Инварианты классических кос со значениями в G_n^2

В. О. МАНТУРОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: vomanturov@yandex.ru

УДК 515.162+512.54

Ключевые слова: коса, группа, динамика.

Аннотация

Цель настоящей заметки — усиление групп G_n^3 и построение новых инвариантов классических кос. В частности, мы строим инварианты со значениями в группах G_N^2. В группах G_n^2 решена проблема тождества, при этом они гораздо проще групп G_n^3.

Abstract

V. O. Manturov, Invariants of classical braids valued in G_n^2, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 137—146.

The aim of the present note is to enhance groups G_n^3 and to construct new invariants of classical braids. In particular, we construct invariants valued in G_N^2 groups. In groups G_n^2, the identity problem is solved; besides, their structure is much simpler than that of G_n^3.

1. Введение

В [3] автор ввёл определение семейства групп G_n^k, зависящих от двух натуральных чисел $n > k$, и сформулировал следующий принцип: если динамическая система, описывающая движение n частиц, допускает некоторое хорошее свойство общего положения коразмерности 1, зависящее ровно от k частиц, то у этой динамической системы есть инварианты со значениями в группе G_n^k.

Мы не будем формулировать определение хорошего свойства в наибольшей общности.

В [5] был явно вычислен частный случай этого общего принципа: рассматривая непрерывное движение n попарно различных точек по плоскости и выбирая в качестве свойства «три точки лежат на одной прямой» (для $k = 3$), мы получаем гомоморфизм из группы PB_n крашеных кос из n нитей в группу G_n^3. Это позволяет получать дальнейшие мощные инварианты классических кос. В [4] приведены применения групп G_n^k при $k > 3$ к фундаментальным группам других конфигурационных пространств.

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 4, с. 137—146.

Приведём определение группы ${}'G^3_n$, $n \geqslant 3$, уточняющей группу G^3_n. Группа ${}'G^3_n$ задаётся копредставлением, имеющим $3\binom{n}{3}$ образующих a'_{ijk}, которые индексируются тройками различных чисел $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ с точностью до обращения порядка. Так, $a'_{123} = a'_{321} \neq a'_{132}$. Группа ${}'G^3_n$ задаётся копредставлением

$$ {}'G^3_n = \langle a'_{ijk} \mid (1),\ (2),\ (3) \rangle, $$

где

$$ (a'_{ijk})^2 = 1, \quad i, j, k \in \{1, \ldots, n\} \text{ попарно различны;} \tag{1} $$

$$ \begin{gathered} a'_{ijk} a'_{pqr} = a'_{pqr} a'_{ijk}, \quad i, j, k, p, q, r \in \{1, \ldots, n\}, \\ \operatorname{Card}(\{i, j, k\}) = \operatorname{Card}(\{p, q, r\}) = 3, \quad \operatorname{Card}(\{i, j, k\} \cap \{p, q, r\}) \leqslant 1; \end{gathered} \tag{2} $$

$$ \begin{gathered} a'_{ijk} a'_{ijl} a'_{ikl} a'_{jkl} = a'_{jkl} a'_{ikl} a'_{ijl} a'_{ijk} = 1, \\ i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\} \text{ попарно различны.} \end{gathered} \tag{3} $$

Группа G^3_n получается из группы ${}'G^3_n$ отождествлением образующих, у которых тройки индексов совпадают как множества: образующая a_{ijk} группы G^3_n равна образу каждого из элементов a'_{ijk}, a'_{jik}, a'_{ikj}.

Отметим, что ${}'G^3_3$ является свободным произведением трёх групп $\mathbb{Z}_2$, а группа ${}'G^3_4$ не имеет соотношений типа (2), так как любые два подмножества мощности 3 множества $\{1, 2, 3, 4\}$ имеют пересечение мощности не меньше 2. При рассмотрении групп G^3_n обычно требуется $n > 3$, однако группа ${}'G^3_3$ уже представляет интерес.

Далее нам понадобится также группа $G^2_{n(n-1)}$, однако в её определении (в отличие от стандартных определений групп G^2_N, см., например, [2, 3]) индексы p, q образующих $a_{p,q}$ будут представлять собой не элементы множества $\{1, \ldots, n(n-1)\}$, а упорядоченные пары различных элементов от 1 до n. Так, образующими группы будут, например, $a_{12,34}$, $a_{12,31}$. Соотношения в группе стандартные: $a^2_{p,q} = 1$ для любой образующей $a_{p,q}$, а также $a_{p,q} a_{r,s} = a_{r,s} a_{p,q}$ для попарно различных упорядоченных p, q, r, s и $(a_{p,q} a_{p,r} a_{q,r})^2 = 1$ для попарно различных p, q, r.

Так, например, $a_{12,23}$ коммутирует с $a_{21,24}$, поскольку $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$ — разные упорядоченные множества.

Ключевое значение для нашей работы имеет следующая лемма.

Лемма 1. *Отображение $\phi\colon {}'G^3_n \to G^2_{n(n-1)}$, задаваемое по формуле*

$$ a'_{ijk} \mapsto a_{ij,ik} a_{kj,ki}, $$

корректно определено.

Отметим сначала, что два сомножителя $a_{ij,ik}$ и $a_{kj,ki}$ коммутируют; мы получаем необходимое нам равенство $\phi(a'_{ijk}) = \phi(a'_{kji})$, так как $a'_{kji} = a'_{ijk}$.

Эта лемма проверяется непосредственной выкладкой. Приведём проверку самого интересного соотношения:

$$(a'_{ijk}a'_{ijl}a'_{ikl}a'_{jkl})^2 \mapsto (a_{ij,ik}a_{kj,ki}a_{ij,il}a_{lj,li}a_{ik,il}a_{lk,li}a_{jk,jl}a_{lk,lj})^2 = \\ = (a_{ij,ik}a_{ij,il}a_{ik,il})^2(a_{lj,li}a_{lk,li}a_{lk,lj})^2 a_{jk,jl}^2 a_{kj,ki}^2 = 1.$$

Отметим важное самостоятельное значение этой леммы. Для группы G_N^2 имеется простой критерий минимальности слова (см., например, [1]): слово g в стандартном копредставлении G_N^2 имеет минимальную длину тогда и только тогда, когда ни одно из слов $\tilde{g}$, эквивалентных слову g посредством преобразований замен $a_{p,q}a_{p,r}a_{q,r} \mapsto a_{q,r}a_{p,r}a_{p,q}$ и коммутативности $a_{pq}a_{rs} \mapsto a_{rs}a_{pq}$, не содержит двух подряд идущих одинаковых букв $a_{p,q}a_{p,q}$ (в нашем случае $N = n(n-1)$ каждая из букв p, q, r, s сама представляет собой пару индексов). Таким образом, мы получаем *достаточное условие минимальности* для слов из $'G_n^3$: если образ $\phi(\alpha)$ минимален, то и само слово α минимально.

Автору неизвестно, является ли отображение ϕ инъекцией; это является важной открытой проблемой. Важной проблемой является также и то, можно ли построить какое-либо отображение, аналогичное отображению ϕ, из G_n^3 в какую-либо группу $G_{M(n)}^2$ (для достаточно большого числа $M(n)$, зависящего от n). Положительное решение этих проблем могло бы пролить свет на проблему тождества в группах G_n^k при $k > 2$.

2. Построение основного инварианта

Перейдём теперь к построению отображения f, ставящего в соответствие крашеной косе $\beta \in \mathrm{PB}_n$ $(n \geqslant 3)$ элемент из $'G_n^3$. Мы будем иметь дело с крашеными косами, у которых в начальный и конечный моменты точки расположены равномерно по окружности: $z_j(0) = \exp(2\pi j/n)$. Под *косой* мы понимаем набор гладких функций $\beta(t) = \{z_1(t), \ldots, z_n(t)\}$, $t \in [0,1]$, со значениями в $\mathbb{C}^1 = \mathbb{R}^2$, таких что $\beta(0) = \beta(1)$ совпадает с указанным выше начальным набором, при этом все $z_i(t)$ попарно различны при всех t. *Критическим моментом* мы называем такое значение t, при котором найдутся некоторые три индекса i, j, k, такие что $z_i(t)$, $z_j(t)$, $z_k(t)$ коллинеарны.

Назовём косу *хорошей и стабильной*, если для неё

1) множество критических моментов конечно;
2) в каждый критический момент t имеется ровно одна тройка индексов (i,j,k), для которой $z_i(t), z_j(t), z_k(t)$ коллинеарны;
3) при любом достаточно малом шевелении косы количество критических моментов не меняется (стабильность).

Любую косу сколь угодно малым шевелением можно сделать хорошей и стабильной.

Хорошей и стабильной крашеной косе β естественным образом ставится в соответствие слово в образующих a'_{ijk}: каждому критическому моменту t_l, которому соответствуют три точки с индексами (i_l, j_l, k_l) на одной прямой с точкой j_l в середине, мы ставим в соответствие образующую a'_{i_l,j_l,k_l}. Слово $f(\beta)$ представляет собой произведение всех образующих, соответствующих критическим моментам, в порядке возрастания t.

Теорема 1. *Построенное выше отображение $\beta \mapsto f(\beta)$ является гомоморфизмом группы крашеных кос PB_n в группу ${}'G_n^3$.*

Замечание 1. Для кос, которые не являются крашеными, указанный выше способ также определяет отображение из кос в элементы группы PB_n, если, например, фиксировать положения точек в начальный и конечный момент, но не фиксировать их порядок, но это отображение не является гомоморфизмом.

Доказательство этой теоремы по существу повторяет доказательство теоремы из [5] про отображение из PB_n в G_n^3. Мы пользуемся стандартным принципом [3], связанным с тем, что при изотопии двух кос достаточно рассматривать сингулярности коразмерности 2. Подобно тому как сингулярности коразмерности 1 (тройки коллинеарных точек) задают образующие, соотношения соответствуют следующим сингулярностям коразмерности 2 (см. [5]):

1) нестабильная тройная точка, которая исчезает при малом шевелении; это соответствует соотношению ${a'_{ijk}}^2 = 1$;
2) совпадение двух моментов времени, когда имеются независимые тройные точки; это соответствует соотношениям $a'_p a'_q = a'_q a'_p$, где тройки p, q имеют не более одного общего индекса;
3) четыре коллинеарные точки; это приводит к соотношению, где в левой части имеется произведение четырёх образующих, а в правой части — произведение тех же образующих в обратном порядке. Это соотношение можно иначе представить как «циклическую» деформацию динамики, состоящую из восьми элементарных деформаций. Эти четыре образующие представляют собой все возможные тройки индексов из числа четырёх данных индексов, например a'_{ijk}, a'_{ijl}, a'_{ikl}, a'_{jkl}. Единственное новшество по сравнению с [5] состоит в том, что соотношение в группе ${}'G_n^3$ более точно, чем в рассматриваемой в [5] группе G_n^3. Рассматривая прямую, проходящую через четвёрки точек, и упорядочивая номера точек на этой прямой i, j, k, l, можно непосредственно проверить, что в рассматриваемой циклической деформации образующая a'_{ijk} (соответствующая трём точкам на одной прямой с точкой номер j в середине) не может соседствовать с образующей a'_{ikl}. Таким образом, из левой части слова в соотношении (3) циклической перестановкой и обращением порядка получается некоторый цикл. Таких слов восемь. Так как квадрат каждой из образующих равен единице, то слово, получаемое обращением порядка, является обратным к исходному.

Произведению крашеных кос по построению соответствует произведение слов.

Из сказанного выше вытекает доказательство теоремы 1.

Группа PB_n крашеных кос из n нитей может быть представлена образующими и соотношениями

$$b_{ij}b_{kl} = b_{kl}b_{ij}, \quad i<j<k<l \text{ или } i<k<l<j,$$
$$b_{ij}b_{ik}b_{jk} = b_{ik}b_{jk}b_{ij} = b_{jk}b_{ij}b_{ik}, \quad i<j<k,$$
$$b_{jl}b_{kl}b_{ik}b_{jk} = b_{jl}b_{kl}b_{ik}b_{jk}, \quad i<j<k<l.$$

Для любых различных индексов i, j, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, мы определяем элемент ${c'}_{i,j}$ группы ${}'G_n^3$ как

$${c'}_{i,j} = \prod_{k=j+1}^{n} a'_{j,i,k} \cdot \prod_{k=1}^{j-1} a'_{j,i,k}$$

(произведение берётся по всем $k \neq i$, $k \neq j$).

Предложение 1. $f(b_{ij}) \mapsto {c'}_{i,i+1}^{-1} \ldots {c'}_{i,j-1}^{-1} {c'}_{j,i}^{2} {c'}_{i,j-1} \ldots {c'}_{i,i+1}$, $i<j$.

Доказательство. Рассмотрим конфигурацию из n точек $z_k(0) = e^{2\pi ik/n}$, $k = 1,\ldots,n$, на плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ (все точки лежат на одной окружности $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$).

Для любых $i<j$ крашеная коса b_{ij} может быть представлена в виде следующей динамической системы:

1) точка i движется вдоль внутренней стороны окружности C, проходит точки $i+1, i+2, \ldots, j-1$ и приходит в точки непосредственно перед j (рис. 1 сверху слева);

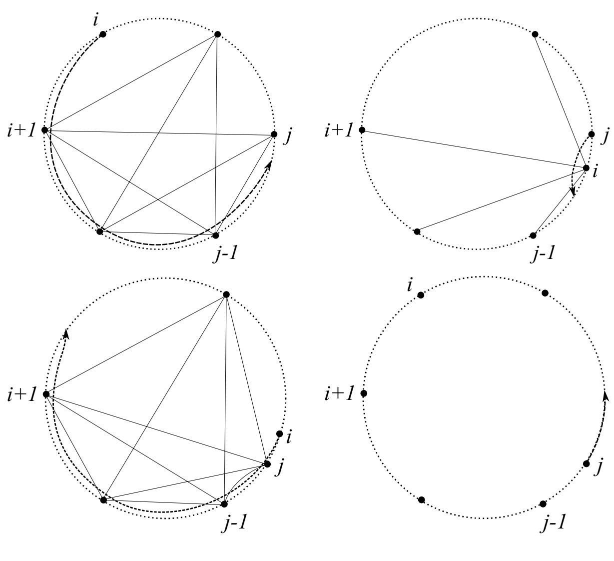

Рис. 1. Динамическая система, соответствующая b_{ij}

2) точка j движется над точкой i (рис. 1 справа сверху);
3) точка i возвращается в своё начальное положение над точками $j, j-1, \ldots, i+1$ (рис. 1 слева снизу);
4) точка j возвращается в исходное положение (рис. 1 справа снизу).

Рассматривая те моменты, когда некоторые три точки лежат на одной прямой, мы получаем слово, в точности равное

$$c'^{-1}_{i,i+1} \ldots c'^{-1}_{i,j-1} c'^{2}_{i,j} c'_{i,j-1} \ldots c'_{i,i+1}. \qquad \square$$

Следствие 1. *Отображение $\Phi = \phi \circ f$ является гомоморфизмом*

$$\mathrm{PB}_n \to G^2_{n(n-1)}.$$

Как видно из конструкции выше, отображение Φ можно было построить и не прибегая к промежуточной группе $'G^3_n$: для динамики общего положения можно было сразу записать произведение двух элементов из $G^2_{n(n-1)}$.

Построенное отображение f является обобщением довольно сильного инварианта классических кос, построенного в [5]. Композиция $\Phi = \phi \circ f$ вычисляется на косах довольно просто. Скажем, образующей группы крашеных кос из трёх нитей, у которой первая и вторая точки являются неподвижными, а третья обходит вокруг второй, соответствует произведение четырёх образующих группы $G^2_{n(n-1)}$: два момента, соответствующие тройкам коллинеарных точек в разных порядках, приводят к слову длины 4 в группе $'G^3_3 = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Построим гомоморфизм из группы $'G^3_n$ в автоморфизм свободного произведения нескольких групп $\mathbb{Z}_2$, который «по духу» похож на действие Гурвица группы кос на свободной группе. А именно, зададим образ образующей $g \sim g(a'_{ijk})$ как

$$g\colon a_{ij} \mapsto a_{ik} a_{ij} a_{ik}, \;\; a_{kj} \mapsto a_{ki} a_{kj} a_{ki}, \;\; a_m \mapsto a_m, \text{ где } m \neq \{ij\}, \{kj\}.$$

Теорема 2. *Отображение g является корректно определённым гомоморфизмом.*

Доказательство. Достаточно непосредственной проверки соотношений группы $'G^3_n$. Можно заметить некоторую схожесть проверки самого главного соотношения (3) с третьим движением Рейдемейстера. Доказательство похоже на доказательство леммы 1.

Под действием квадрата a'^{2}_{ijk} элемент a_{ij} дважды сопрягается элементом a_{ik}, что оставляет его на месте; аналогично для a_{kj} и a_{ki}.

«Дальняя коммутативность» $a'_p a'_q = a'_q a'_p$ при $|p \cap q| \leqslant 1$ вытекает из того, что пары индексов, участвующие в сопряжениях, происходящих из p, отличны от пар индексов, участвующих в сопряжениях, происходящих из q.

Для соотношения $a'_{ijk} a'_{ijl} a'_{ikl} a'_{jkl} = a'_{jkl} a'_{ikl} a'_{ijl} a'_{ijk}$ правая и левая часть действуют одинаково: $a_{ij} \mapsto a_{il} a_{ik} a_{ij} a_{ik} a_{il}$, $a_{ik} \mapsto a_{il} a_{ik} a_{il}$, $a_{jk} \mapsto a_{jl} a_{jk} a_{jl}$; аналогично вычисляется действие на a_{kj}, a_{lj}, a_{lk}. $\square$

3. Ещё одно обобщение групп G_n^k

Приведём пример ещё одной геометрической конструкции, доставляющей инварианты классических кос. Как и приведённые выше конструкции, она опирается на наличие некоторого *свойства коразмерности* 1 *общего положения*. Оно состоит в следующем. Мы рассматриваем движение набора из n точек $z_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, внутри единичного круга

$$D = \{|z| < 1\} = \{x, y, x^2 + y^2 < 1\}.$$

Легко проверяется, что через каждые две различные точки внутри круга можно провести ровно две окружности, касающиеся абсолюта $|z| = 1$. Нас интересуют те моменты, когда некоторые три точки $z_i(t)$, $z_j(t)$, $z_k(t)$ лежат на окружности, касающейся абсолюта.

Далее при рассмотрении окружности, касающейся абсолюта, мы будем нумеровать расположенные на ней точки против часовой стрелки, начиная от точки касания. Мы будем говорить, что точка a *предшествует* точке b, если при обходе окружности, начиная с точки касания X против часовой стрелки, мы сначала проходим a, а затем b.

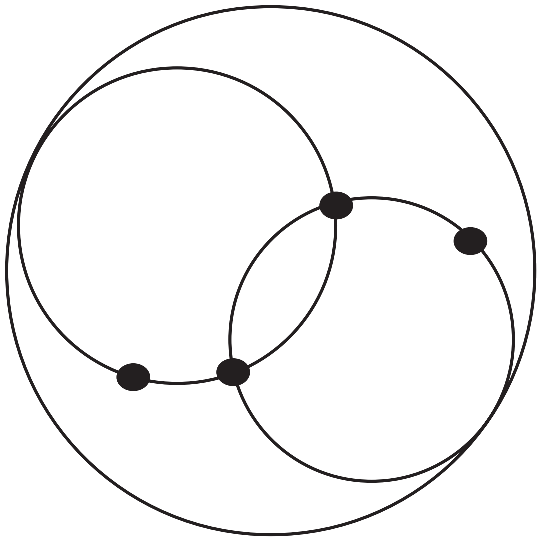

Рис. 2. Две окружности, касающиеся абсолюта

В отличие от рассматривавшихся в $[3, 5]$ k-свойств («три точки лежат на одной прямой» для $k = 3$, «четыре точки лежат на одной окружности» для $k = 4$) это свойство обладает одной особенностью. Окружностей, проходящих через две точки заданные точки и касающихся абсолюта, имеется две, а не одна. Более точно это можно сформулировать следующим образом: из того что три точки a, b, c лежат на окружности, касающейся абсолюта, и три точки a, b, d лежат на окружности, касающейся абсолюта, не следует, что все четыре точки a, b, c, d лежат на окружности, касающейся абсолюта.

Легко убедиться, что верно следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если точки a, b, c лежат на одной окружности, касающейся абсолюта, и точки a, b, d лежат на одной окружности, касающейся абсолюта, причём на обеих окружностях точка a предшествует точке b, то все четыре точки a, b, c, d лежат на одной окружности, касающейся абсолюта.*

Умение работать с такими ситуациями является весьма важным, так как при изучении динамических систем движения нескольких точек свойства коразмерности 1 могут быть связаны с более сложными кривыми, такими что через каждый набор из $k-1$ точки проходит фиксированное конечное количество кривых данного типа. Это даёт обобщение G_n^k-подхода и приводит к следующей группе (в нашем случае $k=3$). Фиксируем количество точек n.

Определение 1. Группа $''G_n^3$ — это группа

$$''G_n^3 = \langle a''_{ijk} \mid (4),\ (5),\ (6)\rangle,$$

имеющая $n(n-1)(n-2)$ образующих a''_{ijk}, где i, j, k пробегают все возможные *упорядоченные* тройки чисел от 1 до n, и три вида соотношений:

$$a''^{\,2}_{ijk} = 1 \quad \text{для всех попарно различных } i,j,k; \tag{4}$$

$$a''_{ijk}a''_{pqr} = a''_{pqr}a''_{ijk}, \quad \text{если ни одна из упорядоченных пар } \{i,j\},\ \{i,k\},\ \{i,l\}$$
$$\text{не совпадает ни с одной из упорядоченных пар } \{p,q\},\ \{p,r\},\ \{q,r\}; \tag{5}$$

$$(a''_{ijk}a''_{ijl}a''_{ikl}a''_{jkl})^2 = 1, \quad p,q,r,s \text{ попарно различны.} \tag{6}$$

Отметим, что условие (5) существенно отличается от условия в соотношении (2). Так, например, a''_{123} коммутирует с a''_{421}, но не коммутирует с a''_{134}.

Из группы $'G_n^3$ имеется очевидный гомоморфизм в группу G_n^3, состоящий в забывании штрихов и забывании порядка индексов у образующих. В случае $''G_n^3$ такого очевидного гомоморфизма нет. Действительно, в группе $''G_n^3$ при $n \geqslant 4$ имеется, например, соотношение $a''_{123}a''_{421} = a''_{421}a_{123}$; соотношение $a_{123}a_{124} = a_{124}a_{123}$ в группе G_n^3 не выполняется. Более того, если группу G_n^3 профакторизовать по всем такого рода коммутационным соотношениям, то результирующая группа будет изоморфна прямому произведению групп $\mathbb{Z}_2$.

Пусть теперь имеется динамика движения n точек внутри единичного круга. Накладывая на неё естественные условия общего положения относительно окружностей, касающихся абсолюта, мы можем поставить в соответствие динамике общего положения слово из букв a''_{ijk} следующим образом. Каждому критическому моменту t_l соответствуют три точки (i_l, j_l, k_l) на одной окружности, касающейся абсолюта, перенумерованные в порядке против часовой стрелки, начиная от точки касания. Этому моменту мы ставим в соответствие образующую a''_{i_l,j_l,k_l}. Слово $g(\beta)$ представляет собой произведение всех образующих, соответствующих критическим моментам в порядке возрастания t.

Полностью аналогично теореме 1 и основной теореме работы [3] доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Построенное выше отображение $\beta \mapsto g(\beta)$ является гомоморфизмом группы крашеных кос PB_n в группу $''G_n^3$.*

Доказательство. Аналогично теореме 1 перечислим события коразмерности 2, которым будут отвечать соотношения. Случай «нестабильная тройная точка» полностью аналогичен случаю нестабильной тройной точки для теоремы 1: в некоторый момент времени динамика имеет три точки на одной окружности, касающейся абсолюта, однако при малом шевелении этот момент исчезает. Соответствующее соотношение имеет вид $''a_{ijk}^2 = 1$.

Точно так же мы имеем аналогию со случаем «четверная точка». Пусть динамика такова, что в некоторый момент четыре точки находятся на одной окружности, касающейся абсолюта. Перенумеруем эти точки в порядке против часовой стрелки при движении по окружности, начиная от точки касания: i, j, k, l. При малом шевелении динамики четверная точка распадётся и останутся четыре тройные точки, которым соответствуют четыре образующие a''_{ijk}, a''_{ijl}, a''_{ikl}, a''_{jkl}. Другое малое шевеление даст произведение тех же четырёх образующих в обратном порядке, при этом в таком произведении a''_{ijk} не может соседствовать с a''_{ikl}.

Самым существенным отличием случая $''G_n^3$ от случая $'G_n^3$ является ситуация с двумя «независимыми» тройками точек, встречающимися в один момент времени.

Предположим, что в некоторый момент времени t среди n точек имеется две тройки индексов $m = \{a, b, c\}$, $m' = \{d, e, f\}$, такие что $\big(z_a(t), z_b(t), z_c(t)\big)$ лежат на одной окружности, касающейся абсолюта, а $\big(z_d(t), z_e(f), z_g(t)\big)$ лежат на другой окружности, касающейся абсолюта, причём в каждой тройке индексы попарно различны. Если при этом $\mathrm{Card}\big((a, b, c) \cap (d, e, f)\big) \leqslant 1$, то мы получаем коммутационное соотношение (5), аналогичное соотношению (2). Если же пересечение состоит из двух индексов, например, мы имеем тройки (a, b, c) и (a, b, f), то согласно утверждению 1 в одной тройке точка a будет предшествовать точке b при движении против часовой стрелки вдоль окружности, а в другой точка b будет предшествовать точке a, что также описывается соотношением вида (5). □

Группа $''G_n^3$ допускает естественный гомоморфизм в группу G_N^2, где $N = n(n-1)$, а каждый из индексов p, q образующих $a_{p,q}$ представляет собой упорядоченную пару различных элементов от 1 до n.

Определим отображение $h\colon {''G_n^3} \to G_N^2$ формулой

$$h\colon a''_{ijk} \mapsto a_{ij,ik}. \tag{7}$$

Теорема 4. *Приведённое выше отображение является гомоморфизмом $h\colon {''G_n^3} \to G_N^2$.*

Проверку корректности этой формулы мы оставляем читателю.

Как и в случае $'G_n^3$, мы получаем достаточное условие для минимальности слов, записывающих элементы из $''G_n^3$.

Замечание 2. Сквозное отображение $\mathrm{PB}_n \mapsto G_N^2$ может быть построено явно без упоминания группы $''G_n^3$. А именно, при рассмотрении косы $\alpha \in \mathrm{PB}_n$ как динамики движения n точек внутри единичного круга каждому моменту, когда три точки с номерами i, j, k лежат на одной окружности, касающейся абсолюта, мы поставим в соответствие произведение $a_{ij,ik}a_{ij,ik}a_{ik,jk}$, если при обходе окружности против часовой стрелки начиная от точки касания точки встречаются в порядке i, j, k.

Выражаю благодарность И. М. Никонову за полезные обсуждения.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10291).

Литература

[1] Мантуров В. О. О группах G_n^2 и группах Кокстера // УМН. — 2017. — Т. 72, № 2. — С. 234—235.

[2] Bardakov V. G. The virtual and universal braids // Fund. Math. — 2004. — Vol. 184. — P. 1—18.

[3] Manturov V. O. Non-Reidemeister Knot Theory and Its Applications in Dynamical Systems, Geometry, and Topology. — `http://arxiv.org/abs/1501.05208`.

[4] Manturov V. O. The groups G_n^k and fundamental groups of configuration spaces // J. Knot Theory & Ramifications. — 2017. — Vol. 26.

[5] Manturov V. O., Nikonov I. M. On braids and groups G_n^k // J. Knot Theory & Ramifications. — 2015. — Vol. 24, No. 13.