О мощности множества определяющих соотношений группы $F/\prod[N_i, N_j]$

О. В. КУЛИКОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: olga.kulikova@mail.ru

А. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ
Университет Вандербильта, США; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: alexander.olshanskiy@vanderbilt.edu

УДК 512.543.16

Ключевые слова: свободная группа, конечно определённая группа, взаимный коммутант, вербальное сплетение.

Аннотация

Данная работа является обобщением нашей работы «О конечной определённости группы $F/[M,N]$» на случай произвольного семейства нормальных подгрупп $\{N_i \mid i \in I\}$ свободной группы F. Получены условия, при которых фактор-группа $F/\prod[N_i, N_j]$ является конечно определённой группой. В обеих работах доказательство основного результата опирается на свойства вербальных сплетений, которые были введены Альфредом Львовичем Шмелькиным.

Abstract

O. V. Kulikova, A. Yu. Olshanskii, On the cardinality of relator sets of groups $F/\prod[N_i, N_j]$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 129—136.

The present paper generalizes the results of our paper "On the finite presentability of the group $F/[M,N]$" to an arbitrary family of normal subgroups $\{N_i \mid i \in I\}$ in a free group F. We obtain conditions for finite presentability of the quotient group $F/\prod[N_i, N_j]$. In both papers, the proof of the main result is based on the properties of verbal wreath products introduced by Alfred Lvovich Shmel'kin.

Введение

В [1] были охарактеризованы пары нормальных подгрупп M и N свободной группы F, для которых фактор-группа $F/[M,N]$ является конечно определённой группой. В настоящей работе результаты [1] переносятся на произвольное семейство $\{N_i \mid i \in I\}$ нормальных подгрупп в F и произведение их взаимных коммутантов $[N_i, N_j]$. Приводимые доказательства аналогичны доказательствам

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 4, с. 129—136.
© 2019 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

из [1] и опираются на свойства вербальных сплетений, которые были введены А. Л. Шмелькиным в 1965 году в [4].

В [5] содержится лемма о том, что если группа F конечно порождена, M и N — нормальные замыкания конечных множеств слов в F и MN — подгруппа конечного индекса в F, то $[M, N]$ является нормальным замыканием конечного множества элементов в F. Аналогом этой леммы будет следующая.

Лемма 1. *Если $N_1, \ldots, N_k$, $k \geqslant 2$, — нормальные замыкания конечных множеств элементов в конечно порождённой группе F и $\prod\limits_{i=1}^{k} N_i$ — группа конечного индекса в F, то $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant k} [N_i, N_j]$ является нормальным замыканием в F конечного множества элементов.*

Также в [5] (и [6]) рассматривается случай, когда индекс группы MN в свободной группе F бесконечен, и показано, что в этом случае при ряде ограничений на неединичные нормальные подгруппы M и N группа $F/[M, N]$ не является конечно определённой. В [1] этот факт доказывается в общем случае, без ограничений на M и N. Обобщая данный результат из [1] на $k \geqslant 2$ неединичных нормальных подгрупп $N_1, \ldots, N_k$ в F, получаем, что конечность индекса группы $\prod\limits_{i=1}^{k} N_i$ в свободной группе F является необходимым условием для конечной определённости группы $F/\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant k} [N_i, N_j]$. Более того, верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть F — свободная группа, I — произвольный непустой набор индексов, $\{N_i \mid i \in I\}$ — семейство неединичных нормальных подгрупп в F. Предположим, что группа $\prod\limits_{i \in I} N_i$ имеет бесконечный индекс $\aleph$ в F. Тогда для любого непустого подмножества $J \subseteq I \times I$ группа $\prod\limits_{(i,j) \in J} [N_i, N_j]$ не является нормальным замыканием в F никакого множества элементов мощности меньше $\aleph$.*

Следствие 1. *Пусть F — свободная группа бесконечного ранга $\aleph$, I — произвольный непустой набор индексов, $\{N_i \mid i \in I\}$ — семейство неединичных нормальных подгрупп в F. Тогда для любого непустого подмножества $J \subseteq I \times I$ группа $\prod\limits_{(i,j) \in J} [N_i, N_j]$ не является нормальным замыканием в F никакого множества элементов мощности меньше $\aleph$.*

В частности, из следствия 1 получаем, что если F — свободная группа бесконечного ранга, а $N_1, \ldots, N_k$, $k \geqslant 2$, — неединичные нормальные подгруппы в F, то $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant k} [N_i, N_j]$ не является нормальным замыканием никакого конечного множества элементов.

Применяя лемму 1 и теорему 1 к нормальным замыканиям конечных множеств слов в конечно порождённой свободной группе, получаем следующее обобщение теоремы 2 из [1].

Теорема 2. *Пусть F — конечно порождённая свободная группа, $N_1, \ldots, N_k$, $k \geqslant 2$, — неединичные нормальные подгруппы, являющиеся нормальными замыканиями конечных множеств слов в F. Тогда $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant k} [N_i, N_j]$ является нормальным замыканием конечного множества элементов тогда и только тогда, когда группа $\prod\limits_{i=1}^{k} N_i$ имеет конечный индекс в F.*

Отметим, что в лемме 1 и теореме 2 подгруппы N_i не обязаны быть различными, поэтому эти утверждения остаются верными и для произведения взаимных коммутантов $[N_i, N_j]$ без ограничения $i \neq j$. Кроме того, для произвольного (необязательно конечного) набора индексов I если $\{N_i \mid i \in I\}$ — семейство подгрупп, являющихся нормальными замыканиями конечных множеств элементов в конечно порождённой группе F, и группа $\prod\limits_{i \in I} N_i$ имеет конечный индекс в F, то $\prod\limits_{i,j \in I} [N_i, N_j]$ является нормальным замыканием конечного множества элементов. Действительно, в этом случае группа $\prod\limits_{i \in I} N_i$ конечно порождается как подгруппа, так как имеет конечный индекс в конечно порождённой группе F. Поэтому найдётся конечное подмножество $\tilde{I}$ в I, такое что

$$\prod_{i \in \tilde{I}} N_i = \prod_{i \in I} N_i, \quad \prod_{i,j \in \tilde{I}} [N_i, N_j] = \prod_{i,j \in I} [N_i, N_j],$$

а значит, применима лемма 1. Таким образом, получаем ещё один вариант обобщения теоремы 2 из [1].

Теорема 3. *Пусть F — конечно порождённая свободная группа, I — произвольный непустой (необязательно конечный) набор индексов, $\{N_i \mid i \in I\}$ — семейство неединичных нормальных подгрупп, являющихся нормальными замыканиями конечных множеств слов в F. Тогда группа $\prod\limits_{i,j \in I} [N_i, N_j]$ является нормальным замыканием в F конечного множества элементов тогда и только тогда, когда группа $\prod\limits_{i \in I} N_i$ имеет конечный индекс в F.*

Отметим также, что из теоремы 1 (точнее, уже из её аналога в [1]) следует, что для нетривиальных нормальных подгрупп $N_1, \ldots, N_k$, $k \geqslant 2$, свободной группы F из бесконечности группы $F/\prod\limits_{i=1}^{k} N_i$ следует, что $F/[N_1, \ldots, N_k]$ не является конечно определённой. Действительно, в этом случае $[N_1, \ldots, N_k] = [N_1, [N_2, \ldots, N_k]]$, а группа $N_1[N_2, \ldots, N_k]$ имеет бесконечный индекс в F, поэтому кратный коммутант $[N_1, \ldots, N_k]$ не является нормальным замыканием в F никакого конечного множества элементов. В частности, при $N_i = N$, $1 \leqslant i \leqslant k$, получаем результат из [6]: для нетривиальной нормальной подгруппы N свободной группы F из бесконечности группы F/N следует, что $F/\gamma_k(N)$ не является конечно определённой.

Доказательства

Ниже приводятся доказательства леммы 1, теоремы 1 и следствия 1.

Доказательство леммы 1. По [2, теорема 2.7] группа $L = \prod\limits_{i=1}^{k} N_i$ конечно порождается как подгруппа, так как имеет конечный индекс в конечно порождённой группе F. Значит, существуют конечно порождённые подгруппы $N_{(i)}$ в N_i, порождающие L, причём N_i — нормальные замыкания $N_{(i)}$ в F.

Пусть $X^{(i)}$ — конечные порождающие множества для $N_{(i)}$. Очевидно, что подгруппа

$$K = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} [N_i, N_j]$$

является нормальным замыканием в F всех коммутаторов $[x_i^f, y_j]$, где $x_i \in X^{(i)^{\pm 1}}$, $y_j \in X^{(j)^{\pm 1}}$, $i \neq j$, $f \in F$. Достаточно показать, что соотношения $[x_i^f, y_j] = 1$ группы F/K следуют из соотношений $[\bar{x}^h, \bar{y}] = 1$, где h пробегает некоторое множество представителей левых смежных классов F по L, а $\bar{x} \in X^{(i')^{\pm 1}}$, $\bar{y} \in X^{(j')^{\pm 1}}$, $i' \neq j'$. Пусть

$$f = hu_1 \dots u_s,$$

где

$$u_1, \dots, u_s \in \bigcup_{l=1}^{k} X^{(l)^{\pm 1}}.$$

Доказательство будем проводить индукцией по s. Очевидно, можно считать, что $s \geqslant 1$. Если $u_s = y$, где $y \in X^{(j)^{\pm 1}}$, то соотношение $[x_i^f, y_j] = 1$ следует из того, что по предположению индукции $x_i^{f'} = y^{-1} x_i^{f'} y = x_i^f$ и $[x_i^{f'}, y_j] = 1$, где $f' = hu_1 \dots u_{s-1}$. Если же $u_s = x$, где $x \notin X^{(j)^{\pm 1}}$, то соотношение $[x_i^f, y_j] = 1$ равносильно соотношению $[x_i^{f'}, xy_jx^{-1}] = 1$. Справедливость последнего соотношения следует из того, что по предположению индукции $xy_jx^{-1} = y_j$ и $[x_i^{f'}, y_j] = 1$. □

Доказательство теоремы 1. Фиксируем произвольное непустое подмножество $J \subseteq I \times I$. В процессе доказательства будут использоваться следующие обозначения: X — это множество свободных образующих свободной группы F;

$$K = \prod_{(i,j) \in J} [N_i, N_j], \quad L = \prod_{i \in I} N_i;$$

$\gamma_n(L)$ — это n-й член нижнего центрального ряда группы L.

Напомним, что нижний центральный ряд определяется по правилу

$$\gamma_1(L) = L, \ \gamma_2(L) = [\gamma_1(L), L], \dots, \ \gamma_n(L) = [\gamma_{n-1}(L), L], \dots$$

и является убывающим: $\gamma_1(L) \geqslant \gamma_2(L) \geqslant \ldots$. По [2, теорема 5.7 и следствие 5.7] пересечение всех членов нижнего центрального ряда $\gamma_n(L)$ в свободной группе равно единице. Поэтому существует такое число $c \in \mathbb{N}$, что группа

$$K = \prod_{(i,j)\in J} [N_i, N_j]$$

содержится в $\gamma_{c+1}(L)$, но не содержится в $\gamma_{c+2}(L)$. Тогда найдётся пара $(\alpha, \beta) \in J$, такая что N_α и N_β не содержатся в $\gamma_{c+1}(L)$.

Итак, для того чтобы доказать теорему 1, достаточно показать, что нормальное замыкание в F любого подмножества Y из $\gamma_{c+1}(L)$, $|Y| < \aleph$, не содержит K.

Далее рассуждения аналогичны рассуждениям в доказательстве теоремы 1 из [1] с тем отличием, что здесь в качестве L берётся $\prod\limits_{i\in I} N_i$ и показывается, что образ подгруппы $[N_\alpha, N_\beta]$ группы K не является единичным при гомоморфизме ψ_Z свободной группы F в S_Z для любого подмножества $Z \subseteq G$, мощность которого меньше $\aleph$.

Для полноты изложения приведём здесь эти рассуждения.

Рассмотрим вербальные сплетения А. Л. Шмелькина, введённые им в [4], точнее, c-нильпотентное сплетение S свободной c-нильпотентной группы $T(X')$, где X' равномощно X, и группы $G = F/L$, $L = \prod\limits_{i\in I} N_i$.

По определению S есть полупрямое произведение группы W и группы G, где W — c-нильпотентное произведение $|G|$ копий группы $T(X')$. При этом W является свободной c-нильпотентной группой с базисом

$$\{a_i \mid i = (x, h),\ x \in X,\ h \in G\}.$$

Группа G действует в W по правилу $g^{-1}a_i g = a_j$, где $i = (x, h)$, $j = (x, hg)$.

По [4, теорема 2.1] (см. также дополнение 1 к [3]) гомоморфизм ψ из F в S, отображающий $x \in X$ в $\tilde{x}a_{(x,1)}$, где $\tilde{x} = xL \in G = F/L$, имеет ядро $\gamma_{c+1}(L)$, т. е. образ H группы F изоморфен фактор-группе $F/\gamma_{c+1}(L)$. Согласно свойствам этого гомоморфизма пересечение H с W есть образ подгруппы L, и $HW = S$.

Далее рассмотрим произвольное подмножество Z в G, такое что $Z = Z^{-1}$.

Будем говорить, что два бииндекса $i = (x', h)$ и $j = (x'', g)$, где $x', x'' \in X$, $h, g \in G$, являются *Z-близкими*, если частное hg^{-1} их вторых компонент принадлежит Z, и *Z-далёкими* в противном случае.

Для фиксированного подмножества Z построим вспомогательное полупрямое произведение S_Z групп W_Z и G (так, что $S_Z = S$ при $Z = G$). Группа W_Z определяется следующим образом. В качестве порождающих для W_Z берём такие же порождающие a_i, как и для W, с теми же бииндексами i, а в качестве определяющих соотношений — левонормированные коммутаторы порождающих $[a_{i_1}, \ldots, a_{i_{c+1}}]$, такие что любые два бииндекса i_k и i_l в таком коммутаторе Z-близки. Очевидно, эти соотношения инвариантны относительно действия группы G на W_Z сопряжением, которое сдвигает вторые компоненты индексов порождающих a_i по закону $g^{-1}a_i g = a_j$, где $i = (x, h)$, $j = (x, hg)$.

При таком построении если $Z = \varnothing$, то $W_\varnothing$ — абсолютно свободная группа, а $S_\varnothing$ — полупрямое произведение этой свободной группы $W_\varnothing$ и G. Если $Z = G$, то $W_G = W$, а $S_G = S$. Другие варианты являются промежуточными между $W_\varnothing$ и W и соответственно между $S_\varnothing$ и S. При этом если $Z \subset Z' \subseteq G$, то группа S_Z естественно отображается на $S_{Z'}$ при гомоморфизме $\phi_{Z\subset Z'}$, который на группе G действует тождественно, а каждый порождающий элемент a_i группы W_Z отображает в порождающий элемент группы $W_{Z'}$ с тем же бииндексом.

Для любого подмножества $Z \subseteq G$ можно определить гомоморфизм ψ_Z из свободной группы F в S_Z, отображающий $x \in X$ в $\tilde{x}a_{(x,1)}$, где $\tilde{x} = xL \in G = F/L$, а $a_{(x,1)}$ — порождающие группы W_Z. Так как $S_Z = GW_Z$ и $\tilde{x}$ порождают G, получаем, что $S_Z = H_Z W_Z$, где $H_Z = \psi_Z(F)$. Кроме того, $\psi = \psi_G$ и $\psi = \phi_{Z\subseteq G}\psi_Z$ для любого $Z \subseteq G$.

Напомним, что $\gamma_{c+1}(L)$ — это ядро гомоморфизма $\psi\colon F \to S$. С другой стороны, это ядро есть объединение ядер гомоморфизмов ψ_Z в группы S_Z со всевозможными конечными $Z \subseteq G$. Поэтому для любого подмножества Y из $\gamma_{c+1}(L)$ каждый элемент $y \in Y$ лежит в ядре гомоморфизма ψ_{Z_y} для некоторого конечного подмножества Z_y в G. Тогда само Y лежит в ядре гомоморфизма $\psi_Z\colon F \to S_Z$ для подмножества $Z = \bigcup\limits_{y\in Y} Z_y$, причём если $|Y| < \aleph$, то и $|Z| < \aleph$.

Следовательно, для того чтобы показать, что нормальное замыкание в F любого подмножества Y из $\gamma_{c+1}(L)$, $|Y| < \aleph$, не содержит K, достаточно показать, что образ группы K не является единичным при гомоморфизме ψ_Z свободной группы F в S_Z для любого подмножества $Z \subseteq G$, $|Z| < \aleph$.

Поскольку группы N_α и N_β не лежат в $\gamma_{c+1}(L)$, найдутся элементы $u \in N_\alpha$ и $v \in N_\beta$, чьи образы в группе S не равны единице. При этом их образы при гомоморфизме ψ лежат в W, так как N_α и N_β лежат в L. Тогда не являются единичными их образы u' и v' в группе W_Z и при гомоморфизме ψ_Z из F в S_Z, так как $\psi = \phi_{Z\subseteq G}\psi_Z$.

Напомним, что вторые компоненты бииндексов порождающих a_i группы W_Z умножаются справа на g при сопряжении элементом $g \in G$. Ввиду того что мощность множества Z меньше мощности группы G, найдётся элемент $g \in G$, такой что бииндекс любого порождающего в некотором представлении элемента

$$u'' = g^{-1}u'g \tag{1}$$

в виде произведения порождающих $a_i^{\pm 1}$ будет Z-далёким от бииндекса любого порождающего в некотором представлении элемента v' в виде произведения порождающих $a_i^{\pm 1}$.

Лемма 2. *Пусть u'' и v' — неединичные элементы в W_Z, такие что бииндекс любого порождающего в некоторой записи элемента u'' Z-далёк от бииндекса любого порождающего в некоторой записи элемента v'. Тогда для любого элемента $w \in W_Z$ элементы $w^{-1}u''w$ и v' не коммутируют.*

Доказательство. Пусть A — подгруппа в W_Z, порождённая теми a_i, которые входят в запись элемента u''. Аналогично определяется подгруппа B для

элемента v'. Рассмотрим свободное произведение $A * B$. Определим гомоморфизм из группы W_Z на $A * B$, оставляющий на месте порождающие для A и B и переводящий остальные порождающие в единицу. Это определение корректно, так как построенное отображение сохраняет определяющие соотношения группы W_Z. При этом образ u'' останется в A, а образ v' — в B. Теперь утверждение леммы следует из того, что неединичные элементы, сопряжённые с элементами из разных множителей свободного произведения, не коммутируют. □

Окончим теперь доказательство теоремы 1.

Так как $G \leqslant S_Z = H_Z W_Z$, для элемента g существуют $h \in H_Z$ и $w \in W_Z$, такие что $g = hw^{-1}$. Из (1) получаем, что $u'' = wh^{-1}u'hw^{-1}$. Следовательно, $w^{-1}u''w = h^{-1}u'h$. Так как $h \in H_Z = \psi_Z(F)$ и $u' \in \psi_Z(N_\alpha)$, получаем, что $h^{-1}u'h \in \psi_Z(N_\alpha)$, и значит, $w^{-1}u''w \in \psi_Z(N_\alpha)$.

Так как $u'', v', w \in W_Z$ и бииндекс любого порождающего в записи элемента u'' Z-далёк от бииндекса любого порождающего в записи элемента v', то по лемме 2 элементы $w^{-1}u''w$ и v' не коммутируют. Поэтому, учитывая, что $w^{-1}u''w \in \psi_Z(N_\alpha)$ и $v' \in \psi_Z(N_\beta)$, получаем, что образ группы $[N_\alpha, N_\beta]$ не является единичным в S_Z, а значит, и образ группы K не является единичным в S_Z, что и требовалось доказать. □

Доказательство следствия 1. Фиксируем произвольное непустое подмножество $J \subseteq I \times I$. Допустим, что

$$K = \prod_{(i,j)\in J} [N_i, N_j]$$

является нормальным замыканием в свободной группе F некоторого множества $Y \subseteq K$, мощность которого меньше $\aleph$.

Так как каждый элемент $y \in Y$ можно представить в виде произведения конечного числа коммутаторов $[n_i, n_j]$, где $n_i \in N_i$, $n_j \in N_j$, $(i,j) \in J$, то

$$Y \subseteq \prod_{(i,j)\in \tilde{J}} [\tilde{N}_i, \tilde{N}_j],$$

где $\tilde{J}$ — непустое подмножество в J, $|\tilde{J}| < \aleph$, а каждая $\tilde{N}_i$ — неединичная подгруппа в N_i, являющаяся нормальным замыканием некоторого множества мощности меньше $\aleph$. При этом

$$\prod_{(i,j)\in \tilde{J}} [\tilde{N}_i, \tilde{N}_j] = K.$$

Обозначим через $\tilde{I}$ наименьшее подмножество множества I, такое что $\tilde{J} \subseteq \subseteq \tilde{I} \times \tilde{I}$. Очевидно, что $|\tilde{I}| < \aleph$.

Так как F имеет бесконечный ранг $\aleph$, то группа $\prod\limits_{i\in\tilde{I}} \tilde{N}_i$ имеет индекс $\aleph$ в F. Применяя теорему 1 к $\{\tilde{N}_i \mid i \in \tilde{I}\}$, получаем, что группа $\prod\limits_{(i,j)\in\tilde{J}} [\tilde{N}_i, \tilde{N}_j]$,

совпадающая с K, не является нормальным замыканием в F никакого множества элементов мощности меньше $\aleph$. Полученное противоречие доказывает следствие 1. $\square$

Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ № 15-01-05823, а второй автор поддержан также грантом Национального научного фонда США № DMS-1500180.

Литература

[1] Куликова О. В., Ольшанский А. Ю. О конечной определённости группы $F/[M,N]$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2006. — № 6. — С. 19—21.

[2] Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. — М.: Наука, 1974.

[3] Нейман Х. Многообразия групп. — М.: Мир, 1969.

[4] Шмелькин А. Л. Сплетения и многообразия групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1965. — Т. 29, № 1. — С. 149—170.

[5] Abarbanel J., Rosset S. The Schur multiplier of $F/[R,S]$ // J. Pure Appl. Algebra. — 2005. — Vol. 198. — P. 1—8.

[6] Baumslag G., Strebel R., Thomson W. On the multiplicator of $F/\gamma_c R$ // J. Pure Appl. Algebra. — 1980. — Vol. 16. — P. 121—132.