in I$, любого семейства $\{m_i,\ i \in I\}$ целых положительных чисел и любых уравнений $f_1^i, \ldots, f_{m_i}^i \in \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$, $i \in I$, включение

$$\bigcap_{i \in I \setminus \{0\}} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f_1^i\}) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f_{m_i}^i\}) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f_1^0\}) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{f_{m_0}^0\})$$

имеет место в том и только том случае, если

$$\bigcap_{i \in I \setminus \{0\}} \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\{f_1^i\}) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\{f_{m_i}^i\}) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\{f_1^0\}) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\{f_{m_0}^0\}).$$

Это утверждение непосредственно выводится из [8, предложение 2]. □

Простая и естественная конструкция построения алгебраической системы $\mathcal{A}^\vee$ из $\mathcal{A}$ позволяет ответить на ряд вопросов относительно класса $\mathbf{D}$. Пример 3.0.2 демонстрирует, что $\mathbf{D} \cap \mathbf{N} \neq \varnothing$. Теперь можно показать, что в классе $\mathbf{D}$ включения $\mathbf{U} \supseteq \mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}'$ и $\mathbf{U} \cup \mathbf{N}' \subseteq \mathbf{U}''$ могут быть строгими.

Пример 4.2.8. Пусть $\mathcal{A} = \langle(-1,1); \{P_k, k \in \mathbb{N}\}\rangle$ — алгебраическая система из примера 3.1.7. Для того чтобы, не меняя сути, сделать дальнейшие рассуждения более компактными, переопределим в $\mathcal{A}$ один предикат: пусть теперь P_2 будет тождественно ложным. При этом сохраняется включение $\mathcal{A} \in \mathbf{N}' \setminus \mathbf{N}$. Покажем, что $\mathcal{A}^\vee \in \mathbf{N}' \setminus \mathbf{N}$. Здесь условие $\mathcal{A}^\vee \notin \mathbf{N}$ является очевидным. Далее, для любого конечного множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ любое уравнение $\varphi \in \mathrm{At}_{\mathrm{L}^\vee}(X)$ эквивалентно над $\mathcal{A}$ дизъюнктному уравнению $P_{k_1}(x_1) \vee \ldots \vee P_{k_n}(x_n)$. Нетрудно проверить, что для любой системы уравнений $S \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}^\vee}(X)$ решение $\mathrm{V}_{\mathcal{A}^\vee}(S)$ является объединением конечного числа алгебраических над $\mathcal{A}$ множеств $Y_1, \ldots, Y_m$, каждое из которых определяется конечной системой уравнений $S_i \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}}(X)$, $i = 1, \ldots, m$, поэтому исходная система уравнений S также эквивалентна конечной системе уравнений $S_0 \subseteq \mathrm{At}_{\mathrm{L}^\vee}(X)$, $S_0 = \{f_1 \vee \ldots \vee f_m, f_1 \in S_1, \ldots, f_m \in S_m\}$. Таким образом, $\mathcal{A}^\vee \in \mathbf{N}'$. Пусть теперь $\mathcal{B}$ — u_ω-компактное элементарное расширение $\mathcal{A}^\vee \prec \mathcal{B}$. В этом случае $\mathcal{B}$ тоже формульная эквациональная область. Повторяя рассуждения из примера 3.1.7, получаем, что $\mathcal{B} \in \mathbf{D} \cap (\mathbf{U} \setminus \mathbf{N})$ и $\mathcal{A}^\vee \in \mathbf{D} \cap (\mathbf{N}' \setminus \mathbf{N})$ элементарно эквивалентны, но геометрически не эквивалентны.

Пример 4.2.9. Возьмём алгебраическую систему $\mathcal{B} \in \mathbf{D^c}$ из примера 4.1.6, которая не является $\mathcal{E}$-компактной, и поэтому $\mathcal{B} \notin \mathbf{U} \cup \mathbf{N}'$. Тогда $\mathcal{B}^\vee$ также не является $\mathcal{E}$-компактной, поэтому $\mathcal{B}^\vee \in \mathbf{D} \cap \big(\mathbf{U}'' \setminus (\mathbf{U} \cup \mathbf{N}')\big)$.

Согласно предложению 4.2.2 все формульные эквациональные области принадлежат классу $\mathbf{U}''$. На сегодняшний день нам неизвестны примеры эквациональных областей из классов $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{U}$ и $\mathbf{U}' \setminus \mathbf{U}''$, но, если таковые отыщутся, они с необходимостью будут неформульными эквациональными областями.

Лемма 4.2.10. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — геометрически эквивалентные алгебраические* L*-системы и* $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$. *Тогда* $\mathcal{A} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{U}'$ *в том и только том случае, если* $\mathcal{B} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{U}'$.

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{A} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{U}'$. Тогда $\mathbf{Ucl}(\mathcal{B})_{\,\mathbf{e}} \cap \mathbf{Res}(\mathcal{B})_\omega = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_{\,\mathbf{e}} \cap \mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega\,\mathbf{e}}$. Отсюда следует, что любая конечно порождённая алгебраическая система $\mathcal{B}_0 \leqslant \mathcal{B}$ является эквациональной областью, однотипной $\mathcal{A}$ [5, предложение 10], следовательно, $\mathcal{B}$ — эквациональная область, однотипная $\mathcal{A}$. Поскольку, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически эквивалентны, они также универсально геометрически эквивалентны в силу предложения 3.2.4. Тогда согласно предложению 3.0.4 $\mathcal{B} \in \mathbf{U}'$. □

5. Семь эквивалентностей и особые классы

В этом разделе нет новых результатов. Здесь в краткой справочной форме собрана информация из предыдущих разделов и статей [7,8], структурированная относительно двух вопросов:

1) инвариантен ли класс $\mathbf{K}$ относительно эквивалентности $\sim$?
2) совпадают ли эквивалентности $\sim_1$ и $\sim_2$ в классе $\mathbf{K}$?

Здесь $\mathbf{K}$ — это класс из списка $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^{\mathbf{c}}$ или существенное пересечение таких классов (напомним, что не все такие пересечения представляют интерес). Мы рассматриваем следующие эквивалентности:

1) универсальную геометрическую $\sim_{\mathrm{ug}}$,
2) геометрическую $\sim_{\mathrm{g}}$,
3) универсальную ω-геометрическую, которая совпадает с универсальной $\equiv_\forall$,
4) ω-геометрическую, которая совпадает с квазиэквациональной $\equiv_{\mathrm{qi}}$,
5) сумму геометрической и универсальной $\sim_{\mathrm{g},\forall}$ ($\mathcal{A} \sim_{\mathrm{g},\forall} \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \sim_{\mathrm{g}} \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \equiv_\forall \mathcal{B}$),
6) элементарную $\equiv$,
7) сумму геометрической и элементарной $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$ ($\mathcal{A} \sim_{\mathrm{g},\equiv} \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \sim_{\mathrm{g}} \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$).

Последние две эквивалентности $\equiv$ и $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$ рассматриваем, только отвечая на первый вопрос. Второй вопрос о совпадении эквивалентностей $\equiv$ и $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$ в данном классе $\mathbf{K}$ является не чем иным, как проблемой Плоткина в сильной форме: будет ли в данном классе $\mathbf{K}$ геометрическая эквивалентность следовать из элементарной? Ответ на этот вопрос также постараемся дать для перечисленных классов.

Информацию будем представлять в краткой форме. Например, запись «$\sim_1 = \sim_2$ в классе $\mathbf{K}$» означает, что для любых алгебраических L-систем $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{K}$ имеем
$$\mathcal{A} \sim_1 \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \sim_2 \mathcal{B}.$$

Напротив, запись «$\sim_1 \neq \sim_2$ в классе $\mathbf{K}$» означает, что существуют алгебраические системы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{K}$ некоторой сигнатуры $\mathtt{L}$, эквивалентные относительно одной из эквивалентностей $\sim_1$, $\sim_2$ и не эквивалентные относительно другой. Напомним, что для произвольных алгебраических систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ языка $\mathtt{L}$ справедливы импликации

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \sim_{\mathrm{ug}} \mathcal{B} \arrow[d, Rightarrow] & & \mathcal{A} \sim_{\mathrm{g},\equiv} \mathcal{B} \arrow[dll, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
 & \mathcal{A} \sim_{\mathrm{g},\forall} \mathcal{B} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \arrow[dl, Rightarrow] \\
\mathcal{A} \sim_{\mathrm{g}} \mathcal{B} \arrow[dr, Rightarrow] & & \mathcal{A} \equiv_{\forall} \mathcal{B} \arrow[dl, Rightarrow] & \\
 & \mathcal{A} \equiv_{\mathrm{qi}} \mathcal{B} & &
\end{tikzcd}$$

Отметим, что у нас есть ответы не на все поставленные в этом разделе вопросы. Несколько вопросов, связанных друг с другом и стоящих на периферии класса эквациональных областей, остались открытыми проблемами. Соответствующие проблемы явно сформулированы в разделе 5.17.

5.1. Класс нётеровых по уравнениям алгебраических систем $\mathbf{N}$

Класс $\mathbf{N}$ инвариантен относительно $\equiv_{\mathrm{qi}}$, $\equiv_\forall$, $\equiv$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$, $\sim_{\mathrm{ug}}$ [7, следствие 20]. В классе $\mathbf{N}$ имеем

1) $\sim_{\mathrm{g}} = \equiv_{\mathrm{qi}}$ [7, теорема 23];
2) $\sim_{\mathrm{ug}} = \equiv_\forall = \sim_{\mathrm{g},\forall}$ [8, теорема 22];
3) $\sim_{\mathrm{g}}, \equiv_{\mathrm{qi}} \neq \equiv_\forall, \sim_{\mathrm{g},\forall}, \sim_{\mathrm{ug}}$ (пример 3.0.2);
4) проблема Плоткина решается положительно.

5.2. Класс слабо нётеровых по уравнениям алгебраических систем $\mathbf{N}'$

Класс $\mathbf{N}'$ инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g}}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$, $\sim_{\mathrm{ug}}$ [7, предложение 12]. В общем случае класс $\mathbf{N}'$ может быть не инвариантен относительно $\equiv$, $\equiv_\forall$, $\equiv_{\mathrm{qi}}$ [7, замечание 21]. В классе $\mathbf{N}'$ имеем ту же картину равенств и неравенств эквивалентностей $\equiv_{\mathrm{qi}}$, $\equiv_\forall$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{ug}}$, как и в классе $\mathbf{N}$, и проблема Плоткина также решается положительно, причём с теми же ссылками.

5.3. Класс u_ω-компактных алгебраических систем $\mathbf{U}$

Класс $\mathbf{U}$ инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{ug}}$ (предложение 3.0.4). В общем случае класс $\mathbf{U}$ может быть не инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\equiv$, $\equiv_\forall$, $\equiv_{\mathrm{qi}}$ (пример 3.0.1). В классе $\mathbf{U}$ имеем ту же картину равенств и неравенств эквивалентностей $\equiv_{\mathrm{qi}}$, $\equiv_\forall$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{ug}}$, как и в классе $\mathbf{N}$, и проблема Плоткина также решается положительно, причём с почти теми же ссылками (только [8, теорема 21] вместо [8, теорема 22]).

5.4. Класс q_ω-компактных алгебраических систем $\mathbf{Q}$

Класс $\mathbf{Q}$ инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g}}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$, $\sim_{\mathrm{ug}}$ [7, предложение 12]. В общем случае класс $\mathbf{Q}$ может быть не инвариантен относительно $\equiv$, $\equiv_\forall$, $\equiv_{\mathrm{qi}}$ [7, замечание 21]. В классе $\mathbf{Q}$ имеем

1) $\sim_{\mathrm{g}} = \equiv_{\mathrm{qi}}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall} = \equiv_\forall$ [7, теорема 23];
2) $\sim_{\mathrm{g},\forall}, \equiv_\forall \neq \sim_{\mathrm{ug}}$ (замечание 3.1.4);
3) $\sim_{\mathrm{g}}, \equiv_{\mathrm{qi}} \neq \equiv_\forall, \sim_{\mathrm{g},\forall}, \sim_{\mathrm{ug}}$ (пример 3.0.2);
4) проблема Плоткина решается положительно.

5.5. Класс (геометрически) слабо u_ω-компактных алгебраических систем $\mathbf{U}'$ ($\mathbf{U}''$)

Класс $\mathbf{U}'$ ($\mathbf{U}''$) инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{ug}}$ (предложение 3.0.4). В общем случае класс $\mathbf{U}'$ ($\mathbf{U}''$) может быть не инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\equiv$, $\equiv_\forall$, $\equiv_{\mathrm{qi}}$ (пример 3.0.1). В классе $\mathbf{U}'$ ($\mathbf{U}''$) имеем

1) $\sim_{\mathrm{ug}} = \sim_{\mathrm{g},\forall}$ (предложение 3.1.3);
2) $\sim_{\mathrm{g}} \neq \equiv_{\mathrm{qi}}$ [7, следствие 14];
3) $\sim_{\mathrm{ug}}, \sim_{\mathrm{g},\forall} \neq \equiv_\forall$ (лемма 3.1.1);
4) $\sim_{\mathrm{g}}, \equiv_{\mathrm{qi}} \neq \equiv_\forall, \sim_{\mathrm{g},\forall}, \sim_{\mathrm{ug}}$ (пример 3.0.2);
5) проблема Плоткина решается отрицательно (пример 3.1.7).

5.6. Класс эквациональных кообластей $\mathbf{D^c}$

Класс $\mathbf{D^c}$ инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{ug}}$ (предложение 3.0.4). В общем случае класс $\mathbf{D^c}$ может быть не инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\equiv$, $\equiv_\forall$, $\equiv_{\mathrm{qi}}$ (утверждение 4.1.7). В классе $\mathbf{D^c}$ имеем

1) $\sim_{\mathrm{ug}} = \sim_{\mathrm{g},\forall} = \sim_{\mathrm{g}}$ (предложение 3.2.8);
2) $\equiv_\forall = \equiv_{\mathrm{qi}}$ (предложение 3.2.7);
3) $\equiv_\forall, \equiv_{\mathrm{qi}} \neq \sim_{\mathrm{g}}, \sim_{\mathrm{g},\forall}, \sim_{\mathrm{ug}}$ (пример 3.1.7);
4) проблема Плоткина решается отрицательно (пример 3.1.7).

5.7. Класс нётеровых по уравнениям эквациональных кообластей $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{N}$

Класс $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{N}$ инвариантен относительно $\equiv_\forall$, $\equiv$, $\sim_{g,\equiv}$, $\sim_{g,\forall}$, $\sim_{ug}$ (следствие 4.1.3). В общем случае класс $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{N}$ может быть не инвариантен относительно $\sim_g$ и $\equiv_{qi}$ (пример 3.0.3). В классе $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{N}$ все геометрические эквивалентности $\sim_{ug}$, $\sim_{g,\forall}$, $\sim_g$, $\equiv_\forall$, $\equiv_{qi}$ совпадают (теорема 3.2.9); проблема Плоткина решается положительно.

5.8. Класс слабо нётеровых по уравнениям эквациональных кообластей $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{N'}$

Класс $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{N'}$ инвариантен относительно $\sim_{g,\forall}$, $\sim_{g,\equiv}$, $\sim_{ug}$ (следствие 4.1.4). В общем случае класс $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{N'}$ может быть не инвариантен относительно $\sim_g$ (пример 3.0.3), относительно $\equiv$, $\equiv_\forall$, $\equiv_{qi}$ (утверждение 4.1.7). В классе $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{N'}$ все геометрические эквивалентности $\sim_{ug}$, $\sim_{g,\forall}$, $\sim_g$, $\equiv_\forall$, $\equiv_{qi}$ совпадают (теорема 3.2.9); проблема Плоткина решается положительно.

5.9. Класс $\mathbf{u}_\omega$-компактных эквациональных кообластей $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{U}$

Класс $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{U}$ инвариантен относительно $\sim_{ug}$ (предложение 3.0.4). В общем случае класс $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{U}$ может быть не инвариантен относительно $\sim_{g,\equiv}$, $\sim_{g,\forall}$, $\sim_g$, $\equiv$, $\equiv_\forall$, $\equiv_{qi}$ (утверждение 4.1.7). В классе $\mathbf{D^c} \cap \mathbf{U}$ все геометрические эквивалентности $\sim_{ug}$, $\sim_{g,\forall}$, $\sim_g$, $\equiv_\forall$, $\equiv_{qi}$ совпадают (теорема 3.2.9); проблема Плоткина решается положительно.

5.10. Класс эквациональных областей $\mathbf{D}$

Класс $\mathbf{D}$ инвариантен относительно $\sim_{ug}$ (предложение 3.0.4). Неизвестно, инвариантен ли $\mathbf{D}$ относительно $\sim_{g,\equiv}$ и $\sim_{g,\forall}$. В общем случае класс $\mathbf{D}$ может быть не инвариантен относительно $\sim_g$ (пример 3.0.2) и относительно $\equiv$, $\equiv_\forall$, $\equiv_{qi}$ (следствие 4.2.4). В классе $\mathbf{D}$ имеем

1) $\sim_{ug} = \sim_{g,\forall} = \sim_g$ (предложение 3.2.4);
2) $\equiv_\forall = \equiv_{qi}$ (предложение 3.2.3);
3) $\equiv_\forall, \equiv_{qi} \neq \sim_g, \sim_{g,\forall}, \sim_{ug}$ (пример 4.2.8);
4) проблема Плоткина решается отрицательно (пример 4.2.8).

5.11. Класс нётеровых по уравнениям эквациональных областей $\mathbf{D} \cap \mathbf{N}$

Класс $\mathbf{D} \cap \mathbf{N}$ инвариантен относительно $\equiv_\forall$, $\equiv$, $\sim_{g,\equiv}$, $\sim_{g,\forall}$, $\sim_{ug}$ (следствие 4.2.5). В общем случае класс $\mathbf{D} \cap \mathbf{N}$ может быть не инвариантен относительно $\sim_g$ и $\equiv_{qi}$ (пример 3.0.2). В классе $\mathbf{D} \cap \mathbf{N}$ все геометрические эквивалентности $\sim_{\mathrm{ug}}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\equiv_{\forall}$, $\equiv_{\mathrm{qi}}$ совпадают (теорема 3.2.5); проблема Плоткина решается положительно.

5.12. Класс слабо нётеровых по уравнениям эквациональных областей $\mathbf{D}\cap\mathbf{N}'$

Класс $\mathbf{D}\cap\mathbf{N}'$ инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$, $\sim_{\mathrm{ug}}$ (следствие 4.2.6). В общем случае класс $\mathbf{D}\cap\mathbf{N}'$ может быть не инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g}}$ (пример 3.0.2), относительно $\equiv$, $\equiv_{\forall}$, $\equiv_{\mathrm{qi}}$ (пример 4.2.8). В классе $\mathbf{D}\cap\mathbf{N}'$ все геометрические эквивалентности $\sim_{\mathrm{ug}}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\equiv_{\forall}$, $\equiv_{\mathrm{qi}}$ совпадают (теорема 3.2.5); проблема Плоткина решается положительно.

5.13. Класс u_ω-компактных эквациональных областей $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}$

Класс $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}$ инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{ug}}$, $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$ (следствие 4.2.6). В общем случае класс $\mathbf{D}$ может быть не инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g}}$ (пример 3.0.2), относительно $\equiv$, $\equiv_{\forall}$, $\equiv_{\mathrm{qi}}$ (пример 4.2.8). В классе $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}$ все геометрические эквивалентности $\sim_{\mathrm{ug}}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\equiv_{\forall}$, $\equiv_{\mathrm{qi}}$ совпадают (теорема 3.2.5); проблема Плоткина решается положительно.

5.14. Класс q_ω-компактных эквациональных областей $\mathbf{D}\cap\mathbf{Q}$

Неизвестно, отличен ли класс $\mathbf{D}\cap\mathbf{Q}$ от $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}$. В любом случае класс $\mathbf{D}\cap\mathbf{Q}$ инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{ug}}$ (предложение 3.0.4). Если будет показано, что $\mathbf{D}\cap\mathbf{Q}\neq\mathbf{D}\cap\mathbf{U}$, то класс $\mathbf{D}\cap\mathbf{Q}$ в общем случае может быть не инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\equiv$, $\equiv_{\forall}$ и $\equiv_{\mathrm{qi}}$ (пояснение дано в разделе 5.17 ниже). В классе $\mathbf{D}\cap\mathbf{Q}$ все геометрические эквивалентности $\sim_{\mathrm{ug}}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\equiv_{\forall}$, $\equiv_{\mathrm{qi}}$ совпадают (теорема 3.2.5); проблема Плоткина решается положительно.

5.15. Класс формульных эквациональных областей $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}''$

Класс $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}''$ инвариантен относительно $\equiv_{\forall}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{ug}}$, $\equiv$, $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$ (следствие 4.2.5). В общем случае класс $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}''$ может быть не инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g}}$ и $\equiv_{\mathrm{qi}}$ (пример 3.0.2). В классе $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}''$ имеем ту же картину равенств и неравенств эквивалентностей $\equiv_{\mathrm{qi}}$, $\equiv_{\forall}$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{ug}}$, как и в классе $\mathbf{D}$, и проблема Плоткина также решается отрицательно, причём с теми же ссылками.

5.16. Класс слабо u_ω-компактных эквациональных областей $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}'$

Неизвестно, отличен ли класс $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}'$ от $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}''$. В любом случае класс $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}'$ инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$, $\sim_{\mathrm{ug}}$ (лемма 4.2.10). В общем случае класс $\mathbf{D}\cap\mathbf{U}'$ может быть не инвариантен относительно $\sim_{\mathrm{g}}$ (пример 3.0.2).

Если будет показано, что $\mathbf{D} \cap \mathbf{U}' \neq \mathbf{D} \cap \mathbf{U}''$, то в классе $\mathbf{D} \cap \mathbf{U}'$ могут присутствовать неформульные эквациональные области, поэтому этот класс в общем случае может быть не инвариантен относительно $\equiv$, $\equiv_\forall$ и $\equiv_{\mathrm{qi}}$ (следствие 4.2.4). В классе $\mathbf{D} \cap \mathbf{U}'$ имеем ту же картину равенств и неравенств эквивалентностей $\equiv_{\mathrm{qi}}$, $\equiv_\forall$, $\sim_{\mathrm{g}}$, $\sim_{\mathrm{g},\forall}$, $\sim_{\mathrm{ug}}$, что и в классе $\mathbf{D} \cap \mathbf{U}''$, и проблема Плоткина также решается отрицательно, причём с теми же ссылками.

5.17. Открытые вопросы

Все вопросы, которые остались пока не решёнными в тематике данной работы, связаны с неформульными эквациональными областями. У нас нет достаточного запаса примеров неформульных эквациональных областей для того, чтобы можно было проанализировать свойства таких алгебраических систем и закрыть несколько пустот в проведённых выше рассуждениях. Однако работа в этом направлении продолжается, и мы надеемся, что в скором будущем отыщутся примеры, существование которых пока под вопросом. Соответствующие открытые вопросы сформулированы ниже в виде списка проблем.

Проблема 1. Необходимо найти пример q_ω-компактной неформульной эквациональной области, если таковая существует.

Если найдётся пример для проблемы 1, то соответствующая алгебраическая система $\mathcal{A}$ будет принадлежать классу $\mathbf{D} \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{U})$. В этом случае её элементарное u_ω-компактное расширение $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ выходит за пределы класса эквациональных областей, причём $\mathcal{A} \sim_{\mathrm{g}} \mathcal{B}$, поскольку $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{Q}$ и $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B})$. В этом случае можно будет утверждать, что классы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D} \cap \mathbf{Q}$ в общем случае могут быть не инвариантны относительно $\sim_{\mathrm{g},\equiv}$ и $\sim_{\mathrm{g},\forall}$.

Проблема 2. Необходимо найти пример слабо u_ω-компактной неформульной эквациональной области, если таковая существует.

Проблема 3. Необходимо найти пример эквациональной области, которая не является ни q_ω-компактной, ни слабо u_ω-компактной, если таковая существует.

Результаты поддержаны грантом РНФ (проект № 17-11-01117).

Литература

[1] Горбунов В. А. Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск: Науч. книга, 1999.

[2] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. IV. Эквациональные области и кообласти // Алгебра и логика. — 2010. — Т. 49, № 6. — С. 715—756.

[3] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Универсальная алгебраическая геометрия // Докл. РАН. — 2011. — Т. 439, № 6. — С. 730—732.

[4] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. II. Основания // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 1. — С. 65—106.

[5] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. V. Случай произвольной сигнатуры // Алгебра и логика. — 2012. — Т. 51, № 1. — С. 41—60.

[6] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Размерность в универсальной алгебраической геометрии // Докл. РАН. — 2014. — Т. 457, № 3. — С. 265—267.

[7] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. VI. Геометрическая эквивалентность // Алгебра и логика. — 2017. — Т. 56, № 4. — С. 421—442.

[8] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Универсальная геометрическая эквивалентность алгебраических систем одной сигнатуры // Сиб. матем. журн. — 2017. — Т. 58, № 5. — С. 1035—1050.

[9] Плоткин Б. И. Проблемы алгебры, инспирированные универсальной алгебраической геометрией // Фундамент. и прикл. матем. — 2004. — Т. 10, вып. 3. — С. 181—197.

[10] Шевляков А. Н. Об элементарной и геометрической эквивалентности эквациональных кообластей // Фундамент. и прикл. матем. — Послана в журнал.

[11] Berzins A. Geometrical equivalence of algebras // Internat. J. Algebra Comput. — 2001. — Vol. 11, no. 4. — P. 447—456.

[12] Daniyarova E., Myasnikov A., Remeslennikov V. Unification theorems in algebraic geometry // Algebra Discrete Math. — 2008. — Vol. 1. — P. 80—112.

[13] Daniyarova E., Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over algebraic structures. III. Equationally Noetherian property and compactness // Southeast Asian Bull. Math. — 2011. — Vol. 35, no. 1. — P. 35—68.

[14] Göbel R., Shelah S. Radicals and Plotkin's problem concerning geometrically equivalent groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 2002. — Vol. 130, no. 3. — P. 673—674.

[15] Grätzer G., Lakser H. A note on implicational class generated by class of structures // Can. Math. Bull. — 1973. — Vol. 16, no. 4. — P. 603—605.

[16] Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations // J. Algebra. — 2000. — Vol. 234, no. 1. — P. 225—276.

[17] Plotkin B. I. Seven lectures on the universal algebraic geometry: Preprint. — 2002. — `arXiv:math/0204245` [math.GM].

[18] Plotkin B. Algebras with the same (algebraic) geometry // Proc. Steklov Inst. Math. — 2003. — Vol. 242. — P. 165—196.

[19] Plotkin B. I. Geometrical equivalence, geometrical similarity, and geometrical compatibility of algebras // J. Math. Sci. — 2007. — Vol. 140, no. 5. — P. 716—728.

[20] Plotkin B., Tsurkov A. Action type geometrical equivalence of representations of groups // Algebra Discrete Math. — 2005. — Vol. 4. — P. 48—79.

[21] Plotkin B., Zhitomirski G. Some logical invariants of algebras and logical relations between algebras // Алгебра и анализ. — 2007. — Т. 19, № 5. — С. 214—245.

[22] Shevlyakov A. N. Commutative idempotent semigroups at the service of universal algebraic geometry // Southeast Asian Bull. Math. — 2011. — Vol. 35, no. 1. — P. 111—136.