Последовательности коразмерностей тождеств и их асимптотическое поведение

М. В. ЗАЙЦЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: zaicevmv@mail.ru

С. П. МИЩЕНКО
Ульяновский государственный университет
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

УДК 512.554

Ключевые слова: тождества, коразмерности, экспоненциальный рост, полиномиальный рост.

Аннотация

В работе изучаются числовые характеристики тождеств неассоциативных алгебр. Представлен краткий обзор результатов, полученных в данной области за последние 10 лет.

Abstract

M. V. Zaicev, S. P. Mishchenko, Codimension sequences and their asymptotic behavior, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 115—127.

In this paper, numerical characteristics of identities of non-associative algebras are studied. A short survey of the results of the last 10 years in this area is presented.

1. Введение

В статье изучаются количественные характеристики полиномиальных тождеств ассоциативных и неассоциативных алгебр. Применение количественных методов в PI-теории берёт своё начало в 70-х годах прошлого века. Особенно интенсивно указанное направление развивалось в последние два десятилетия. Значительная часть достижений, полученных к середине нулевых годов нынешнего столетия отражена в [41]. В недавней публикации [47] проанализированы результаты применения в количественной PI-теории методов, базирующихся на комбинаторных свойствах бесконечных двоичных слов, в частности слов Штурма. Основной целью настоящей публикации является краткий обзор достижений последних лет, не вошедших в [41, 47].

Пусть F — поле нулевой характеристики. Каждой алгебре A над полем F можно поставить в соответствие целочисленную последовательность $\{c_n(A)\}$,

$n = 1, 2, \ldots$, характеризующую количество её тождественных соотношений. Обозначим через $F\{X\}$ абсолютно свободную алгебру с бесконечным множеством порождающих X. Неассоциативный полином $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\{X\}$ называется тождеством F-алгебры A, если $f = f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$. Совокупность $\mathrm{Id}(A)$ всех тождеств A является идеалом в $F\{X\}$, устойчивым относительно всех эндоморфизмов. Обозначим через P_n подпространство всех полилинейных полиномов от $x_1, \ldots, x_n$ в $F\{X\}$. Тогда $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$ состоит из всех полилинейных тождеств степени n алгебры A. Хорошо известно, что совокупность подпространств $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, однозначно задаёт идеал $\mathrm{Id}(A)$ в случае нулевой характеристики поля F.

Одной из важнейших количественных характеристик идеала $\mathrm{Id}(A)$ является последовательность коразмерностей $\{c_n(A)\}$, определяемых как

$$c_n(A) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}.$$

В общем случае последовательность коразмерностей может расти как гамма-функция. Например, если алгебра A не имеет тождеств, то

$$c_n(A) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \times n!.$$

Если A — свободная ассоциативная алгебра, то $c_n(A) = n!$. В случае свободной алгебры Ли L мы имеем $c_n(L) = (n-1)!$. В то же время существует широкий класс алгебр, у которых рост коразмерностей экспоненциально ограничен. Так, для любой ассоциативной алгебры A с нетривиальным тождеством (т. е. PI-алгебры) существует константа a, такая что $c_n(A) < a^n$ для всех $n \geqslant 1$ [15, 54]. В случае алгебр Ли наличие дополнительного тождества не гарантирует экспоненциальную ограниченность последовательности коразмерностей. Например, если L — относительно свободная алгебра Ли, заданная тождеством

$$[[[x_1, x_2], x_3], [[x_4, x_5], x_6]] \equiv 0,$$

то $c_n(L) \sim \sqrt{n!}$ (см. [3]). Однако для любой алгебры Ли с нильпотентным коммутантом, любой бесконечномерной простой алгебры Ли картановского типа, аффинной алгебры Каца—Муди имеет место ограничение $c_n(L) \leqslant a^n$ (см. [6, 19, 50]). Аналогичное неравенство верно и для любой конечно порождённой трёхступенно разрешимой алгебры Ли [6] и для любой супералгебры Ли с нильпотентным коммутантом [11]. Для произвольной конечномерной алгебры A выполняется следующее соотношение.

Теорема 1 [26, предложение 2.3; 44, предложение 2].

$$c_n(A) \leqslant (\dim A)^{n+1}. \tag{1}$$

Недавно экспоненциальная верхняя оценка роста коразмерностей получена для конечно порождённых метабелевых алгебр любой сигнатуры [9].

Если $c_n(A) \leqslant a^n$ для некоторой алгебры A, то последовательность $\{(c_n(A))^{1/n}\}$ ограниченная и у неё есть верхний и нижний пределы, называемые верхней и нижней PI-экспонентами A соответственно,

$$\overline{\exp}(A) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}, \quad \underline{\exp}(A) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

В случае существования обычного предела его называют (обычной) PI-экспонентой,

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

В 80-х годах прошлого века Ш. Амицур выдвинул гипотезу, утверждающую, что для любой ассоциативной PI-алгебры A её PI-экспонента $\exp(A)$ существует и является целым числом. Позднее А. Регев усилил гипотезу Амицура, предположив, что

$$c_n(A) \simeq Cn^t d^n$$

для любой ассоциативной PI-алгебры A, где d — положительное целое число, t — целое или полуцелое число, C — константа специального вида, а соотношение $f(n) \simeq g(n)$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Ясно, что гипотезы Амицура и Регева можно рассматривать не только для ассоциативных алгебр, но и для алгебр Ли или любых других неассоциативных алгебр.

Напомним, что функция $f(n)$ называется функцией промежуточного роста, если при стремлении n к бесконечности она растёт быстрее любого полинома, но медленнее любой показательной функции, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^t} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{a^n} = 0$$

для любого натурального t и любого вещественного $a > 1$. Таковыми являются, в частности, все функции вида n^{n^β}, где β — любое вещественное число, $0 < \beta < 1$. В общем неассоциативном случае существуют алгебры с промежуточным ростом коразмерностей. Так, в [34] для любого $\beta \in (0;1)$ построена алгебра R_β, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \log_n\bigl(\log_n c_n(R_\beta)\bigr) = \beta.$$

Но в наиболее важных классах алгебр промежуточный рост невозможен. Если A — ассоциативная PI-алгебра, то либо $c_n(A) \leqslant Cn^t$ для некоторых констант C, t, либо $c_n(A) \geqslant 2^n$ асимптотически [14]. Аналогичный результат доказан и для алгебр Ли [18]. В супералгебрах Ли промежуточный рост также невозможен, однако наилучшая нижняя оценка для показателя экспоненты, которую удалось получить к настоящему времени, равна $\sqrt{2}$ (см. [11]). Неизвестно, является ли эта оценка точной. Другим классом алгебр, не допускающих промежуточного роста, являются конечномерные алгебры [34]. Поэтому в дальнейшем мы анализируем в основном экспоненциальные и полиномиальные функции роста коразмерностей. Все необходимые сведения по теории алгебр с тождествами можно найти в [1, 32].

2. Экспоненциальный рост

Мы начнём с «наиболее классического» ассоциативного случая. Для любой ассоциативной PI-алгебры A гипотеза Амицура была подтверждена в полном объёме: $\exp(A)$ существует и является целым числом [39, 40]. На самом деле в [39, 40] доказан более сильный результат: для любой PI-алгебры A существуют такие константы $C_1 > 0$, C_2, t_1, t_2 и целое d, что

$$C_1 n^{t_1} d^n \leqslant c_n(A) \leqslant C_2 n^{t_2} d^n.$$

В частности, гипотеза Регева верна «в первом приближении», т. е. существует целочисленный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} = d, \tag{2}$$

а функция $c_n(A)/d^n$ полиномиально ограниченная. Для подтверждения гипотезы Регева в целом необходимо также доказать, что наряду с пределом (2) существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \log_n \left(\frac{c_n(A)}{d^n}\right) = t \tag{3}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n(A)}{n^t d^n} = C, \tag{4}$$

причём

$$t \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

Соотношение (3) было доказано в [28, 29] для алгебр с единицей. Более того, в [28] было показано, что предел (3) существует и является целым или полуцелым и для тех алгебр, для которых $\{c_n(A)\}$ — асимптотически неубывающая последовательность. В недавней публикации [45] показано, что для любой PI-алгебры неравенство $c_{n+1}(A) \geqslant c_n(A)$ выполняется для всех достаточно больших n. Это, в частности, означает, что гипотеза Регева верна и «во втором приближении», т. е. существуют оба предела (2), (3).

Теперь рассмотрим лиевский случай. Как уже отмечалось во введении, класс алгебр Ли L, для которых $c_n(L) \leqslant a^n$, необычайно широк. Существование и целочисленность PI-экспоненты были доказаны в [50] для всех алгебр Ли с нильпотентным коммутантом. В силу теоремы Ли этот класс включает все конечномерные разрешимые алгебры. Для произвольной конечномерной алгебры L существование экспоненты и её целочисленность подтверждены в серии работ [7,36,37]. Из результатов [5—7] следует, что PI-экспоненты существуют и являются целыми и для аффинных алгебр Каца—Муди. Для бесконечномерной простой алгебры Ли W_1 экспонента тоже существует, причём $\exp(W_1) = 4$ [16].

Однако для бесконечномерных алгебр Ли гипотеза о целочисленности PI-экспоненты не подтвердилась. Сначала была построена трёхступенно разрешимая алгебра Ли L, для которой

$$3{,}1 < \underline{\exp}(L),\ \overline{\exp}(L) < 3{,}9$$

(см. [57]). Позднее [2] было доказано, что экспонента этой алгебры существует, т. е.

$$\underline{\exp}(L) = \overline{\exp}(L) \approx 3{,}61.$$

Затем этот пример был обобщён до бесконечной серии алгебр Ли $L_1, L_2, \ldots$, для которой

$$3{,}6 < \exp(L_1) < \exp(L_2) < \ldots < 4$$

(см. [30, 49]). Для бесконечномерных простых алгебр Ли картановского типа целочисленность PI-экспоненты также не подтвердилась. В частности,

$$13{,}1 < \exp(W_2) \leqslant 13{,}5,$$

где $W_2 = \operatorname{Der} F[X, Y]$ — алгебра Ли дифференцирований кольца многочленов от двух переменных [25]. По всему с большой вероятностью можно утверждать, что верна следующая гипотеза.

Гипотеза. Экспонента многообразия, порождённого алгеброй W_k, существует и равна

$$\mathrm{EXP}(W_k) = k(k+1)\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Наряду с лиевскими алгебрами, наиболее близкими к ассоциативным алгебрам принято считать йордановы, альтернативные и некоторые другие алгебры [4]. Для конечномерных йордановых алгебр ситуация аналогична ассоциативному случаю.

Теорема 2 (см. [38, 42, 44]). *Пусть A — конечномерная йорданова алгебра. Тогда $\exp(A)$ существует и является целым числом.*

Следует заметить, что для любой конечномерной алгебры A, $\dim A = d$, в силу (1) выполняется неравенство $\overline{\exp}(A) \leqslant d$. Как показано в [7, 38, 39], для ассоциативных, лиевских и йордановых алгебр имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть A — конечномерная ассоциативная, йорданова или лиевская алгебра над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики размерности d. Тогда $\exp(A) \leqslant d$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда A проста.*

В общем неассоциативном случае ответы на многие вопросы, касающиеся гипотез Амицура и Регева, отрицательны. Сравнительно недавно был построен пример, опровергающий существование PI-экспоненты.

Теорема 4 [56, теорема 1]. *Для любого вещественного* $\alpha > 1$ *существует алгебра* A_α, *удовлетворяющая тождеству*

$$x(yz) \equiv 0, \tag{5}$$

для которой рост последовательности коразмерностей $\{c_n(A_\alpha)\}$ *экспоненциально ограничен, причём*

$$\underline{\exp}(A_\alpha) = 1, \quad \overline{\exp}(A_\alpha) = \alpha.$$

Даже в случае существования PI-экспоненты её значение не обязательно будет целым, как уже отмечено в лиевском случае, а последовательность коразмерностей может иметь промежуточный рост.

Теорема 5 [35, следствие 7.1]. *Для любого вещественного* $\alpha > 1$ *существует алгебра* A_α *с тождеством* (5), *для которой*

$$\exp(A_\alpha) = \alpha.$$

Теорема 6 [34, теорема 3]. *Для любого вещественного* $0 < \beta < 1$ *существует алгебра* A_β *с ростом коразмерностей* $c_n(A_\beta) \sim n^{n^\beta}$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \log_n\bigl(\log_n c_n(A_\beta)\bigr) = \beta.$$

Даже если A конечномерна и её PI-экспонента существует, то она не обязана быть целочисленной.

Теорема 7 [35, следствие 7.2]. *Для любых вещественных* $1 < \alpha < \beta$ *найдётся конечномерная алгебра* A, *такая что* $\alpha < exp(A) < \beta$. *В частности, множество точек*

$$\{\exp(R) \mid \dim R < \infty\}$$

всюду плотно на полуоси $(1; \infty)$.

В то же время конечномерные алгебры не допускают промежуточный рост коразмерностей.

Теорема 8 [34, теорема 2]. *Пусть* A — *конечномерная алгебра,* $\dim A = d$. *Тогда либо последовательность* $\{c_n(A)\}$ *полиномиально ограниченная, либо*

$$c_n(A)(A) > \frac{1}{n^2} 2^{n/(3d^3)}$$

для всех достаточно больших n.

Равенство $\exp(A) = \dim A$ для простых алгебр также не сохраняется в общем случае. Например, четырёхмерная алгебра W с базисом $\{e_{-1}, e_0, e_1, e_2\}$ и таблицей умножения

(a) $e_i e_0 = e_0 e_i = 0$ для всех $-1 \leqslant i \leqslant 2$;
(b) $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, если $i > j$, или $i + j < -1$, или $i + j > 2$;
(c) $e_i e_j = e_{i+j}$ во всех остальных случаях

проста, однако $\exp(W) \approx 3{,}610718614$ [12]. Более того, разность между размерностью и PI-экспонентой у простой алгебры может быть сколь угодно велика.

В [22] построена дискретная серия алгебр с единицей, размерности которых стремятся к бесконечности. Пусть A_m, $m \geqslant 3$, — алгебра размерности m с базисом a_s, $s = -1, 0, \ldots, m-2$. Определим таблицу умножения так, чтобы элемент a_0 был единицей алгебры, т. е. для любого s выполняются равенства $a_s a_0 = a_0 a_s = a_s$. Если же $i, j \neq 0$, то определим, что $a_i a_j = a_{i+j}$ при выполнении неравенств $i \geqslant j$ и $-1 \leqslant i+j \leqslant m-2$. В остальных случаях, т. е. когда или $i+j < -1$, или $i+j > m-2$, или $i < j$, произведение $a_i a_j = 0$ равно нулю. Отметим, что при $m \geqslant 3$ алгебра A_m является простой алгеброй с единицей. Кроме того,

$$3 = \exp(A_3) < \ldots < \exp(A_m) < \exp(A_{m+1}) < \ldots < 4.$$

Представляет также интерес вопрос об изменении характера роста последовательности коразмерностей при расширении алгебры A, в частности при добавлении к A внешней единицы. Обозначим через $A^{\#}$ алгебру, полученную из A присоединением внешней единицы. В [43] было отмечено, что для любой ассоциативной алгебры A либо $\exp(A^{\#}) = \exp(A)$, либо $\exp(A^{\#}) = \exp(A) + 1$ и обе возможности реализуются. В связи с этим в [8] была выдвинута гипотеза что $\exp(A^{\#})$ равна $\exp(A)$ или $\exp(A) + 1$ для любой алгебры A. Там же был построен первый нетривиальный пример неассоциативной алгебры A, для которой

$$\exp(A) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \quad \exp(A^{\#}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + 1.$$

Кроме того, было показано, что экспоненциальный рост коразмерностей унитарной алгебры не может быть «сколь угодно медленным».

Теорема 9. *Пусть A — конечномерная алгебра с единицей. Тогда либо рост последовательности $\{c_n(A)\}$ полиномиален, либо $\underline{\exp}(A) \geqslant 2$.*

Гипотеза о связи экспонент A и $A^{\#}$ была подтверждена для целого ряда серий неассоциативных алгебр [13, 55]. Недавно было показано, что $\overline{\exp}(A^{\#}) \leqslant \overline{\exp}(A) + 1$ для любой алгебры A, а если A удовлетворяет тождеству (5), то $\underline{\exp}(A^{\#}) \geqslant \underline{\exp}(A) + 1$ (см. [9]).

В заключение раздела отметим, что даже при существовании PI-экспоненты алгебры A гипотеза Регева неверна и во втором приближении, т. е. величина $c_n(A)/\big(\exp(A)\big)^n$ не аппроксимируется полиномом фиксированной степени.

Теорема 10 [46, теорема 2]. *Существует бесконечномерная алгебра с единицей A, у которой PI-экспонента равна 2, но для любого $q \geqslant 1$ найдётся бесконечно много таких n, что $c_n(A) \geqslant n^q 2^n$. В частности, у последовательности*

$$\left\{\log_n \frac{c_n(A)}{2^n}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

нет конечного предела.

3. Полиномиальный рост

Для некоторой фиксированной расстановки скобок T в полиномах обозначим P_n^T подпространство пространства P_n полиномов именно с такой расстановкой скобок. Пусть также $P_n^T(A) = P_n^T/\big(P_n^T \cap \mathrm{Id}(A)\big)$. Ясно, что $P_n(A) = \sum\limits_T P_n^T(A)$, причём сумма не обязательно является прямой. Например, так в ассоциативном случае, в котором $P_n^T = P_n$ для любой расстановки T.

Так как S_n-модуль $P_n^T(A)$ является гомоморфным образом регулярного модуля $P_n^T \equiv FS_n$, то для соответствующего разложения характера имеем

$$\chi_n(A)^T = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^T \chi_\lambda \tag{6}$$

и $m_\lambda^T \leqslant d_\lambda = \deg \chi_\lambda$. Ясно также, что $m_\lambda \leqslant \sum\limits_T m_\lambda^T$.

Начнём этот раздел с критерия полиномиальности роста коразмерностей.

Теорема 11 [33, теорема 2]. *Пусть A не обязательно ассоциативная алгебра над полем нулевой характеристики. Тогда последовательность коразмерностей $c_n(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, полиномиально ограниченная тогда и только тогда, когда*

1) *существует такое натуральное N, что для всех $n \geqslant 1$, $m_\lambda \neq 0$ в $\chi_n(A) = \sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ влечёт $n - \lambda_1 < N$ или $n - \lambda_1' < N$;*
2) *существуют такие константы C, k, что для каждого $n \geqslant 1$ существуют $m \leqslant Cn^k$ расположений скобок $T_1, \ldots, T_m$, таких что каждый полином $f \in P_n$ может быть записан как*

$$f \equiv \sum_{i=1}^m f_i \pmod{\mathrm{Id}(A)},$$

где $f_i \in P_n^{T_i}$.

Отметим, что условия теоремы не могут быть ослаблены. Например, рост коразмерностей свободной однопорождённой метабелевой алгебры является экспоненциальным. В этой алгебры выполнено первое условие теоремы, но не выполнено второе. Другие свойства многообразия, порождённого этой алгеброй, см. в [23].

Отметим, что критерии полиномиальности роста в случае ассоциативных алгебр и алгебр Ли были получены ранее в [14, 17, 27].

Пусть теперь A — упомянутая выше свободная однопорождённая метабелева алгебра с одним образующим a. Обозначим через L_c, R_c операторы умножения слева и справа на элемент c и будем писать $dL_c = cd$, $dR_c = dc$. Пусть $w = w_1 w_2 \ldots$ — бесконечное слово в алфавите 0, 1. Через $w(c) = w_1(c) w_2(c) \ldots$ обозначим слово в алфавите $\{L_c, R_c\}$, получаемое из w заменой 0 на L_c, а 1 на R_c. Рассмотрим идеал I_w алгебры A, порождённый всеми элементами $a^2 v(L_a, R_a)$, для которых слово $v(L_a, R_a)$ не является подсловом слова $w(a)$.

Фактор-алгебру A/I_w, в которой вместо смежного класса $a+I_w$ будем по-прежнему писать a, обозначим через A_w. Отметим, что ненулевыми мономами алгебры A_w будут элементы $a^2u(L_a,R_a)$, для которых слово $u(L_a,R_a)$ является подсловом слова $w(a)$.

Поясним, что многообразие линейных алгебр называется почти нильпотентным, если само оно не является нильпотентным, но любое собственное подмногообразие нильпотентно. Ниже приведено счётное семейство алгебр линейного роста, которые порождают различные почти нильпотентные многообразия.

Теорема 12 [21, теорема 1]. *Пусть w — бесконечное периодическое слово периода m. Тогда при $n \geqslant m+2$ выполнено равенство $c_n(A_w) = mn$, причём многообразия, порождённые алгебрами A_u, A_v, $u \neq v$, различны и являются почти нильпотентными.*

Словом Штурма называют бесконечное слово w, в котором для любого $n \geqslant 0$ существует ровно $n+1$ различных подслов w_i^n, $i = 1,\ldots,n+1$, длины n. Согласно эквивалентному геометрическому определению слов Штурма как иррациональных механических слов [48, теорема 2.1.13] каждому иррациональному числу из отрезка $[0;1]$ соответствует хотя бы одно слово Штурма. Рассмотрим континуальное множество M слов Штурма, соответствующих различным иррациональным числам из отрезка $[0;1]$.

Теорема 13 [24]. *Пусть $w \in M$ — слово Штурма. Тогда при $n \geqslant 3$ выполнено равенство*

$$c_n(A_w) = n^2 - 1.$$

Для различных слов $u, v \in M$ многообразия, порождённые словами u, v, различны и являются почти нильпотентными.

В [31] показано, что если A — ассоциативная алгебра, алгебра Ли или йорданова алгебра, то $c_n(A) = \alpha n^q + O(n^{q-1})$, где q — некоторое натуральное число, т. е. асимптотически последовательность коразмерностей ведёт себя как полиномиальная функция с целочисленным показателем степени. В [10] для общего случая линейных алгебр приведён пример алгебры с нарушением данного условия. В этой статье построена алгебра A, для которой доказана следующая теорема.

Теорема 14 [10, теорема 1]. *При $n \geqslant 25$ для многообразия A выполняется условие*

$$([\sqrt{n}\,]-2)\frac{n(n-1)(n-5)}{6} \leqslant c_n(A) \leqslant n^3\sqrt{n} + n^2(2n+3\sqrt{n}) + n^2.$$

Таким образом, доказано, что $c_n(A) \simeq n^{3,5}$. Отметим, что построенная алгебра является левонильпотентной ступени 2, т. е. в ней выполняется тождество (5). В этом классе алгебр анонсировано существование алгебр со следующими свойствами.

Теорема 15 [10, теорема 2]. *В случае нулевой характеристики основного поля для любого вещественного $3 < \alpha < 4$ существует линейная алгебра A_α,* *такая что при достаточно больших n выполняется условие*

$$C_1 n^\alpha < c_n(A_\alpha) < C_2 n^\alpha,$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные константы.

Отметим также, что недавно получен результат о невозможности дробной степени меньше 3 (см. [53]) при наличии тождества (5).

Алгебру с дробным полиномиальным ростом меньше 3 удалось найти в классе метабелевых алгебр, т. е. алгебр с тождеством $(xy)(zt) \equiv 0$ (см. [20]).

Отметим также следующие результаты, связанные с этой тематикой.

Теорема 16 [52, теорема 1]. *Пусть A — алгебра, причём $c_n(A) \leqslant Cn^\alpha$ для некоторых констант $C > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Тогда для достаточно больших n $c_n(A) \leqslant 1$.*

Теорема 17 [52, теорема 2]. *Пусть A — коммутативная алгебра, причём $c_n(A) \leqslant Cn^\alpha$ для некоторых констант $C > 0$ и $1 < \alpha < 2$. Тогда либо $c_n(A)$ ограничена некоторой константой, либо $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n c_n(A) = 1$.*

Теорема 18 [51, теорема 15]. *Пусть A — антикоммутативная алгебра, причём $c_n(A) \leqslant Cn^\alpha$ для некоторых констант $C > 0$ и $1 < \alpha < 2$. Тогда либо алгебра A нильпотентна, либо $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n c_n(A) = 1$.*

Работа первого автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 16-01-00113.

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[2] Верёвкин А. Б., Зайцев М. В., Мищенко С. П. Достаточное условие совпадения нижней и верхней экспонент многообразия линейных алгебр // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — № 2. — С. 36—39.

[3] Воличенко И. Б. Многообразие алгебр Ли с тождеством $[[X_1, X_2, X_3], [X_4, X_5, X_6]] = 0$ над полем характеристики нуль // Сиб. матем. журн. — 1984. — Т. 25, № 3. — С. 40—54.

[4] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[5] Зайцев М. В. Тождества аффинных алгебр Каца—Муди // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1996. — № 2. — С. 33—36.

[6] Зайцев М. В. Многообразия аффинных алгебр Каца—Муди // Матем. заметки. — 1997. — Т. 62, № 1. — С. 95—102.

[7] Зайцев М. В. Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли // Изв. РАН. Сер. матем. — 2002. — Т. 66, № 3. — С. 23—48.

[8] Зайцев М. В. Тождества конечномерных унитарных алгебр // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, № 5. — С. 563—594.

[9] Зайцев М. В. Рост коразмерностей метабелевых алгебр // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2017. — № 6. — С. 15—20.

[10] Зайцев М. В., Мищенко С. П. Пример многообразия линейных алгебр с дробным полиномиальным ростом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2008. — № 1. — С. 25—31.

[11] Зайцев М. В., Мищенко С. П. Тождества супералгебр Ли с нильпотентным коммутантом // Алгебра и логика. — 2008. — Т. 47, № 5. — С. 617—645.

[12] Зайцев М. В., Реповш Д. Четырёхмерная простая алгебра с дробной PI-экспонентой // Матем. заметки. — 2014. — Т. 95, № 4. — С. 538—553.

[13] Зайцев М. В., Реповш Д. Экспоненциальный рост коразмерностей тождеств алгебр с единицей // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 10. — С. 103—126.

[14] Кемер А. Р. Шпехтовость T-идеалов со степенным ростом коразмерностей // Сиб. матем. журн. — 1978. — Т. 19, № 1. — С. 54—69.

[15] Латышев В. Н. К теореме Регева о тождествах тензорного произведения PI-алгебр // УМН. — 1972. — Т. 27, № 4. — С. 213—214.

[16] Мищенко С. П. К проблеме энгелевости // Матем. сб. — 1984. — Т. 124, № 1. — С. 57—67.

[17] Мищенко С. П. О многообразиях полиномиального роста алгебр Ли над полем характеристики нуль // Матем. заметки. — 1986. — Т. 40, № 6. — С. 713—721.

[18] Мищенко С. П. О многообразиях алгебр Ли промежуточного роста // Весці АН БССР. — 1987. — № 2. — С. 42—45.

[19] Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли // УМН. — 1990. — Т. 45, № 6 (276). — С. 25—45.

[20] Мищенко С. П. Пример многообразия линейных алгебр с дробным полиномиальным ростом меньшим трёх // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2013. — № 3. — С. 51—54.

[21] Мищенко С. П. Бесконечные периодические слова и почти нильпотентные многообразия // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2017. — № 4. — С. 62—66.

[22] Мищенко С. П., Богданчук О. А. PI-экспоненты некоторых простых алгебр с единицей // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 4. — С. 121—128.

[23] Мищенко С. П., Верёвкин А. Б. О многообразиях с тождествами однопорождённой свободной метабелевой алгебры // Чебышёвский сб. — 2016. — Т. 17, № 2 (58). — С. 21—55.

[24] Мищенко С. П., Панов Н. П. Слова Штурма и несчётное множество почти нильпотентных многообразий квадратичного роста // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2017. — № 6. — С. 55—59.

[25] Мищенко С. С. Новый пример многообразия алгебр Ли с дробной экспонентой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — № 6. — С. 44—47.

[26] Bahturin Yu., Drensky V. Graded polynomial identities of matrices // Linear Algebra Appl. — 2002. — Vol. 357. — P. 15—34.

[27] Benediktovich I. I., Zalesskii A. E. T-ideals of free Lie algebras with polynomial growth of codimensions // Izv. Akad. Nauk BSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk. — 1980. — Vol. 3. — P. 5—10.

[28] Berele A. Properties of hook Schur functions with applications to p.i. algebras // Adv. Appl. Math. — 2008. — Vol. 41, no. 1. — P. 52—75.

[29] Berele A., Regev A. Asymptotic behaviour of codimensions of p.i. algebras satisfying Capelli identities // Trans. Am. Math. Soc. — 2008. — Vol. 360, no. 10. — P. 5155—5172.

[30] Bogdanchuk O. A., Mishchenko S. P., Verëvkin A. B. On Lie algebras with exponential growth of the codimensions // Serdica Math. J. — 2014. — Vol. 40, No. 3-4. — P. 209—240.

[31] Drensky V. Relations for the cocharacter sequences of T-ideals // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131. — P. 285—300.

[32] Drensky V. Free Algebras and PI-Algebras. — Singapore: Springer, 2000.

[33] Giambruno A., Mishchenko S. P. Polynomial growth of the codimensions: A characterization // Proc. Amer. Math. Soc. — 2010. — Vol. 138, no. 3. — P. 853—859.

[34] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Algebras with intermediate growth of the codimensions // Adv. Appl. Math. — 2006. — Vol. 37, no. 3. — P. 360—377.

[35] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Codimensions of algebras and growth functions // Adv. Math. — 2008. — Vol. 217, no. 3. — P. 1027—1052.

[36] Giambruno A., Regev A., Zaicev M. On the codimension growth of finite-dimensional Lie algebras // J. Algebra. — 1999. — Vol. 220, no. 2. — P. 466—474.

[37] Giambruno A., Regev A., Zaicev M. V. Simple and semisimple Lie algebras and codimension growth // Trans. Am. Math. Soc. — 2000. — Vol. 352, no. 4. — P. 1935—1946.

[38] Giambruno A., Shestakov I., Zaicev M. Finite-dimensional non-associative algebras and codimension growth // Adv. Appl. Math. — 2011. — Vol. 47, no. 1. — P. 125—139.

[39] Giambruno A., Zaicev M. On codimension growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. — 1998. — Vol. 140, no. 2. — P. 145—155.

[40] Giambruno A., Zaicev M. Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate // Adv. Math. — 1999. — Vol. 142, no. 2. — P. 221—243.

[41] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. — Providence: Amer. Math. Soc., 2005. — (Math. Surv. Monogr.; Vol. 122).

[42] Giambruno A., Zaicev M. Multialternating Jordan polynomials and codimension growth of matrix algebras // Linear Algebra Appl. — 2007. — Vol. 422, no. 2-3. — P. 372—379.

[43] Giambruno A., Zaicev M. Proper identities, Lie identities and exponential codimension growth // J. Algebra. — 2008. — Vol. 320, no. 5. — P. 1933—1962.

[44] Giambruno A., Zaicev M. Codimension growth of special simple Jordan algebras // Trans. Am. Math. Soc. — 2010. — Vol. 362, no. 6. — P. 3107—3123.

[45] Giambruno A., Zaicev M. Growth of polynomial identities: is the sequence of codimensions eventually non-decreasing? // Bull. London Math. Soc. — 2014. — Vol. 46, no. 4. — P. 771—778.

[46] Giambruno A., Zaicev M. Anomalies on codimension growth of algebras // Forum Math. — 2016. — Vol. 28, no. 4. — P. 649—656.

[47] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial identities and algebraic combinatorics on words // Sao Paulo J. Math. Sci. — 2016. — Vol. 10, no. 2. — P. 219—227.

[48] Lothaire M. Algebraic Combinatorics on Words. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.

[49] Malyusheva O. A., Mishchenko S. P., Verevkin A. B. The Lie algebras varieties series of different fractional exponents // Dokl. Bolg. AN. — 2013. — Vol. 66, no. 3. — P. 321—330.

[50] Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M. Exponents of varieties of Lie algebras with a nilpotent commutator subalgebra // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27, no. 5. — P. 2223—2230.

[51] Mishchenko S. P., Valenti A. On the growth of varieties of algebras // Contemp. Math. — 2009. — Vol. 499. — P. 229—245.

[52] Mishchenko S. P., Valenti A. Varieties with at most quadratic growth // Israel J. Math. — 2010. — Vol. 178. — P. 209—228.

[53] Mishchenko S., Valenti A. Varieties with at most cubic growth // J. Algebra. — 2019. — Vol. 518. — P. 321—342.

[54] Regev A. Existence of identities in $A \otimes B$ // Israel J. Math. — 1972. — Vol. 11. — P. 131—152.

[55] Repovs D., Zaicev M. Numerical invariants of identities of unital algebras // Commun. Algebra. — 2015. — Vol. 43, no. 9. — P. 3823—3839.

[56] Zaicev M. On existence of PI-exponents of codimension growth // Electron. Res. Announc. Math. Sci. — 2014. — Vol. 21. — P. 113—119.

[57] Zaicev M. V., Mishchenko S. P. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent // J. Math. Sci. — 1999. — Vol. 93, no. 6. — P. 977—982.