

Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных колец*

А. В. МИХАЛЁВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

Е. Е. ШИРШОВА

*Московский педагогический
государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com*

УДК 512.545

Ключевые слова: частично упорядоченное кольцо, первичный идеал кольца, первичный радикал.

Аннотация

Рассматриваются частично псевдоупорядоченные ($\mathcal{K}$ -упорядоченные) кольца. Исследуются свойства идеалов частично псевдоупорядоченных колец. Изучается вариация понятия первичного радикала кольца в подклассе направленных псевдоупорядоченных колец ($\mathcal{AO}$ -упорядоченных колец). Получено поэлементное описание $\mathcal{AO}$ -первичного радикала $\mathcal{AO}$ -упорядоченных колец.

Abstract

A. V. Mikhalev, E. E. Shirshova, Prime radicals of directed pseudo-ordered rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 147–166.

Characteristics of partially pseudo-ordered ($\mathcal{K}$ -ordered) rings are considered. Properties of ideals in pseudo-ordered rings are described. A variation of the concept of the prime radical for a ring in the subclass of directed pseudo-ordered rings ($\mathcal{AO}$ -ordered rings) is investigated. The description of elements of $\mathcal{AO}$ -prime radicals for $\mathcal{AO}$ -ordered rings is obtained.

Памяти Альфреда Львовича Шмелькина

1. Введение

Пусть $R = \langle R, +, \cdot \rangle$ — произвольное кольцо. Принято называть R *частично упорядоченным кольцом*, если $\langle R, +, \leq \rangle$ является частично упорядоченной группой, удовлетворяющей условию

(1) из $a \leq b$ и $0 < c$ следуют неравенства $ac \leq bc$ и $ca \leq cb$ для всех $a, b, c \in R$.

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект 16-11-10013.

Известно, что не всякий частичный порядок аддитивной группы кольца обладает свойством (1).

Было замечено, что порядок аддитивной группы ряда колец может обладать свойством, «противоположным» (в некотором смысле) условию (1).

Определение 1. Пусть аддитивная группа $\langle R, +, \leq \rangle$ кольца R является частично упорядоченной группой.

Будем называть кольцо R частично псевдоупорядоченным справа кольцом, если выполняется условие

(2) из $0 \leq a$ следует неравенство $ab \leq a$ для всех элементов $b \in R$.

Будем называть кольцо R частично псевдоупорядоченным слева кольцом, если выполняется условие

(3) из $0 \leq a$ следует неравенство $ba \leq a$ для всех элементов $b \in R$.

Будем называть кольцо R частично псевдоупорядоченным кольцом, если условия (2) и (3) выполняются одновременно.

Если порядок аддитивной группы кольца является линейным (решёткой, направленным), то кольцо называется линейно (решёточно, направленным) псевдоупорядоченным (слева, справа) кольцом.

Частично упорядоченная группа называется *направленной*, если любые два элемента имеют в этой группе верхнюю грань.

Понятие частично псевдоупорядоченного кольца было определено в работе В. Н. Бибаевой и Е. Е. Ширшовой [1]. Первоначально эти кольца были названы частично $\mathcal{K}$ -упорядоченными по аналогии с названием частично упорядоченных алгебр (см. [5, 6]). Определение частично упорядоченной алгебры Ли принадлежит В. М. Копытову [3, 4].

Напомним, что алгебра Ли

$$L = \langle L, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \cdot \rangle$$

над частично упорядоченным полем F называется *частично упорядоченной алгеброй Ли*, если $\langle L, +, \leq \rangle$ является частично упорядоченной группой, удовлетворяющей условиям

из $a \leq b$ следует $\alpha a \leq \alpha b$ для всех $a, b \in L$ и $\alpha > 0$ из поля F ;

(4) если $a \leq b$, то $a + ac \leq b + bc$ для всех элементов $a, b, c \in L$.

Сравнив условия (2) и (4), можно сделать вывод, что частично упорядоченная алгебра Ли L является частично псевдоупорядоченным справа кольцом. По свойству антикоммутативности L является частично псевдоупорядоченным кольцом.

Некоторые свойства частично псевдоупорядоченных ($\mathcal{K}$ -упорядоченных) справа (слева) колец рассматривались в [18].

Следует отметить, что *частично псевдоупорядоченное справа (слева) кольцо R не может содержать единицу*. Действительно, если $0 < a$ и $1 \in R$, то из условия (2) (условия (3)) следует неравенство $a(1 + 1) \leq a$ ($(1 + 1)a \leq a$), т. е. $a \leq 0$.

Напомним некоторые сведения из теории колец.

Пусть R — произвольное кольцо, I и J — (двусторонние) идеалы кольца R . Произведением идеалов называется подгруппа

$$IJ = \left\{ u = \sum_{k=1}^{n(u)} x_k y_k \mid x_k \in I, y_k \in J \right\}$$

кольца R . Если R является ассоциативным кольцом или кольцом Ли, то IJ также является идеалом кольца R .

Идеал P кольца R называется *первичным*, если в фактор-кольце R/P произведение ненулевых идеалов всегда отлично от нуля. *Первичным радикалом* $\text{rad}(R)$ кольца R называется пересечение всех первичных идеалов кольца R . Известно, что в ассоциативном кольце $\text{rad}(R)$ является совокупностью строго нильпотентных (t -нильпотентных) элементов $a \in R$ (см. [21]). Элемент $a \in R$ называется *t -нильпотентным*, если в любой последовательности (a_i) вида $a_0 = a$ и $a_{k+1} \in a_k R a_k$ начиная с некоторого места все элементы равны нулю.

С середины прошлого века предпринимались попытки распространить понятие первичного радикала на частично упорядоченные алгебраические системы. В классе решёточно упорядоченных колец (l -колец) первоначально идея первичного радикала рассматривалась в работе Г. Биркгофа и Р. Пирса [19] (см. также [2]).

В [7] уточнено определение l -первичного радикала и получено поэлементное описание l -первичного радикала в классе решёточно упорядоченных колец. l -идеал P l -кольца R называется *l -первичным*, если в фактор-кольце R/P произведение ненулевых l -идеалов всегда отлично от нуля. *l -первичным радикалом* $l\text{-rad}(R)$ кольца R называется пересечение всех l -первичных идеалов кольца R . $l\text{-rad}(R)$ ассоциативного l -кольца является совокупностью l -строго нильпотентных элементов $a \in R$. Элемент $a \in R$ называется *l -строго нильпотентным*, если его модуль является t -нильпотентным элементом.

В работах А. В. Михалёва и М. А. Шаталовой получено также поэлементное описание первичного радикала в классах решёточно упорядоченных групп [8] и модулей [9]. В [10, 11, 17] получено поэлементное описание первичного радикала в некоторых классах направленных групп. В [6] можно найти поэлементное описание l -первичного радикала решёточно $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем.

Целью данной работы является характеристика аналога первичного радикала кольца в подклассе направленных псевдоупорядоченных колец.

В статье используются терминология и обозначения, общепринятые в теории частично упорядоченных алгебраических систем (см. [2, 4, 12]).

Во втором разделе статьи приводятся сведения из теории частично упорядоченных групп, которые используются при доказательстве утверждений о кольцах.

Напомним, что подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leq g \leq b$ всегда следует $g \in M$.

Замечание. Пусть $G = \langle G, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа и $G^+ = \{g \in G \mid 0 \leq g\}$.

1. Говорят, что гомоморфизм f группы G в частично упорядоченную группу G_1 является *о-гомоморфизмом*, если $f(G^+) \subseteq G_1^+$.
2. Ядро *о-гомоморфизма* $f: G \rightarrow G_1$ ($\ker f$) является выпуклой нормальной подгруппой группы G .
3. Если M — выпуклая нормальная подгруппа группы G , то фактор-группа G/M является частично упорядоченной группой, в которой для классов $X, Y \in G/M$ неравенство $X \leq Y$ означает, что $a \leq b$ для некоторых элементов $a \in X$ и $b \in Y$.
4. *о-гомоморфизм* $f: G \rightarrow G_1$ называется *строгим о-гомоморфизмом*, если $f(G^+) = G_1^+ \cap f(G)$.
5. Естественный сюръективный гомоморфизм $\pi: G \rightarrow G/M$ (действующий по правилу $\pi(a) = a + M$) является строгим *о-гомоморфизмом*.
6. Если для *о-гомоморфизма* f существует *о-гомоморфизм* f^{-1} , то f называют *о-изоморфизмом*.

Отметим, что если f — *о-гомоморфизм*, являющийся изоморфизмом групп, то он не обязан быть *о-изоморфизмом*. Например, рассмотрим группу $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, где $(a, b) \in G^+$, если $a > 0$ и $b > 0$ или $a = b = 0$, и группу $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, где $(a, b) \in H^+$, если $0 \leq a$ и $0 \leq b$.

Определим функцию $f: G \rightarrow H$ по правилу $(a, b)f = (a, b)$. Тогда f — изоморфизм групп. Кроме того, $f(G^+) \subseteq H^+$, т. е. f — *о-гомоморфизм*. С другой стороны, пусть $h = (a, 0) \in H$. Тогда $h \in H^+$. Но $f^{-1}(h) \parallel (0, 0)$ в группе G . Следовательно, f^{-1} не является *о-гомоморфизмом*.

Теорема 1. Пусть G и H — частично упорядоченные группы и функция $f: G \rightarrow H$ является гомоморфизмом групп. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) f является *о-изоморфизмом* в том и только в том случае, если f — биекция, являющаяся строгим *о-гомоморфизмом*;
- 2) изоморфизм φ частично упорядоченной группы $G/\ker f$ на частично упорядоченную группу $f(G)$ (где $\varphi(a + \ker f) = f(a)$ для любого $a \in G$) является *о-изоморфизмом* в том и только в том случае, когда f — строгий *о-гомоморфизм*.

Элементы a и b из G^+ называются *почти ортогональными* или *АО-элементами* (англ. almost orthogonal) в частично упорядоченной группе $G = \langle G, +, \leq \rangle$, если из неравенств $x \leq a, b$ следуют неравенства $nx \leq a, b$ для всех $x \in G$ и целых положительных чисел n .

Ортогональные элементы (те, у которых точная нижняя грань равна нулю) обладают указанным свойством. Но не только они.

Рассмотрим группу $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, в которой $(a, b) \in G^+ \setminus \{(0, 0)\}$, если $a > 0$ и $b > 0$. Тогда элементы $u = (2, 1)$ и $v = (1, 2)$ почти ортогональны в группе G , но не ортогональны, так как, например $(0, -1) \leq u, v$, но $(0, -1) \not\parallel (0, 0)$.

Частично упорядоченную группу $G = \langle G, +, \leq \rangle$ называют *АО-группой*, если любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$, где элементы a и b почти ортогональны в группе G . Класс АО-групп является подклассом направленных групп и включает в себя класс псевдорешёточно упорядоченных групп и, следовательно, классы линейно упорядоченных и решёточно упорядоченных групп (подробнее см., например, [23]).

Гомоморфизм f АО-группы G в АО-группу G_1 называется *АО-гомоморфизмом*, если для любой пары почти ортогональных элементов a и b из группы G их образы $f(a)$ и $f(b)$ почти ортогональны в группе G_1 .

Теорема 2. Если G является АО-группой, то справедливы следующие утверждения.

1. Если f — АО-гомоморфизм группы G в АО-группу G_1 , то
 - а) f является строгим о-гомоморфизмом;
 - б) ядро гомоморфизма f является выпуклой направленной нормальной подгруппой группы G .
2. Если M — выпуклая направленная нормальная подгруппа группы G , то
 - а) фактор-группа G/M является АО-группой;
 - б) канонический гомоморфизм $\pi: G \rightarrow G/M$ является АО-гомоморфизмом;
 - в) если H — произвольная выпуклая направленная подгруппа группы G , то образ канонического гомоморфизма

$$\pi(H) = \{K \in G/M \mid K = h + M \text{ для некоторого элемента } h \in H\}$$
 является выпуклой направленной подгруппой группы G/M .
3. Если f является АО-гомоморфизмом группы G в АО-группу G_1 , то существует о-изоморфизм $\varphi: G/\ker f \rightarrow f(G)$.

В конце второго раздела приводятся примеры АО-групп.

В третьем разделе речь идёт об идеалах частично псевдоупорядоченных колец.

Определение 2. Идеал I кольца $R = \langle R, +, \cdot, \leq \rangle$ называется выпуклым (направленным) идеалом, если группа $\langle I, +, \leq \rangle$ является выпуклой (направленной) подгруппой группы $\langle R, +, \leq \rangle$.

Пусть R — частично псевдоупорядоченное кольцо и $R^+ = \{x \in R \mid 0 \leq x\}$.

Определение 3. Гомоморфизм f кольца R в частично псевдоупорядоченное кольцо S называется о-гомоморфизмом колец (строгим о-гомоморфизмом колец), если $f(R^+) \subseteq S^+$ ($f(R^+) = S^+ \cap f(R)$).

Если для о-гомоморфизма колец f существует о-гомоморфизм колец f^{-1} , то f называется о-изоморфизмом колец.

Теорема 3. Если R является частично псевдоупорядоченным кольцом, то справедливы следующие утверждения.

1. Если $f: R \rightarrow S$ — o -гомоморфизм частично псевдоупорядоченных колец, то ядро гомоморфизма f является выпуклым идеалом кольца R .
2. Если M — выпуклый идеал кольца R , то
 - а) фактор-кольцо R/M является частично псевдоупорядоченным кольцом;
 - б) канонический гомоморфизм колец $\pi: R \rightarrow R/M$ является строгим o -гомоморфизмом колец;
 - в) если I и J — идеалы кольца R , $K = \pi(I)$ и $L = \pi(J)$, то

$$KL = \{u = z + M \mid z \in IJ\} = \{\pi(z) + M \mid z \in IJ\},$$

т. е.

$$\pi(I)\pi(J) = \pi(IJ).$$

3. Если $f: R \rightarrow S$ — строгий o -гомоморфизм частично псевдоупорядоченных колец, то существует o -изоморфизм частично псевдоупорядоченных колец $\varphi: R/\ker f \rightarrow f(R)$, где $\varphi(r + \ker f) = f(r)$ для всех $r \in R$;
4. если M — выпуклый направленный идеал кольца R , K — выпуклый направленный идеал кольца R/M , то в кольце R существует выпуклый направленный идеал I , для которого $\pi(I) = K$.

Определение 4. Частично псевдоупорядоченное кольцо $R = \langle R, +, \cdot, \leq \rangle$ будем называть $\mathcal{AO}$ -упорядоченным кольцом, если группа $\langle R, +, \leq \rangle$ является $\mathcal{AO}$ -группой.

Поясним, чем обусловлен выбор данного подкласса направленных псевдоупорядоченных колец. М. Якубиковой [20] найден пример направленной группы, в которой пересечение выпуклых направленных подгрупп не является направленным, но в любой $\mathcal{AO}$ -группе пересечение выпуклых направленных подгрупп сохраняет направленность (см. лемму 17).

О свойствах $\mathcal{AO}$ -упорядоченных колец идёт речь в четвёртом разделе статьи. Начинается раздел с примеров $\mathcal{AO}$ -упорядоченных колец.

Пусть R и S являются $\mathcal{AO}$ -упорядоченными кольцами.

Определение 5. Гомоморфизм f кольца R в кольцо S называется $\mathcal{AO}$ -гомоморфизмом колец, если из почти ортогональности элементов a и b в кольце R следует почти ортогональность их образов $f(a)$ и $f(b)$ в кольце S .

Теорема 4. Если R является $\mathcal{AO}$ -упорядоченным кольцом, то справедливы следующие утверждения.

1. Если f — $\mathcal{AO}$ -гомоморфизм кольца R в $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо S , то
 - а) f является строгим o -гомоморфизмом колец;
 - б) ядро гомоморфизма f является выпуклым направленным идеалом кольца R .

2. Если I — выпуклый направленный идеал кольца R , то
- а) фактор-кольцо R/I является $\mathcal{AO}$ -упорядоченным кольцом;
 - б) канонический гомоморфизм колец $\pi: R \rightarrow R/I$ является $\mathcal{AO}$ -гомоморфизмом колец;
 - с) если J — выпуклый направленный идеал кольца R , то $\pi(J)$ — выпуклый направленный идеал кольца R/I .
3. Если f — $\mathcal{AO}$ -гомоморфизм кольца R в $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо S , то существует $\mathcal{O}$ -изоморфизм $\varphi: R/\ker f \rightarrow f(R)$.

Теорема 5. Пусть R — $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо, $x \in R$ и $x = a - b$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b из кольца R . Тогда существует выпуклый направленный идеал I_x кольца R , содержащий элемент x , для которого

$$I_x^+ = \{r \in R^+ \mid r \leq na + nb \text{ для некоторых целых чисел } n > 0.\}$$

Если J — выпуклый направленный идеал кольца R и $x \in J$, то $I_x \subseteq J$.

Определение 6. Пусть R — $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо. Кольцо R будем называть $\mathcal{AO}$ -первичным, если для любых выпуклых направленных идеалов I и J кольца R из $IJ = 0$ следует $I = 0$ или $J = 0$.

Определение 7. Выпуклый направленный идеал P в $\mathcal{AO}$ -упорядоченном кольце R будем называть $\mathcal{AO}$ -первичным, если фактор-кольцо R/P является $\mathcal{AO}$ -первичным кольцом.

Определение 8. Пусть R — $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо. Будем называть элемент $a \in R$ псевдо- t -нильпотентным, если в любой последовательности (a_i) элементов кольца, где $a_1 = a$ и $a_{i+1} \in I_{a_i}I_{a_i}$ начиная с некоторого места все элементы равны нулю.

Определение 9. Пусть R — $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо. Пересечение всех $\mathcal{AO}$ -первичных идеалов кольца R будем называть $\mathcal{AO}$ -первичным радикалом кольца R ($\mathcal{AO}\text{-rad}(R)$).

Основными результатами статьи являются теоремы 6 и 7.

Теорема 6. Пусть R — $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо. Тогда $\mathcal{AO}$ -первичный радикал кольца R совпадает с совокупностью псевдо- t -нильпотентных элементов кольца.

Теорема 7. Пусть R — $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо и $M = \mathcal{AO}\text{-rad}(R)$. Тогда $\mathcal{AO}$ -первичный радикал кольца R/M равен $\{M\}$, т. е. $\mathcal{AO}\text{-rad}(R/M) = \{M\}$.

2. Свойства частично упорядоченных групп

Пусть на протяжении данного раздела $G = \langle G, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа.

Начнём с известных утверждений.

Лемма 8. Для частично упорядоченной группы G следующие условия равносильны:

- 1) G является направленной группой;
- 2) для нуля группы G и каждого элемента $a \in G$ существует верхняя грань;
- 3) каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$, где $a, b \in G^+$.

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [12, ч. I, гл. II, § 1, предложение 1]. $\square$

Лемма 9. Пусть элементы a и b почти ортогональны в группе G . Если $a - b \geq 0$, то $b = 0$.

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [15, лемма 4]. $\square$

Лемма 10. Пусть H — подгруппа группы G . H является выпуклой подгруппой группы G в том и только в том случае, когда H^+ является выпуклым подмножеством группы G .

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [12, ч. I, гл. II, § 4, предложение (a)]. $\square$

Лемма 11. Пусть M — выпуклая направленная подгруппа группы G . Если $m \in M$ и $m = a - b$ для некоторых элементов a и b из G^+ , почти ортогональных в группе G , то $a, b \in M$.

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [23, лемма 2]. $\square$

Лемма 12. Если H — направленная подгруппа группы G , M — выпуклая направленная нормальная подгруппа группы G , то $\pi(H)$ — направленная подгруппа группы G/M .

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [22, лемма 1.1]. $\square$

Лемма 13. Пусть G — АО-группа, M — выпуклая направленная нормальная подгруппа группы G . Если элементы a и b почти ортогональны в группе G , то классы $a + M$ и $b + M$ почти ортогональны в группе G/M .

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [14, теорема 1]. $\square$

Лемма 14. Пусть G — АО-группа, M — выпуклая направленная нормальная подгруппа группы G , H — выпуклая направленная подгруппа группы G . Если имеет место неравенство $M \leq K$ в фактор-группе G/M для класса $K \in \pi(H)$, то существует элемент $a \in H^+$, для которого $K = a + M$.

Доказательство. По условию леммы существует элемент $x \in H$, для которого $K = x + M$. Тогда в $\mathcal{AO}$ -группе G элемент x имеет вид $a - b$, где элементы a и b почти ортогональны в группе G . По лемме 13 классы $a + M$ и $b + M$ почти ортогональны в фактор-группе G/M . Кроме того, $x + M = (a + M) - (b + M) \geq M$. Отсюда по лемме 9 следует, что $b + M = M$, т. е. $x + M = a + M$. Так как подгруппа H выпукла и направлена в группе G , то по лемме 11 $a \in H$. Таким образом, $K = a + M$, где $a \in H^+$. $\square$

Лемма 15. Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \parallel \\ C & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

A, B, C — частично упорядоченные группы, α является сюръективным гомоморфизмом и функции α и γ являются строгими o -гомоморфизмами, а β — изоморфизм групп. Тогда β — строгий o -гомоморфизм.

Доказательство. Из условия леммы следует, что справедливы следующие равенства:

- 1) $\gamma(A^+) = \gamma(A) \cap B^+$;
- 2) $\alpha(A^+) = \alpha(A) \cap C^+$.

Пусть $c \in C^+$. По условию леммы существует элемент $a \in A$, для которого $\alpha(a) = c$. В силу равенства 2) $a \in A^+$. Из равенства 1) следует существование $b \in B^+$, для которого $\gamma(a) = b$. Таким образом, $\beta \circ \alpha(a) = \beta(\alpha(a)) = b$. Значит, $\beta(c) = b$, т. е. $\beta(C^+) \subseteq B^+$. Отсюда следует, что $\beta(C^+) \subseteq \beta(C) \cap B^+$.

Рассмотрим $x \in \beta(C) \cap B^+$. Тогда найдётся элемент $c_1 \in C$, для которого $x = \beta(c_1)$. По условию леммы существует элемент $a_1 \in A$, для которого $c_1 = \alpha(a_1)$. Таким образом, $x = \beta(\alpha(a_1)) = \beta \circ \alpha(a_1) = \gamma(a_1)$. В силу равенства 1) $a_1 \in A^+$. Из равенства 2) вытекает, что $c_1 \in C^+$. Следовательно, $\beta(C) \cap B^+ \subseteq \beta(C^+)$, т. е. β — строгий o -гомоморфизм. $\square$

Лемма 16. Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B & \xlongequal{\quad} & B \\ \alpha \downarrow & & \varphi \uparrow & & \varphi^{-1} \downarrow \\ C & \xlongequal{\quad} & C & \xlongequal{\quad} & C \end{array}$$

A, B, C — частично упорядоченные группы, функция γ — гомоморфизм групп, α — строгий o -гомоморфизм групп, φ — o -изоморфизм. Тогда γ — строгий o -гомоморфизм.

Доказательство. Если $a \in A^+$, то по условию леммы $\alpha(a) \in C^+$ и $\varphi \circ \alpha(a) = \varphi(\alpha(a)) \in B^+$. Это означает, что $\varphi \circ \alpha(A^+) \subseteq B^+$. Из коммутативности диаграммы следует, что $\gamma(A^+) \subseteq B^+$. Значит, γ — o -гомоморфизм. Из последнего включения следует, что $\gamma(A^+) \subseteq \gamma(A) \cap B^+$.

Пусть далее $x \in \gamma(A) \cap B^+$. Тогда найдётся $a \in A$, для которого $x = \gamma(a)$, т. е. $x = \varphi \circ \alpha(a) = \varphi(\alpha(a))$. По условию леммы $\alpha(a) = \varphi^{-1}(x)$, где φ^{-1} — o -гомоморфизм, т. е. $\alpha(a) \in C^+$. Так как по условию леммы $\alpha(A^+) = \alpha(A) \cap C^+$, то $a \in A^+$. Таким образом, $x \in \gamma(A^+)$, т. е. $\gamma(A) \cap B^+ \subseteq \gamma(A^+)$. Следовательно, γ — строгий o -гомоморфизм. $\square$

Доказательство теоремы 1.

1. Пусть f является o -изоморфизмом. Тогда f — o -гомоморфизм, т. е. $f(G^+) \subseteq H^+$. Значит, $f(G^+) \subseteq f(G) \cap H^+$.

Рассмотрим элемент $h \in f(G) \cap H^+$. Тогда найдётся $a \in G$, для которого $f(a) = h$. Значит, $a = f^{-1}(h)$. Так как f^{-1} — o -гомоморфизм, то $f^{-1}(H^+) \subseteq G^+$. Таким образом, $a \in G^+$. Следовательно, $h \in f(G^+)$, и $f(G) \cap H^+ \subseteq f(G^+)$. Значит, f — строгий o -гомоморфизм.

Пусть далее f — биекция, являющаяся строгим o -гомоморфизмом. Из свойств групп следует, что f^{-1} — гомоморфизм групп. Рассмотрим $h \in H^+$. Так как f — биекция, то $h \in f(G)$, т. е. $h \in f(G) \cap H^+ = f(G^+)$. Тогда существует $a \in G^+$, для которого $f(a) = h$. В этом случае $a = f^{-1}(h)$. Таким образом, $f^{-1}(H^+) \subseteq G^+$. Следовательно, f — o -изоморфизм.

2. Из свойств гомоморфизмов групп следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{f} & f(G) & \xlongequal{\quad} & f(G) \\ \pi \downarrow & & \varphi \uparrow & & \varphi^{-1} \downarrow \\ G/\ker f & \xlongequal{\quad} & G/\ker f & \xlongequal{\quad} & G/\ker f \end{array},$$

где по утверждению 5 замечания канонический гомоморфизм π является строгим o -гомоморфизмом. Если φ — o -изоморфизм, то по лемме 16 f — строгий o -гомоморфизм. Если f — строгий o -гомоморфизм, то по лемме 15 φ — строгий o -гомоморфизм. Отсюда по утверждению 1 теоремы следует, что φ — o -изоморфизм. Теорема 1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. По [14, утверждение 1) теоремы 4] заключаем, что $f(G^+) \subseteq G_1^+$, т. е. f является o -гомоморфизмом частично упорядоченной группы G в частично упорядоченную группу G_1 .

Пусть далее $x \in f(G) \cap G_1^+$. Тогда найдётся элемент $g \in G$, для которого $x = f(g)$. По условию теоремы $g = a - b$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b из группы G . В этом случае $f(g) = f(a) - f(b)$ в группе G_1 . Так как f является $\mathcal{AO}$ -гомоморфизмом, то элементы $f(a)$ и $f(b)$ почти ортогональны в группе G_1 . Таким образом, $x = f(a) - f(b)$. Так как $x \geq e$, то по лемме 9 $f(b) = e$. Значит, $x \in f(G^+)$. Следовательно, $f(G^+) = f(G) \cap G_1^+$.

Доказательства утверждений 1 б), 2 а) и 2 б) теоремы 2 можно найти в [14].

Докажем утверждение 2 с). Пусть $M \leq K \leq L$ в группе G/M для некоторых $K \in G/M$ и $L \in \pi(H)$. Из неравенств по определению отношения частичного порядка в фактор-группе следует существование элемента $x \in G^+$, для которого $K = x + M$, и по лемме 14 следует существование элемента $h \in H^+$, для

которого $L = h + M$. Так как $x + M \leq h + M$, то по определению отношения порядка в группе G/M получаем, что $x \leq h + m$ для некоторого $m \in M$. Так как M — направленная группа, то по утверждению 2) леммы 8, не теряя общности, можно считать, что $m \geq 0$.

Рассмотрим элемент $x - m \leq h$. В $\mathcal{AO}$ -группе G $x - m = a - b$, где элементы a и b почти ортогональны в группе G . Тогда верны соотношения $-x + a = -m + b \leq \leq a, b$. Так как a и b почти ортогональны в группе G , то $2(-m + b) \leq b$. Отсюда следует, что $-m + b - m \leq 0$, т. е. $b \leq 2m$, где $2m \in M$. Так как $b \in G^+$, а подгруппа M выпукла в группе G , то $b \in M$. Значит, $x + M = a + M$. Так как $a - b \leq h$, то $-h + a \leq a, b$. Отсюда следует, что $2(-h + a) \leq a$, т. е. $a \leq 2h$, где $2h \in H$. Так как $a \in G^+$ и H — выпуклая подгруппа группы G , то $a \in H$. Таким образом, $K = a + M$, где $a \in H$, т. е. $K \in \pi(H)$. По лемме 10 подгруппа $\pi(H)$ выпукла в группе G/M . Остаётся применить лемму 12.

Справедливость утверждения 3 теоремы 2 следует из утверждения 2) теоремы 1 и доказанного утверждения 1 а) теоремы 2. Теорема 2 доказана полностью. $\square$

Лемма 17. Пусть G — $\mathcal{AO}$ -группа, $\{M_i \mid i \in I\}$ — семейство выпуклых направленных подгрупп группы G . Если $M = \bigcap_{i \in I} M_i$, то M — выпуклая направленная подгруппа группы G .

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [23, теорема 1]. $\square$

Закончим раздел примерами $\mathcal{AO}$ -групп.

В [23] показано, что $\mathcal{AO}$ -группа G является псевдорешёточно упорядоченной группой в том и только в том случае, когда G — интерполяционная группа, т. е. если $a, b \leq c, d$, то найдётся элемент $g \in G$, для которого $a, b \leq g \leq c, d$ для всех $a, b, c, d \in G$. Учитывая сказанное, приведём пример $\mathcal{AO}$ -группы, не являющейся псевдорешёточно упорядоченной группой.

Пример 1. Пусть $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел с естественной упорядоченностью, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, где $(a, b) \in G^+$, если $a > 0$ и $b > 0$ или $a = b = 0$.

Рассмотрим в группе G следующие элементы:

$$\begin{aligned} x &= (1, 1); \\ y &= (a + 1, 1), \text{ где } a > 0; \\ z &= (-a + 1, 1), \text{ где } a < 0; \\ u &= (1, b + 1), \text{ где } b > 0; \\ v &= (1, -b + 1), \text{ где } b < 0. \end{aligned}$$

Из них можно образовать следующие пары почти ортогональных элементов:

$$x \text{ и } y; \quad x \text{ и } z; \quad x \text{ и } u; \quad x \text{ и } v; \quad y \text{ и } v; \quad z \text{ и } u.$$

Пусть далее $t = (a, b) \in G$. Если $t \geq (0, 0)$, то $t = t - (0, 0)$, и если $t < 0$, то $t = (0, 0) - t$, где t и $(0, 0)$ почти ортогональны.

Допустим, что $t \parallel (0, 0)$. Тогда имеются следующие возможности:

- 1) если $t = (a, 0)$, то $t = y - x$ при $a > 0$ и $t = x - z$ при $a < 0$;
- 2) если $t = (0, b)$, то $t = u - x$ при $b > 0$ и $t = x - v$ при $b < 0$;
- 3) если $t = (a, b)$, где $a > 0$ и $b < 0$, то $t = y - v$;
- 4) если $t = (a, b)$, где $a < 0$ и $b > 0$, то $t = u - z$.

Следовательно, G — $\mathcal{AO}$ -группа. Но G не является псевдорешёточно упорядоченной группой, так как, например, $(1, 0), (0, 1) \leq (2, 3), (3, 2)$, но нельзя найти $g \in G$, для которого $(1, 0), (0, 1) \leq g \leq (2, 3), (3, 2)$.

Для того чтобы найти другие примеры $\mathcal{AO}$ -групп, воспользуемся утверждением: лексикографическое расширение $\mathcal{AO}$ -группы с помощью $\mathcal{AO}$ -группы является $\mathcal{AO}$ -группой, доказательство которого можно найти в [16].

Пример 2. Пусть G — $\mathcal{AO}$ -группа из примера 1, а $H = \overline{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ — прямое произведение линейно упорядоченных групп. Тогда H — решёточно упорядоченная группа (см. [12, ч. I, гл. II, § 6]). Если F — лексикографическое расширение группы G с помощью группы H , то F — $\mathcal{AO}$ -группа.

Пример 3. Пусть G — $\mathcal{AO}$ -группа из примера 1, а L — лексикографическое расширение группы G с помощью линейно упорядоченной группы $\mathbb{Z}$. Тогда L — $\mathcal{AO}$ -группа.

Лемма 18. Пусть G — $\mathcal{AO}$ -группа, H — частично упорядоченная группа и функция $\varphi: G \rightarrow H$ является o -изоморфизмом. Тогда H — $\mathcal{AO}$ -группа.

Доказательство. Пусть $h \in H$. Тогда существует элемент $g \in G$, для которого $\varphi(g) = h$. В группе G элемент g имеет вид $a - b$ для некоторых почти ортогональных элементов $a, b \in G^+$. Тогда $\varphi(g) = \varphi(a) - \varphi(b)$ в группе H . По условию леммы элементы $u = \varphi(a)$ и $v = \varphi(b)$ принадлежат H^+ и $h = u - v$.

Пусть далее $t \in H$, где $t \leq u, v$. Тогда $c = \varphi^{-1}(t) \leq \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)$, так как φ^{-1} — o -гомоморфизм. Значит, $c \leq a, b$ в группе G . По свойству почти ортогональности $nc \leq a, b$ для всех целых чисел $n > 0$. В этом случае $\varphi(nc) \leq \varphi(a), \varphi(b)$, т. е. $nt = n\varphi(c) \leq u, v$ для всех целых чисел $n > 0$. Следовательно, u и v почти ортогональны в группе H . $\square$

Пример 4. Пусть H — аддитивная группа верхнетреугольных матриц над кольцом $\mathbb{Z}$.

Будем считать, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

принадлежит H^+ , если $a > 0$ и $b > 0$, или $a = b = 0$ и $c \geq 0$. Тогда H — частично упорядоченная группа.

Определим функцию $f: L \rightarrow H$, где L — $\mathcal{AO}$ -группа из примера 3, по правилу

$$((a, b), c)f = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда φ — o -изоморфизм частично упорядоченных групп. По лемме 18 H — АО-группа.

3. Идеалы частично псевдоупорядоченных колец, доказательство теоремы 3

Нам понадобятся следующие утверждения, доказательство которых можно найти в [1].

Лемма 19. Пусть R — частично псевдоупорядоченное кольцо. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $M \subset R$, то $M = R^+$ относительно некоторого частичного псевдопорядка в том и только в том случае, когда $M = \langle R, + \rangle^+$ и выполняется условие
(5) $a + ab, a + ba \in M$ для всех $a \in M$ и $b \in R$ (теорема 2);
- 2) любая выпуклая направленная подгруппа аддитивной группы кольца R является идеалом кольца R (теорема 5);
- 3) если I — выпуклый идеал кольца R , то фактор-кольцо R/I является частично псевдоупорядоченным кольцом (теорема 3).

Лемма 20. Пусть R — частично псевдоупорядоченное кольцо, I — выпуклая направленная подгруппа группы $G = \langle R, +, \leq \rangle$. Тогда существует частично псевдоупорядоченное кольцо R/I и канонический гомоморфизм групп $\pi: G \rightarrow G/I$ (действующий по правилу $\pi(a) = a + I$) является o -гомоморфизмом кольца R на кольцо R/I .

Доказательство. Обоснование данного утверждения можно найти в [18, теорема 4]. $\square$

Доказательство теоремы 3. Из утверждения 3) леммы 19 следует утверждение 2 а) теоремы 3.

Из леммы 20 и утверждения 5 замечания следует утверждение 2 б) теоремы 3.

Докажем утверждение 2 с). По определению произведения идеалов

$$KL = \left\{ u = \sum_{i=1}^{n(u)} x_i y_i \mid x_i \in K, y_i \in L \right\},$$

где $x_i = a_i + M$ и $y_i = b_i + M$ для некоторых $a_i \in I$ и $b_i \in J$. По правилу действий в фактор-кольце получим равенство $x_i y_i = a_i b_i + M$. Следовательно,

$$u = \sum_{i=1}^{n(u)} a_i b_i + M, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{n(u)} a_i b_i \in IJ.$$

Рассмотрим посылку утверждения 3 теоремы 3. По определению 3 f является o -гомоморфизмом частично упорядоченной группы $R_1 = \langle R, +, \leq_1 \rangle$ в частично упорядоченную группу $S_1 = \langle S, +, \leq_2 \rangle$, и по утверждению 1) леммы 19 справедливо равенство $f(R_1^+) = f(R_1) \cap S_1^+$. Тогда по утверждению 2) теоремы 1 существует o -изоморфизм $\varphi: R_1/\ker f \rightarrow f(R_1)$. Так как f — гомоморфизм колец, то нетрудно убедиться, что φ — кольцевой гомоморфизм.

Для доказательства утверждения 4 теоремы 3 рассмотрим множество $I = \{r \in R \mid r + M \in K\}$. Пусть $r, s \in I$. Тогда $(r - s) + M = (r + M) - (s + M)$, где $r + M, s + M \in K$, т. е. $r - s \in I$. Если $r \in I$ и $u \in R$, то

$$ru + M = (r + M)(u + M) \in K \quad \text{и} \quad ur + M = (u + M)(r + M) \in K,$$

поэтому $ru, ur \in I$. Значит, I — идеал кольца R и $\pi(I) = K$.

Так как, по определению 2 группа $\langle I/M, + \rangle = \langle K, + \rangle$ является выпуклой направленной подгруппой частично упорядоченной группы $\langle R/M, + \rangle$, то по [22, лемма 2.3] группа $\langle I, + \rangle$ является выпуклой направленной подгруппой частично упорядоченной группы $\langle R, + \rangle$. Остается вспомнить определение 2.

Теорема 3 доказана полностью. $\square$

Лемма 21. Пусть R — частично псевдоупорядоченное кольцо, $a \in R$ и $0 < a$. Тогда в кольце R существует выпуклый направленный идеал I_a , для которого

$$I_a^+ = \{r \in R^+ \mid r \leq na \text{ для некоторых целых чисел } n > 0\}.$$

Если J — выпуклый идеал кольца R и $a \in J$, то $I_a \subseteq J$.

Доказательство. В частично упорядоченной группе $G = \langle R, +, \leq \rangle$ для элемента a существует выпуклая направленная подгруппа $[a]$, для которой

$$[a]^+ = \{x \in G^+ \mid x \leq na \text{ для некоторых целых чисел } n > 0\}$$

(см., например, [15]). В силу утверждения 2) леммы 19 $[a]$ — идеал кольца R . Положим $I_a = [a]$. Из выпуклости идеала J и определения положительного конуса идеала I_a следует верность включения $I_a^+ \subset J$. По утверждению 3) леммы 8 справедливо включение $I_a \subseteq J$. $\square$

4. Идеалы $\mathcal{AO}$ -упорядоченных колец, доказательства теорем 4 и 5

Начнём с примеров $\mathcal{AO}$ -колец.

Пример 5. Рассмотрим группу H матриц из примера 4. Положим

$$(a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $A = (a, b, c) \in H^+$, если $a > 0$ и $b > 0$, или $a = b = 0$ и $c \geq 0$.

Если $A > (0, 0, 0)$, то $A - AB = (a, b, c - aw) \geq (0, 0, 0)$ и $A - BA = (a, b, uc) \geq (0, 0, 0)$ для любой матрицы $B = (u, v, w) \in H$. Следовательно, кольцо верхнетреугольных матриц над кольцом целых чисел становится ассоциативным $\mathcal{AO}$ -упорядоченным кольцом.

Пример 6. Рассмотрим группу F из примера 2. Элемент $g = ((a, b), (c, d))$ принадлежит F^+ , если $a > 0$ и $b > 0$, или $a = b = 0$ и $c, d \geq 0$.

Пусть $g_1 = ((a_1, b_1), (c_1, d_1))$ и $g_2 = ((a_2, b_2), (c_2, d_2))$. Положим $g_1 \circ g_2 = (0, 0, 0, a_1b_2 - a_2b_1)$. Тогда $F_1 = \langle F, +, \circ \rangle$ — кольцо Ли.

Если $g_1 > 0$, то $g_1 \circ g_2 \leq g_1$ и $g_2 \circ g_1 \leq g_1$ для любого $g_2 \in F$. Следовательно, F_1 — $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо Ли.

Пример 7. Если на аддитивной группе из примера 6 определить умножение по правилу $g_1 * g_2 = (0, 0, 0, a_1b_2 + a_2b_1)$, то кольцо $F_2 = \langle F, +, * \rangle$ становится $\mathcal{AO}$ -упорядоченным йордановым кольцом.

Доказательство теоремы 4. Прежде всего отметим, что из определений 4 и 5 вытекает утверждение

(*) f является гомоморфизмом частично псевдоупорядоченного кольца R в частично псевдоупорядоченное кольцо S .

Кроме того, из определений 4 и 5 следует утверждение

(**) f является $\mathcal{AO}$ -гомоморфизмом $\mathcal{AO}$ -группы $R_1 = \langle R, +, \leq_1 \rangle$ в $\mathcal{AO}$ -группу $S_1 = \langle S, +, \leq_2 \rangle$.

Докажем утверждение 1 а). Из утверждения 1 а) теоремы 2 и замечания (**) следует, что f — строгий o -гомоморфизм группы R_1 в группу S_1 , т. е. $f(R_1^+) = f(R_1) \cap S_1^+$.

Так как в силу замечания (*) по условиям (2) и (3) определения 1 положительные конусы R_1^+ и S_1^+ удовлетворяют условию (5) утверждения 1) леммы 19, то $R^+ = R_1^+$ и $S^+ = S_1^+$. Таким образом, $f(R^+) = f(R_1) \cap S^+ \subseteq f(R) \cap S^+$.

Пусть $u \in f(R) \cap S^+$. Тогда существует элемент $x \in R$, для которого $f(x) = u$. В $\mathcal{AO}$ -группе R_1 элемент x имеет вид $a - b$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b из R_1^+ . Значит, $f(x) = f(a) - f(b)$, где по замечанию (**) элементы $f(a)$ и $f(b)$ почти ортогональны в группе S_1 . Так как $f(x) \in S^+$, то по лемме 9 $f(b) = 0$. Таким образом, $u \in f(R^+)$, т. е. $f(R) \cap S^+ \subseteq f(R^+)$.

Докажем утверждение 1 б). Из утверждения 1 а) теоремы 4, замечания (*) и утверждения 1 теоремы 3 следует, что ядро $\ker f$ является выпуклым идеалом кольца R . По замечанию (**) и утверждению 1 б) теоремы 2 группа $\langle \ker f, + \rangle$ является направленной. Тогда по определению 2 $\ker f$ — направленный идеал.

Докажем утверждение 2 а). По утверждению 1 а) теоремы 4, замечанию (*) и утверждению 2 а) теоремы 3 фактор-кольцо R/I является частично псевдоупорядоченным кольцом. По замечанию (**) и утверждению 2 а) теоремы 2 группа $\langle R/I, + \rangle$ является $\mathcal{AO}$ -группой. Остаётся вспомнить определение 4.

По замечанию (*) и утверждению 2 б) теоремы 3 канонический гомоморфизм колец π является o -гомоморфизмом колец. Так как по определению 2 $\langle I, + \rangle$ —

выпуклая направленная подгруппа в $\mathcal{AO}$ -группе R_1 , то по утверждению 2 б) теоремы 2 π является $\mathcal{AO}$ -гомоморфизмом.

Так как по замечанию (**) и определению 3 подгруппа $\langle J, + \rangle$ выпукла и направлена в группе R_1 , то утверждение 2 с) теоремы 4 является следствием утверждения 2 с) теоремы 2.

Из замечания (*), утверждения 1 а) теоремы 4 и утверждения 3 теоремы 3 следует справедливость утверждения 3 теоремы 4.

Теорема 4 доказана полностью. $\square$

Доказательство теоремы 5. Так как $a, b \in R^+$, то $a + b \in R^+$. По лемме 21 существует выпуклый направленный идеал I_{a+b} кольца R . Пусть J — произвольный выпуклый направленный идеал кольца R и $x \in J$. Тогда по лемме 11 $a, b \in J$. Значит, $a + b \in J$.

Пусть $u \in I_{a+b}^+$. Тогда справедливы неравенства $0 \leq u \leq n(a + b)$ для некоторого целого числа $n > 0$. Так как $n(a + b) \in J$ и J — выпуклый идеал кольца R , то $u \in J$. Таким образом, справедливо включение $I_{a+b}^+ \subset J$.

Так как I_{a+b} — направленный идеал, то по утверждению 3) леммы 8 верно включение $I_{a+b} \subseteq J$. С другой стороны, так как имеют место неравенства $0 \leq a, b \leq a + b$ и I_{a+b} — выпуклый идеал кольца R , то $a, b \in I_{a+b}$, т. е. $x \in I_{a+b}$. Значит, $I_x = I_{a+b}$. Теорема 5 доказана. $\square$

Лемма 22. Пусть R — $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо, J — выпуклый направленный идеал кольца R и $x \in R \setminus J$. Если $y \in I_x$, то $y + J \in I_{x+J}$ в кольце R/J .

Доказательство. Так как R — $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо, то $x = a - b$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b из кольца R . Тогда в кольце R/J имеет место равенство $x + J = (a + J) - (b + J)$. В силу утверждения 2 а) теоремы 4 R/J — $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо.

По утверждению 2 б) теоремы 4 классы $a + J$ и $b + J$ почти ортогональны в кольце R/J . По теореме 5 существует выпуклый направленный идеал $I_{x+J} = I_{(a+J)+(b+J)}$ кольца R/J . Так как в кольце R/J справедливо равенство $(a + J) + (b + J) = a + b + J$, то $I_{x+J} = I_{a+b+J}$.

Пусть $u \in I_x^+$. Тогда справедливы неравенства $0 \leq u \leq n(a + b)$ для некоторого целого числа $n > 0$. В этом случае в кольце R/J имеют место неравенства

$$J \leq u + J \leq n(a + b) + J.$$

Из теоремы 5 следует, что $u + J \in I_{a+b+J}$, т. е. $u + J \in I_{x+J}$.

Пусть $y \in I_x$. Так как I_x — направленный идеал, то по утверждению 3) леммы 8 $y = u - v$ для некоторых $u, v \in I_x^+$. Тогда в кольце R/J справедливо равенство $y + J = (u + J) - (v + J)$, где в силу вышесказанного $u + J, v + J \in I_{x+J}$. $\square$

5. Свойства $\mathcal{AO}$ -первичных идеалов, доказательства теорем 6 и 7

Лемма 23. Пусть R — $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо. Если в кольце R существует последовательность (a_i) из элементов $a_{i+1} \in I_{a_i} I_{a_i}$, в которой $a_i \neq 0$ для любого индекса i , то в кольце R существует $\mathcal{AO}$ -первичный идеал P , который не содержит членов последовательности (a_i) .

Доказательство. Рассмотрим множество $T = \{K_j \mid j \in J\}$, где K_j — выпуклый направленный идеал кольца R , который не содержит членов последовательности (a_i) . Так как $\{0\} \in T$, то $T \neq \emptyset$. Пусть цепь

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \dots \quad (U)$$

состоит из идеалов множества T . Обозначим через K объединение всех идеалов цепи (U). Тогда K — выпуклый направленный идеал кольца R , который не содержит членов последовательности (a_i) , т. е. $K \in T$.

В силу леммы Цорна существуют максимальные выпуклые направленные идеалы кольца, которые не содержат членов последовательности (a_i) . Пусть P — максимальный выпуклый направленный идеал R , который не содержит членов последовательности (a_i) . Докажем, что P является $\mathcal{AO}$ -первичным идеалом в кольце R . Для этого рассмотрим в кольце R/P выпуклые направленные идеалы

$$L \neq \{P\} \text{ и } M \neq \{P\}.$$

По утверждению 4 теоремы 3 существуют выпуклые направленные идеалы I и J кольца R , для которых $\pi(I) = L$ и $\pi(J) = M$. Тогда $P \subset I$ и $P \subset J$.

Из максимальной идеала P следует существование элементов $a_s \in I$ и $a_t \in J$, которые являются членами последовательности (a_i) . Если $s \neq t$, то для определённости будем считать, что $s < t$. По теореме 5 найдётся выпуклый направленный идеал I_{a_s} кольца R , для которого верно включение $I_{a_s} \subseteq I$. Так как по определению произведения идеалов $I_{a_s} I_{a_s} \subseteq I_{a_s}$, то по теореме 5 $I_{a_s} I_{a_s} \subseteq I$. Тогда по определению последовательности $a_{s+1} \in I \cap (a_i)$.

Рассуждая аналогично, через конечное число шагов увидим, что $a_t \in I$. В силу теоремы 5 верно включение $I_{a_t} \subseteq J$. С другой стороны, по теореме 5 справедливо включение $I_{a_t} \subseteq J$. По определению последовательности это означает, что элемент $a_{t+1} \in IJ$, где

$$a_{t+1} = \sum_{k=1}^{n(u)} x_k y_k \text{ для } x_k \in I, y_k \in J.$$

Тогда в кольце R/P справедливо равенство

$$a_{t+1} + P = \sum_{k=1}^{n(u)} (x_k + P)(y_k + P) \text{ для } x_k + P \in L, y_k + P \in M.$$

Таким образом, $a_{t+1} + P \in LM$. С другой стороны, $a_{t+1} \notin P$, поэтому $a_{t+1} + P \neq P$. Таким образом, $LM \neq \{P\}$. Следовательно, фактор-кольцо R/P является $\mathcal{AO}$ -первичным кольцом. $\square$

Лемма 24. Пусть R — $\mathcal{AO}$ -упорядоченное кольцо. Если $a \notin \mathcal{AO}\text{-rad}(R)$, то существует последовательность (a_i) из элементов кольца R , где $a_1 = a$ и $a_{i+1} \in I_{a_i}I_{a_i}$, в которой $a_i \neq 0$ для любого индекса i .

Доказательство. Так как $a \notin \mathcal{AO}\text{-rad}(R)$, то существует $\mathcal{AO}$ -первичный идеал P в кольце R , для которого $a \notin P$. В силу теоремы 5 это означает, что существует выпуклый направленный идеал I_a в кольце R , который не является подмножеством идеала P . Тогда по утверждению 2 с) теоремы 4 в кольце R/P существует выпуклый направленный идеал $K = \pi(I_a) \neq \{P\}$. Так как P — $\mathcal{AO}$ -первичный идеал кольца R , то кольцо R/P является $\mathcal{AO}$ -первичным кольцом. Поэтому $KK \neq \{P\}$. Следовательно, найдётся элемент $u \in KK \setminus P$. По предложению 2 с) теоремы 3 это означает, что

$$u = \sum_{i=1}^{n(u)} x_i y_i \quad \text{для } x_i, y_i \in K.$$

В кольце R/P

$$x_i = b_i + P \quad \text{и} \quad y_i = c_i + P, \quad \text{где } b_i, c_i \in I_a.$$

Таким образом,

$$u = \sum_{i=1}^{n(u)} b_i c_i + P.$$

Положим

$$a_1 = a, \quad a_2 = \sum_{i=1}^{n(u)} b_i c_i.$$

Так как $a_2 \notin P$, то по теореме 5 идеал I_{a_2} не является подмножеством идеала P . Рассмотрев в кольце R/P выпуклый направленный идеал $\pi(I_{a_2}) \neq \{P\}$, рассуждая аналогично предыдущему, найдём элемент $a_3 \in I_{a_2}I_{a_2}$, для которого $a_3 \notin P$. Процесс построения последовательности можно продолжить. $\square$

Доказательство теоремы 6. Если элемент $r \in R$ не является псевдо- t -нильпотентным, то в силу леммы 23 он не принадлежит $\mathcal{AO}$ -первичному радикалу кольца R . Если же элемент r не принадлежит $\mathcal{AO}$ -первичному радикалу кольца R , то по лемме 24 он не является псевдо- t -нильпотентным. Теорема 6 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 7. Рассмотрим смежный класс $X \in R/M$, где $X \neq M$. Тогда существует элемент $a_1 \notin M$ в кольце R , для которого $X = a_1 + M$. Так как $a_1 \notin \mathcal{AO}\text{-rad}(R)$, то существует $\mathcal{AO}$ -первичный идеал P

кольца R , для которого $a_1 \notin P$. Тогда в силу теоремы 5 существует выпуклый направленный идеал I_{a_1} кольца R , который не является подмножеством идеала P .

Повторив рассуждения леммы 24, найдём элемент $a_2 \in I_{a_1}I_{a_1}$, не принадлежащий идеалу P . Значит, $a_2 \notin M$. Так как $a_2 \in I_{a_1}I_{a_1}$, то

$$a_2 = \sum_{i=1}^{n(a)} x_i y_i, \quad \text{где } x_i, y_i \in I_{a_1}.$$

Из леммы 22 следует, что классы $x_i + M$ и $y_i + M$ принадлежат идеалу I_{a_1+M} в кольце R/M . Таким образом, $a_2 + M \in I_{a_1+M}I_{a_1+M}$ и $a_2 + M \neq M$. В этом случае найдётся элемент $a_3 \notin M$, для которого $a_3 + M \in I_{a_2+M}I_{a_2+M}$ и $a_3 + M \neq M$.

Продолжая процесс, можно получить последовательность классов $(a_i + M)$, в которой для любого индекса i $a_i + M \neq M$. Следовательно, любой ненулевой класс в кольце R/M не является псевдо- t -нильпотентным. Теорема 7 доказана. $\square$

Литература

- [1] Бибеева В. Н., Ширшова Е. Е. О линейно K -упорядоченных кольцах // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 13—23.
- [2] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.
- [3] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 295—325.
- [4] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.
- [5] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 53—63.
- [6] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал решёточно K -упорядоченных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 85—158.
- [7] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных колец // Сборник работ по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — С. 178—184.
- [8] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1990. — № 2. — С. 84—86.
- [9] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал Ω -групп и Ω - l -групп // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1405—1413.
- [10] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал pl -групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 193—199.
- [11] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичные радикалы AO -групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 197—206.
- [12] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

- [13] Ширшова Е. Е. Гомоморфизмы, сохраняющие p -ортогональность // Фундамент. и прикл. матем. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 939–952.
- [14] Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах АО-групп // Универсальная алгебра и её приложения. Труды участников международного семинара, посвящённого памяти профессора Московского университета Л. А. Скорнякова. — Волгоград: Перемена, 2000. — С. 287–294.
- [15] Ширшова Е. Е. Об обобщении понятия ортогональности и группах Рисса // Матем. заметки. — 2001. — Т. 69, № 1. — С. 122–132.
- [16] Ширшова Е. Е. Расширения АО-групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2003. — Т. 9, вып. 1. — С. 277–281.
- [17] Ширшова Е. Е. О первичных радикалах и сплетениях частично упорядоченных групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 8. — С. 245–261.
- [18] Ширшова Е. Е. О частично K -упорядоченных кольцах // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 1. — С. 225–239.
- [19] Birkhoff G., Pierce R. S. Lattice-ordered rings // An. Acad. Brasil. Ci. — 1956. — Vol. 28. — P. 41–69.
- [20] Jakubíková M. Konvexe gerichtete Untergruppen der Rieszschen Gruppen // Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied. — 1971. — Vol. 21, no. 1. — P. 3–8.
- [21] Levitzki J. Prime ideals and the lower radical // Amer. J. Math. — 1951. — Vol. 73. — P. 25–29.
- [22] Shirshova E. E. On extensions of po -groups // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131. — P. 345–353.
- [23] Shirshova E. E. On groups with the almost orthogonality condition // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 10. — P. 4803–4818.