Группа частных полугруппы обратимых неотрицательных матриц над локальным кольцом

В. В. НЕМИРО
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vladnemiro@gmail.com

УДК 512.534.7+512.555

Ключевые слова: группа частных, полугруппа неотрицательных обратимых матриц, упорядоченное кольцо, локальное кольцо.

Аннотация

В работе доказывается, что для линейно упорядоченного локального кольца R с обратимой двойкой группа частных полугруппы неотрицательных обратимых матриц $\mathrm{G}_n(R)$ при $n \geqslant 3$ совпадает с группой $\mathrm{GL}_n(R)$.

Abstract

V. V. Nemiro, The group of quotients of the semigroup of invertible nonnegative matrices over local rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 167—188.

In this paper, we prove that for a linearly ordered local ring R with $1/2$ the group of quotients of the semigroup of invertible nonnegative matrices $\mathrm{G}_n(R)$ for $n \geqslant 3$ coincides with the group $\mathrm{GL}_n(R)$.

Введение

Эта статья является продолжением серии работ [4,5], она посвящена построению группы частных для полугруппы неотрицательных обратимых матриц над локальным кольцом с обратимой двойкой.

Пусть R — линейно упорядоченное локальное кольцо. Рассмотрим $\mathrm{G}_n(R)$ — подполугруппу в группе $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящую из всех матриц с неотрицательными коэффициентами.

Существует понятие (подробное определение будет дано ниже) группы частных для полугруппы. Естественно задаться вопросом, не совпадёт ли группа частных полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$ с группой $\mathrm{GL}_n(R)$.

В [12] этот вопрос рассмотрен для $n = 2$, ответ получен отрицательный. В [4,5] Е. И. Буниной, А. В. Михалёвым и В. В. Немиро доказано, что в случае, когда $n \geqslant 3$ и R — линейно упорядоченное тело, ответ на поставленный вопрос положительный.

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 4, с. 167—188.

В данной работе мы доказываем, что для линейно упорядоченного локального кольца при $n \geqslant 3$ группа частных полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$ также совпадает с группой $\mathrm{GL}_n(R)$.

В этой работе будут частично использоваться идеи доказательства работ [4, 5], поэтому мы кратко изложим их для удобства.

Полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$ для различных типов упорядоченных колец R с точки зрения их автоморфизмов, эндоморфизмов и элементарной эквивалентности изучались различными авторами А. В. Михалёвым, М. А. Шаталовой, Е. И. Буниной, П. П. Семёновым [1—3, 6, 7, 9—11].

1. Основные определения

Введём определение группы частных (как оно было дано у А.И. Мальцева в работе [8]).

Пусть имеется некоторая непустая полугруппа A. Каждому элементу x из A поставим в соответствие новый элемент x^-, не входящий в A. Обозначим через S совокупность всех конечных слов, состоящих из новых элементов и элементов полугруппы A. Определим теперь следующие разрешённые преобразования:

- между любыми двумя соседними элементами слова вставляется пара x^-x или пара xx^-,
- из слова выбрасывается либо пара x^-x, либо пара xx^-,
- два соседних элемента слова, принадлежащие полугруппе A, заменяются элементом, равным их произведению,
- элемент $x \in A$ заменяется парой элементов из A, произведение которых равно x.

Все слова относительно этих элементарных преобразований распадаются на классы эквивалентных между собой. Пусть (a) обозначает класс, которому принадлежит слово a. По определению полагаем $(a)(b) = (ab)$. Классы относительно такого умножения образуют группу G.

Определение 1. Построенная группа G называется *группой частных* полугруппы A.

Пример 1. Пусть полугруппа A изначально была группой. Покажем, что тогда в группе частных G элементы x^- и x^{-1} эквивалентны. Действительно,

$$x^- \sim x^- \cdot e \sim x^- x x^{-1} \sim x^{-1}.$$

Очевидно, что пустая последовательность в этом случае эквивалентна единице:

$$\varepsilon \sim e \cdot e^- \sim e \cdot e \sim e,$$

а произвольное слово из символов $x_1, x_1^-, \ldots, x_n, x_n^-$ — элементу группы A, получающемуся перемножением этих элементов (где вместо x_i^- мы используем x_i^{-1}). Таким образом, $A \simeq G$, т. е. группа частных группы — это она сама.

Пример 2. Найдём группу частных полугруппы $(\mathbb{N}, +)$ натуральных чисел по сложению. Произвольный элемент этой группы частных можно представить как слово, состоящее из символов 1 и 1^-, чередующихся между собой. Действительно, любое натуральное число n заменяется на последовательность из n единиц, а любой элемент вида n^- можно заменить на n элементов вида 1^- благодаря эквивалентности $n-1 \sim (n-1)\,1 \cdot 1^- \sim n \cdot 1^-$ и следующей цепочке эквивалентностей:

$$n^- \sim n^-(n-1)(n-1)^- \sim n^- n \cdot 1^-(n-1)^- \sim 1^-(n-1)^-.$$

Очевидно, что два слова, состоящие из 1 и 1^-, эквивалентны друг другу тогда и только тогда, когда у них одинакова разность количества 1 и 1^-. Значит, группу частных полугруппы натуральных чисел можно отождествить с группой целых чисел.

Пример 3. Найдём группу частных полугруппы $(\{0,1\}, \cdot)$. Заметим, что

$$0^- \sim 0^-00^- \sim 0^-000^- \sim e, \quad 0 \sim 000^- \sim 00^- \sim e.$$

Поэтому все слова из одной буквы в группе частных эквивалентны единице, значит, и сама группа оказывается единичной.

Обозначим положительные и отрицательные элементы кольца R через R_+ и R_- соответственно.

Определение 2. Введём для матриц элементарных преобразований следующие обозначения:

$$t_{ij}(a) = E + a \cdot E_{ij}, \quad \text{где} \quad i \neq j.$$

Через σ обозначим матрицу перестановки, соответствующую $\sigma \in S_n$.

Обозначим через $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ диагональную матрицу, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k \in R^*$.

Будем называть перечисленные матрицы *элементарными*.

Определение 3. Пусть $\mathbf{P}$ — подполугруппа в $\mathrm{G}_n(R)$, порождённая всеми матрицами σ $(\sigma \in S_n)$, $t_{i,j}(x)$ $(x \in R_+,\ i \neq j)$ и $\mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, $\alpha_k \in R_+^*$.

Определение 4. Две матрицы $A, B \in \mathrm{G}_n(R)$ называются *$\mathcal{P}$-эквивалентными* (см. [9]), если существуют матрицы $A_j \in \mathrm{G}_n(R)$, $j = 0, \ldots, k$, $A = A_0$, $B = A_k$, и матрицы $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \ldots, k-1$, такие что $P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i$.

Над линейно упорядоченным телом полугруппа $\mathrm{GE}_n^+(R)$, порождённая всеми матрицами, $\mathcal{P}$-эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$, совпадает со всей полугруппой $\mathrm{G}_n(R)$.

В то же время при $n > 2$ полугруппа $\mathbf{P}$ строго содержится в полугруппе $\mathrm{G}_n(R)$ (см. далее).

2. Порождающие и соотношения

Для доказательства основной теоремы нам необходимо найти систему образующих для группы $\mathrm{GL}_n(R)$ в случае, когда R — локальное некоммутативное кольцо.

Обозначим через e элемент, соответствующий единичной матрице.

Во всей группе $\mathrm{GL}_n(R)$ соотношения для элементарных матриц примут следующий вид:

1) $e = t_{ij}(0) = \sigma_e = [1, \ldots, 1]$;
2) $\alpha\, t_{ij}(x) = t_{ij}(\alpha_i x \alpha_j^{-1})\, \alpha$;
3) $\sigma\, [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]\sigma^{-1} = [\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}]$;
4) $\sigma\, t_{ij}(a)\, \sigma^{-1} = t_{\sigma(i)\, \sigma(j)}(a)$;
5) $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n][\beta_1, \ldots, \beta_n] = [\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n]$;
6) $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$, где σ_3 — перестановка $\sigma_1\sigma_2$ в S_n;
7) $t_{ij}(x)t_{ij}(y) = t_{ij}(x+y)$;
8) $t_{ij}(x)t_{ji}(y) = \alpha\, t_{ji}(u)t_{ij}(v)$, где $1+xy$ — обратимый элемент, $u = (1+yx)y$, $v = (1+xy)^{-1}x$, α — диагональная матрица с $\alpha_i = 1+xy$, $\alpha_j = (1+yx)^{-1}$;
9) $t_{ij}(a)\, t_{kl}(b) = t_{kl}(b)\, t_{ij}(a)$, где $i \neq l$ и $j \neq k$;
10) $t_{ij}(a)\, t_{jk}(b) = t_{ik}(ab)\, t_{jk}(b)\, t_{ij}(a)$, где $i \neq k$.

Рассмотрим группу G, в которой указанные выше соотношения являются системой образующих, т. е. в этой группе G найдутся такие элементы $\hat{t}_{ij}(x)$ для $1 \geqslant i, j \geqslant n$, $x \in R$, элементы $\hat{\sigma}$ для $\hat{\sigma} \in S_n$ и элементы $\hat{\alpha} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ для $\alpha_i \in R$, что они являются образующими группы G и между ними выполнены все соотношения, представленные выше. Для краткости будем обозначать образующие элементы группы G через $t_{ij}(x)$, σ и α. Тогда для элементов группы G выполнено следующее.

Лемма 1. *Элемент $q = \sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1)$ в G является элементом $[-1, 1, \ldots, 1]$.*

Доказательство. По построению ясно, что элемент q коммутирует со всеми элементами вида $t_{ij}(a)$ при $i, j > 2$. Центром данного множества являются элементы вида $[x, y, z, \ldots, z]$. Также несложными преобразованиями можно убедиться, что данный элемент коммутирует со всеми элементами $t_{2k}(a)$ при $k > 2$. Действительно, получаем следующую цепочку равенств:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1)\, t_{2k}(a) = \\
&= \sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{1k}(a)\, t_{2k}(a)\, t_{12}(1) = \\
&= \sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{1k}(a)\, t_{21}(-1)\, t_{2k}(-a)\, t_{2k}(a)\, t_{12}(1) = \\
&= \sigma_{12}\, t_{1k}(a)\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1) = \\
&= t_{2k}(a)\, \sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1).
\end{aligned}
$$

В итоге получаем, что элемент q имеет вид $[x, z, \ldots, z]$. Для того чтобы найти значения x, z, покажем, что $q^2 = e$.

Достаточно показать, что

$$\sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1)\sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1) = e.$$

Преобразовав левую часть, получаем, что нужно показать следующее равенство:

$$t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1)\, t_{21}(1)\, t_{12}(-1)\, t_{21}(1) = e.$$

Действительно, получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
&t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1)\, t_{21}(1)\, t_{12}(-1)\, t_{21}(1) = \\
&= t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, [2, \tfrac{1}{2}]\, t_{21}(2)\, t_{12}(\tfrac{1}{2})\, t_{12}(-1)\, t_{21}(1) = \\
&= t_{12}(1)\, [2, \tfrac{1}{2}]\, t_{21}(-4)\, t_{21}(2)\, t_{12}(-\tfrac{1}{2})\, t_{21}(1) = \\
&= t_{12}(1)\, [2, \tfrac{1}{2}]\, t_{21}(-2)\, [\tfrac{1}{2}, 2]\, t_{21}(\tfrac{1}{2})\, t_{12}(-1) = \\
&= t_{12}(1)\, [2, \tfrac{1}{2}]\, [\tfrac{1}{2}, 2]\, t_{21}(-\tfrac{1}{2})\, t_{21}(\tfrac{1}{2})\, t_{12}(-1) = \\
&= e.
\end{aligned}$$

В итоге получаем, что у элемента q значения x и z равны либо 1, либо -1.

Заметим, что при коммутировании с элементом $t_{1k}(a)$ получается следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1)\, t_{1k}(a) = \\
&= \sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{1k}(a)\, t_{12}(1) = \\
&= \sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{2k}(-a)\, t_{1k}(a)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1) = \\
&= \sigma_{12}\, t_{2k}(-a)\, t_{12}(1)\, t_{1k}(-a)\, t_{1k}(a)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1) = \\
&= t_{1k}(-a)\, \sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1).
\end{aligned}$$

Это и значит, что q равен либо $[-1, 1, \ldots, 1]$, либо $[1, -1, \ldots, -1]$.

Так как элементы $t_{12}(x)$, $[\alpha_1, \alpha_2, 1, \ldots, 1]$ и σ_{12} образуют подгруппу в G, изоморфную $\mathrm{GL}_2(R)$, элемент $q = \sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1)$ не может быть равен элементу вида $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]$ с $\alpha_3 \neq 1$. Из этого следует, что $\sigma_{12}\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{12}(1) = [-1, 1, \ldots, 1]$. □

Вернёмся к группе $\mathrm{GL}_n(R)$. Рассмотрим внимательнее соотношение

$$t_{ij}(x)t_{ji}(y) = \alpha\, t_{ji}(u)t_{ij}(v).$$

Видно, что данное соотношение выполнено только в случае, когда элемент $1+xy$ обратим. В случае, когда данный элемент необратим, из представленной выше системы соотношений можно вывести другое соотношение.

Для этого нам необходимо доказать следующие утверждения.

Лемма 2. *Произведение двух элементов x, y из локального некоммутативного кольца R обратимо тогда и только тогда, когда оба элемента x и y обратимы.*

Доказательство. Очевидно, что произведение двух обратимых элементов является обратимым. Также легко заметить, что произведение обратимого и необратимого элемента не может быть обратимым.

Осталось показать, что произведение двух необратимых элементов не может быть обратимым элементом. По определению в локальном кольце все необратимые элементы образуют максимальный идеал; произведение необратимого элемента на любой другой элемент будет расположено в идеале, т. е. будет необратимым.

Получаем, что только произведение двух обратимых элементов является обратимым. $\square$

Лемма 3. *Для любых двух элементов x, y из локального кольца R выполнено, что либо элемент $1 + xy$ обратим, либо x и y обратимы.*

Доказательство. Действительно, если необратим элемент $1+xy$, то элемент xy не может быть необратимым, так как $(1+xy)-xy = 1$ — обратимый элемент. Получаем, что xy обратим. Согласно лемме 2 получаем, что x и y оба обратимы. $\square$

Теперь покажем, как именно элементы $t_{ij}(x)$ и $t_{ji}(y)$ коммутируют в группе $\mathrm{GL}_n(R)$:

Лемма 4. *Если $1 + xy$ обратим, то $t_{ij}(x)t_{ji}(y) = \alpha\, t_{ji}(u)t_{ij}(v)$, а если $1 + xy$ необратим, то $t_{ij}(x)t_{ji}(y) = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]t_{ji}(-x)t_{ij}(x^{-1} + y)\sigma_{ij}$, где $\alpha_i = x$, $\alpha_j = -x^{-1}$ и $\alpha_k = 1$ при $k \neq i, j$.*

Доказательство. Действительно, первое выражение является образующим соотношением для случая обратимого элемента $1 + xy$.

Для второго случае получаем, что при необратимом $1 + xy$ будут обратимы элементы x, y. Для краткости будем обозначать элемент α через $[\alpha_i = x,\ \alpha_j = -x^{-1}]$. Домножив соотношение слева на $t_{ij}(-x)$ и справа на $t_{ji}(-y)$, получим, что необходимо доказать следующее равенство:

$$t_{ij}(-x)[\alpha_i = x,\ \alpha_j = -x^{-1}]t_{ji}(-x)t_{ij}(x^{-1} + y)\sigma_{ij}t_{ji}(-y) = e.$$

Действительно, получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
&t_{ij}(-x)\,\underbracket{[\alpha_i = x,\ \alpha_j = -x^{-1}]}\,t_{ji}(-x)\,\underbracket{t_{ij}(x^{-1} + y)}\,\sigma_{ij}t_{ji}(-y) = \\
&= \underbracket{t_{ij}(-x)[\alpha_i = x]}\,\underbracket{[\alpha_j = -x^{-1}]t_{ji}(-x)}\,t_{ij}(x^{-1})\,\underbracket{t_{ij}(y)\sigma_{ij}}\,t_{ji}(-y) = \\
&= \overbracket{[\alpha_i = x]t_{ij}(-1)}\,\overbracket{t_{ji}(1)[\alpha_j = -x^{-1}]}\,t_{ij}(x^{-1})\sigma_{ij}\,\underbrace{t_{ji}(y)t_{ji}(-y)}_{e} = \\
&= [\alpha_i = x]t_{ij}(-1)t_{ji}(1)[\alpha_j = -x^{-1}]t_{ij}(x^{-1})\sigma_{ij}.
\end{aligned}$$

Из представления диагональной матрицы с одной -1 на диагонали можно получить следующее равенство:

$$[\alpha_i = -1] = \sigma_{ij}\, t_{ij}(1)\, t_{ji}(-1)\, t_{ij}(1),$$
$$t_{ij}(1)\, t_{ji}(-1) = [\alpha_i = -1]\, \sigma_{ij}\, t_{ij}(1).$$

Основное выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&[\alpha_i = x]\, \underbrace{t_{ij}(-1) t_{ji}(1)}\, \underbrace{[\alpha_j = -x^{-1}] t_{ij}(x^{-1})}\, \sigma_{ij} = \\
&= \underbrace{[\alpha_i = x][\alpha_i = -1]}\sigma_{ij} \underbrace{t_{ij}(1)\, t_{ij}(-1)}\, \underbrace{[\alpha_j = -x^{-1}]\sigma_{ij}} = \\
&= \overbrace{[\alpha_i = -x]}\, \sigma_{ij}\, \overbrace{\sigma_{ij}[\alpha_i = -x^{-1}]} = \\
&= e.
\end{aligned}$$
$\square$

Для доказательство теоремы о системе образующих для $\mathrm{GL}_n(R)$ нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 5. *Каждый элемент группы* $\mathrm{GL}_n(R)$ *представляется в виде произведения* $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] T_1 \ldots T_n \sigma$, *где* $T_k = \prod\limits_{i \neq k} t_{ki}(a_{ki})$ *для некоторых* $a_{ij} \in R$.

Доказательство. Заметим, что все матрицы $A \in \mathrm{GL}_n(R)$ обратимы. Это равносильно тому, что существует такая матрица $B \in \mathrm{GL}_n(R)$, что $AB = E_n$. Таким образом, для матрицы $A = (a_{ij})$ некоторая линейная комбинация элементов из первой строки равна 1, $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} = 1$, т. е. является невырожденной.

Так как кольцо R является локальным, получаем, что хотя бы одно из слагаемых обратимо, так как необратимые элементы образуют идеал в кольце R. Пусть для $1 \leqslant k \leqslant n$ слагаемое $a_{1k}b_{k1}$ является обратимым. Получаем, что элементы a_{1k} и b_{k1} являются обратимыми. Из этого сразу следует, что элементарными преобразованиями можно поменять местами 1-й и k-й столбец, после чего обнулить все элементы первого столбца, кроме первого.

Значит, наша матрица A раскладывается в виде произведения:

$$[\alpha_1, 1, \ldots, 1] t_{21}(c_{21}) \ldots t_{n1}(c_{n1}) A' \sigma_{1k} = [\alpha_1, 1, \ldots, 1] T_1 A' \sigma_{1k},$$

где у матрицы A' в первом столбце ненулевой только один элемент на диагонали.

Далее, повторяя данную процедуру для второго столбца матрицы A', получаем разложение элемента $A \in \mathrm{GL}_n(R)$ в виде $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] T_1 \ldots T_n \sigma$. $\square$

Замечание 1. Представление матриц из $\mathrm{GL}_n(R)$ в таком виде не единственно. Как уже показывалось ранее, выполнено следующее соотношение:

$$t_{21}(-1)\, t_{12}(1) = [-1, 1]\, t_{12}(1)\, \sigma_{12}.$$

Назовём такое представление матрицы *элементарным*.

Лемма 6. *С помощью представленных выше соотношений можно показать, что произведение двух элементарных представлений также является элементарным.*

Доказательство. Для начала покажем, что классы T_i и T_j почти коммутируют между собой. Для краткости записи будем пока опускать в элементах $t_{ij}(a)$ значение a и будем записывать эти элементы просто как t_{ij}. Элементы $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ будем кратко обозначать просто как α. Также через T_i^S будем обозначать $\prod\limits_{k \notin S} t_{ki}$. В такой записи получим следующее соотношение:

$$t_{ij}\, t_{ji} = \alpha\, t_{ji}\, t_{ij}\, (\sigma_{ij})^p,$$

где $p \in \{0, 1\}$ в соответствии с леммой 4.

Далее посмотрим, чему равняется произведение $T_i\, T_j$:

$$\begin{aligned} T_i\, T_j &= T_i^i\, T_j^j = \\ &= T_i^{i,j}\; t_{ji}\, t_{ij}\; T_j^{i,j} = \\ &= T_i^{i,j}\; \alpha\, t_{ij}\, t_{ji}\, (\sigma_{ij})^p\; T_j^{i,j} = \\ &= \alpha\; T_i^{i,j}\, t_{ij}\; t_{ji}\, (\sigma_{ij})^p\, T_j^{i,j} = \\ &= \alpha\; t_{ij}\, T_j^{i,j}\, T_i^{i,j}\; t_{ji}\, (\sigma_{ij})^p\, T_j^{i,j}. \end{aligned}$$

Случаи $p = 0$ и $p = 1$ разберём отдельно. Вот что получается при $p = 0$:

$$\begin{aligned} T_i\, T_j &= \alpha\, t_{ij}\, T_j^{i,j}\, T_i^{i,j}\; t_{ji}\, T_j^{i,j} = \\ &= \alpha\, t_{ij}\, T_j^{i,j}\, T_i^{i,j}\; T_j^{i,j}\, T_i^{i,j}\, t_{ji} = \\ &= \alpha\, t_{ij}\, T_j^{i,j}\, T_j^{i,j}\; T_i^{i,j}\, T_i^{i,j}\, t_{ji} = \\ &= \alpha\, T_j\, T_i. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $p = 1$:

$$\begin{aligned} T_i\, T_j &= \alpha\, t_{ij}\, T_j^{i,j}\, T_i^{i,j}\, t_{ji}\; \sigma_{ij}\, T_j^{i,j} = \\ &= \alpha\; t_{ij}\, T_j^{i,j}\; T_i^{i,j}\, t_{ji}\; T_i^{i,j}\, \sigma_{ij} = \\ &= \alpha\, T_j\, T_i\, \sigma_{ij}. \end{aligned}$$

Теперь можно понять, как именно произведение элементарных представлений приводится к элементарному:

$$\alpha T_1 \ldots T_n \sigma \alpha' T_1 \ldots T_n \sigma' = \alpha\alpha' T_1 \ldots T_n T_{i_1} \ldots T_{i_n} \sigma\sigma'.$$

Для того чтобы произведение T_i привести к нужному нам виду, необходимо с помощью перестановок друг с другом соседних $T_i\, T_j$ в самое начало поставить T_1, затем T_2 и так далее.

Покажем, как на первую позицию перевести T_1, чтобы в оставшемся произведении множителей T_1 больше не было. Пусть на данный момент есть произведение $T_{k_1} \dots T_{k_m}$, такое что $k_i \neq k_{i+1}$ для $1 \leqslant i < m$. Введём полуинвариант I данного произведения, равный $k_1 + \dots + k_m$. Данный полуинвариант принимает только неотрицательные целые значения.

Теперь возьмём самый правый множитель T_1 и начнём переставлять его налево. Переставляя T_1 с некоторым T_k, мы получаем слева некую диагональную матрицу, которую можем безболезненно перенести в левую часть всего произведения. В случае, когда при перестановке этих множителей справа появляется матрица транспозиции σ_{1k}, мы перемещаем её направо. Посмотрим, что получается при перестановке этой транспозиции в правую часть.

Заметим, что для T_i при $i \neq 1, k$ мы получаем следующее равенство:

$$\sigma_{1k}\, T_i = T_i\, \sigma_{1k}.$$

Изменение в индексе множителя произойдёт только в множителе T_k, так как мы взяли самый правый множитель T_1 и такой множитель не встретится с матрицей σ_{1k}. В этом случае значение полуинварианта I уменьшится на $k - 1$.

Как только после перестановки двух множителей рядом встречаются элементы с одинаковым индексом i, они схлопываются в один множитель и значение I уменьшается на i.

В силу того что значение I не увеличивается и принимает только целые значения, в какой-то момент при появлении матриц σ_{1k} и последующем их перемещении в правую часть значение I не будет уменьшаться, т. е. элемент T_1 можно будет переместить влево и при этом T_1 не будет появляться из-за действия σ_{1k}.

Аналогично перемещая влево T_2, T_3 и так далее, мы приведём произведение в элементарный вид. □

Лемма 7. *С помощью представленных выше соотношений можно вывести равенство двух элементов.*

Доказательство. Покажем, что разные представления одного и того же элемента приводятся друг к другу с помощью представленных выше соотношений.

Пусть выполнено равенство $\alpha T_1 \dots T_n \sigma = \alpha' T_1 \dots T_n \sigma'$. Перенеся все множители в правую часть равенства и применив аналогичный лемме 6 способ представления в элементарном виде, получим, что $T_1 \dots T_n = \alpha'' \sigma''$ для некоторых α'', σ''.

Заметим, что в левой части равенства в матрице на позиции $1, 1$ стоит 1. Значит, и справа должна стоять 1, т. е. у матрицы перестановки первый элемент является неподвижным и у диагональной матрицы на первом месте стоит 1. В силу того что все остальные элементы в первом столбце нулевые, получаем что $T_1 = e$.

Аналогичным образом показывается, что следующий элемент в перестановке является неподвижным, диагональный элемент равен 1.

В итоге получаем, что для единичной матрицы единственным разложением является только тривиальное, что аналогично первоначальному утверждению леммы. □

Теперь мы готовы доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для локального (необязательно коммутативного) кольца R элементарные матрицы составляют систему образующих группы $\mathrm{GL}_n(R)$.*

Доказательство. Согласно лемме 5 каждая матрица представляется в виде произведения элементарных. Согласно же лемме 6 произведение двух элементов также представляется в элементарном виде с помощью соотношений. В свою очередь лемма 7 говорит об эквивалентности представлений одного и того же элемента. Из этого как раз и следует, что данные и соотношения между ними являются системой образующих для $\mathrm{GL}_n(R)$ для линейно упорядоченного локального кольца R. □

Замечание 2. Очевидно, что группа $\mathrm{GL}_n(R)$ не содержит собственной подгруппы, содержащей $\mathrm{G}_n(R)$. Таким образом, группа $\mathrm{GL}_n(R)$ является минимальным расширением полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$.

3. Соотношения в группе частных

В группе частных полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$ выполнены все соотношения для неотрицательных значений параметров. Отличие от системы образующих группы $\mathrm{GL}_n(R)$ состоит в том, что в группе эти же самые соотношения выполнены для элементов с отрицательными параметрами. Покажем, что в группе частных полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$ найдутся элементы, которые будут выполнять роль элементов с отрицательными параметрами.

Из соотношения $t_{ij}(a)\,t_{ij}(-a) = t_{ij}(0) = e$ вытекает, что в группе частных полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$ кандидатом на элемент $t_{ij}(-a)$ является элемент $\big(t_{ij}(a)\big)^{-1}$.

Для поиска диагональных матриц с отрицательными элементами нам понадобятся следующие определения.

Определение 5. Введём в группе частных следующие обозначения:

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \sigma_{ij}\, t_{ij}(1)\, t_{ji}(-1)\, t_{ij}(1), \\ p_{ij} &= \sigma_{ij}\, t_{ji}(-1)\, t_{ij}(1)\, t_{ji}(-1). \end{aligned}$$

Теперь покажем некоторые условия на эти элементы.

Утверждение 1. *Для $1 \leqslant i, j \leqslant n$ выполнено равенство $q_{ij} = p_{ij}$.*

Доказательство. Сократим все выражение на σ_{ij} и перенесем в левую часть утверждения. Получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} &t_{ij}(1)\, t_{ji}(-1)\, \underbrace{t_{ij}(1)\, t_{ji}(1)}\, t_{ij}(-1)\, t_{ji}(1) = \\ &\quad = t_{ij}(1)\, \underbrace{t_{ji}(-1)\, [\alpha_i = 2,\ \alpha_j = \tfrac{1}{2}]}\, t_{ji}(2)\, \underbrace{t_{ij}(\tfrac{1}{2})\, t_{ij}(-1)}\, t_{ji}(1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t_{ij}(1)\,[\alpha_i = 2,\ \alpha_j = \tfrac{1}{2}]\ t_{ji}(-4)\,t_{ji}(2)\ t_{ij}(-\tfrac{1}{2})\ t_{ji}(1) = \\
&= t_{ij}(1)\,[\alpha_i = 2,\ \alpha_j = \tfrac{1}{2}]\ t_{ji}(-2)\ [\alpha_i = \tfrac{1}{2},\ \alpha_j = 2]\,t_{ji}(\tfrac{1}{2})\,t_{ij}(-1) = \\
&= t_{ij}(1)\,[\alpha_i = 2,\ \alpha_j = \tfrac{1}{2}]\,[\alpha_i = \tfrac{1}{2},\ \alpha_j = 2]\ t_{ji}(-\tfrac{1}{2})\,t_{ji}(\tfrac{1}{2})\ t_{ij}(-1) = \\
&= e.
\end{aligned}$$
□

Следствие 1. *Элемент q_{ij} является инволюцией.*

Доказательство. Действительно, распишем, чему равняется q_{ij}:

$$\begin{aligned}
q_{ij} = \sigma_{ij}\,t_{ij}(1)\,t_{ji}(-1)\,t_{ij}(1) &= t_{ji}(1)\,t_{ij}(-1)\,t_{ji}(1)\,\sigma_{ij} = \\
&= \bigl(\sigma_{ij}\,t_{ji}(-1)\,t_{ij}(1)\,t_{ji}(-1)\bigr)^{-1} = (p_{ij})^{-1} = (q_{ij})^{-1},
\end{aligned}$$

т. е. $(q_{ij})^2 = e$. □

Приведём несколько важных определений и предложений из [4, 5].

В случае $n > 2$ с помощью элементарных порождающих σ, $t_{ij}(a)$ и $\mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ невозможно представить все элементы полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$. Простейшим примером элемента, который таким образом не выражается, является матрица с нулевыми элементами на главной диагонали и положительными вне неё.

Введём матрицу

$$u(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-3} \end{pmatrix}, \quad a, b \in R_+.$$

Утверждение 2. *Для любых различных i, j, k выполнено равенство $q_{ij} = q_{ik}$.*

Доказательство. Рассмотрим минимальный элемент $u(1,1)$. Разложим его в произведение элементарных матриц (в том числе с отрицательными коэффициентами):

$$u(1,1) = t_{32}(-1)\,[1,1,2]\,\sigma_{321}\,t_{12}(\tfrac{1}{2})\,t_{31}(1)\,t_{23}(1).$$

Таким образом, получаем новое соотношение, которое имеет вид

$$t_{32}(1)\,u(1,1) = [1,1,2]\,\sigma_{321}\,t_{12}(\tfrac{1}{2})\,t_{31}(1)\,t_{23}(1).$$

Транспонировав, получим равенство

$$u(1,1) = t_{32}(1)\,t_{13}(1)\,t_{21}(\tfrac{1}{2})\,\sigma_{123}\,[1,1,2]\,t_{23}(-1).$$

Это значит, что у нас есть ещё одно дополнительное соотношение:

$$u(1,1)\,t_{23}(1) = t_{32}(1)\,t_{13}(1)\,t_{21}(\tfrac{1}{2})\,\sigma_{123}\,[1,1,2].$$

Таким образом, получаем дополнительное соотношение

$$t_{32}(-1)\,[1,1,2]\sigma_{321}\,t_{12}(\tfrac{1}{2})\,t_{31}(1)\,t_{23}(1) = t_{32}(1)\,t_{13}(1)\,t_{21}(\tfrac{1}{2})\sigma_{123}\,[1,1,2]\,t_{23}(-1).$$

В конечном итоге получим следующее соотношение, выраженное через элементы полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$:

$$[1,1,2]\sigma_{321}\,t_{12}(\tfrac{1}{2})\,t_{31}(1)\,t_{23}(2) = t_{32}(2)\,t_{13}(1)\,t_{21}(\tfrac{1}{2})\,[2,1,1]\,\sigma_{123}.$$

Запишем

$$[1,1,2]\,\sigma_{321}\,t_{12}(\tfrac{1}{2})\,t_{31}(1)\,t_{23}(2) = [2,1,1]\,t_{32}(2)\,t_{13}(\tfrac{1}{2})\,t_{21}(1)\,\sigma_{123},$$

после чего преобразуем это соотношение:

$$\begin{aligned}&[\tfrac{1}{2},1,2]\,\sigma_{123}\,t_{23}(\tfrac{1}{2})\,t_{12}(1)\,t_{31}(2) = t_{32}(2)\,t_{13}(\tfrac{1}{2})\,t_{21}(1) \Longrightarrow\\ &\qquad\Longrightarrow [\tfrac{1}{2},1,2]\,\sigma_{123}\,t_{23}(\tfrac{1}{2})\,t_{12}(1)\,t_{21}(-1) = t_{32}(2)\,t_{13}(\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2).\end{aligned}$$

В конечном итоге преобразуем равенство к следующему виду:

$$t_{12}(1)\,t_{21}(-1) = t_{23}(-\tfrac{1}{2})\sigma_{321}\,[2,1,\tfrac{1}{2}]t_{32}(2)\,t_{13}(\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2).$$

Переставляя элементы, получаем

$$t_{31}(-2)\,t_{12}(1)\,t_{21}(-1)\,t_{31}(2) = t_{31}(-2)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\sigma_{321}[2,1,\tfrac{1}{2}]\,t_{32}(2)\,t_{13}(\tfrac{1}{2}).$$

Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned}&t_{31}(-2)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,\sigma_{321}\,[2,1,\tfrac{1}{2}]t_{32}(2)\,t_{13}(\tfrac{1}{2}) =\\ &\quad= t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\,t_{21}(-1)\,\sigma_{321}\,[2,1,\tfrac{1}{2}]t_{32}(2)\,t_{13}(\tfrac{1}{2}) =\\ &\quad= t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\,\sigma_{321}\,t_{32}(-1)\,[2,1,\tfrac{1}{2}]\,t_{32}(2)\,t_{13}(\tfrac{1}{2}) =\\ &\quad= t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\sigma_{321}\,[2,1,\tfrac{1}{2}]\,t_{32}(-2)\,t_{32}(2)\,t_{13}(\tfrac{1}{2}) =\\ &\quad= t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\sigma_{321}\,[2,1,\tfrac{1}{2}]\,t_{13}(\tfrac{1}{2}) =\\ &\quad= t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\sigma_{321}\,t_{13}(2)\,[2,1,\tfrac{1}{2}] =\\ &\quad= t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\,t_{32}(2)\,\sigma_{321}\,[2,1,\tfrac{1}{2}].\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$t_{31}(-2)\,t_{12}(1)\,t_{21}(-1)\,t_{31}(2) = t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\,t_{32}(2)\,\sigma_{321}[2,1,\tfrac{1}{2}].$$

Выделив в левой части необходимый нам множитель, получаем

$$\begin{aligned}&\sigma_{12}\,t_{12}(1)\,t_{21}(-1)\,t_{12}(1) =\\ &\qquad= \sigma_{12}\,t_{31}(2)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\,t_{32}(2)\,\sigma_{321}[2,1,\tfrac{1}{2}]\,t_{31}(-2)\,t_{12}(1).\end{aligned}$$

Теперь преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{12}\, t_{31}(2)\, t_{23}(-\tfrac{1}{2})\, t_{31}(-2)\, t_{32}(2)\, \sigma_{321}\, [2,1,\tfrac{1}{2}]\, t_{31}(-2)\, t_{12}(1) = \\
&\quad = \sigma_{12}\, \sigma_{321}\, t_{12}(2)\, t_{31}(-\tfrac{1}{2})\, t_{12}(-2)\, t_{13}(2)\, [2,1,\tfrac{1}{2}]\, t_{31}(-2)\, t_{12}(1) = \\
&\quad = \sigma_{13}\, t_{32}(1)\, t_{31}(-\tfrac{1}{2})\, t_{12}(2)\, t_{12}(-2)\, t_{13}(2)\, [2,1,\tfrac{1}{2}]\, t_{31}(-2)\, t_{12}(1) = \\
&\quad = \sigma_{13}\, t_{32}(1)\, t_{31}(-\tfrac{1}{2})\, t_{13}(2)\, t_{31}(-\tfrac{1}{2})\, [2,1,\tfrac{1}{2}]\, t_{12}(1) = \\
&\quad = \sigma_{13}\, t_{31}(-\tfrac{1}{2})\, t_{32}(1)\, t_{13}(2)\, t_{31}(-\tfrac{1}{2})\, t_{12}(2)\, [2,1,\tfrac{1}{2}] = \\
&\quad = \sigma_{13}\, t_{31}(-\tfrac{1}{2})\, t_{32}(1)\, t_{13}(2)\, t_{32}(-1)\, t_{12}(2)\, t_{31}(-\tfrac{1}{2})\, [2,1,\tfrac{1}{2}] = \\
&\quad = \sigma_{13}\, t_{31}(-\tfrac{1}{2})\, t_{32}(1)\, t_{32}(-1)\, t_{13}(2)\, t_{12}(-2)\, t_{12}(2)\, t_{31}(-\tfrac{1}{2})\, [2,1,\tfrac{1}{2}] = \\
&\quad = \sigma_{13}\, t_{31}(-\tfrac{1}{2})\, t_{13}(2)\, t_{31}(-\tfrac{1}{2})\, [2,1,1][1,1,\tfrac{1}{2}] = \\
&\quad = [1,1,2]\, \sigma_{13}\, t_{31}(-1)\, t_{13}(1)\, t_{31}(-1)\, [1,1,2]^{-1} = \\
&\quad = [1,1,2]\, p_{13}\, [1,1,2]^{-1} = \\
&\quad = [1,1,2]\, q_{13}\, [1,1,2]^{-1}.
\end{aligned}$$

Получаем, что $q_{12} = [\alpha_3 = 2]\, q_{13}\, [\alpha_3 = 2]^{-1}$ или $[\alpha_3 = 2]^{-1}\, q_{12}\, [\alpha_3 = 2] = q_{13}$. По построению q_{12} коммутирует с элементом $[\alpha_3 = 2]$, т. е. выполнено равенство $q_{12} = q_{13}$.

Аналогично показывается, что $q_{ij} = q_{ik}$ для любых различных i, j, k. □

Докажем дополнительное утверждение, аналогичное предложению 2 из работы [4].

Предложение 1. *В группе частных полугруппы* $\mathrm{G}_n(R)$, *где* R *— линейно упорядоченное локальное некоммутативное кольцо с обратимой двойкой, элемент* $c = t_{12}(-1)t_{21}(1)$ *является элементом порядка* 6.

Доказательство. Как было показано в утверждении 2, для элементов группы частных полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$ выполнено равенство

$$t_{31}(-2)\, t_{12}(1)\, t_{21}(-1)\, t_{31}(2) = t_{23}(-\tfrac{1}{2})\, t_{31}(-2)\, t_{32}(2)\, \sigma_{321}[2,1,\tfrac{1}{2}].$$

Возведём равенство в квадрат и справа получим следующее:

$$\begin{aligned}
&\big(\, t_{23}(-\tfrac{1}{2}) t_{31}(-2)\, t_{32}(2)\, \sigma_{321}\, [2,1,\tfrac{1}{2}]\big)^2 = \\
&\qquad = t_{23}(-\tfrac{1}{2})\, t_{31}(-2)\, t_{32}(2)\, t_{12}(-1)\, t_{23}(-\tfrac{1}{2})\, t_{21}(1) \cdot \big(\, \sigma_{321}[2,1,\tfrac{1}{2}]\big)^2.
\end{aligned}$$

Домножим ещё раз на первое равенство, получим

$$
\begin{aligned}
&t_{23}(-\tfrac{1}{2})t_{31}(-2)\,t_{32}(2)\sigma_{321}[2,1,\tfrac{1}{2}]\times\\
&\quad\times t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\,t_{32}(2)\,t_{12}(-1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{21}(1)(\sigma_{321}[2,1,\tfrac{1}{2}])^2=\\
&\quad=t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\,t_{32}(2)\,t_{12}(-1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{21}(1)\times\\
&\quad\times t_{31}(-2)t_{12}(-1)\,t_{13}(\tfrac{1}{2})\,(\sigma_{321}[2,1,\tfrac{1}{2}])^3=\\
&\quad=t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\,t_{32}(2)\,t_{12}(-1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{21}(1)\,t_{31}(-2)t_{12}(-1)\,t_{13}(\tfrac{1}{2})=\\
&\quad=t_{31}(-2)\,t_{21}(1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{32}(2)\,t_{12}(-1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{21}(1)\,t_{31}(-2)t_{12}(-1)\,t_{13}(\tfrac{1}{2}).
\end{aligned}
$$

Таким образом, имеем следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&\big(t_{12}(1)\,t_{21}(-1)\big)^3=\\
&\quad=t_{21}(1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{32}(2)\,t_{12}(-1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{21}(1)\,t_{31}(-2)t_{12}(-1)\,t_{13}(\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2),\\
&\big(t_{12}(1)\,t_{21}(-1)\big)^3=\\
&\quad=t_{21}(1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{32}(2)\,t_{12}(-1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\,t_{21}(1)\,t_{13}(\tfrac{1}{2})\,t_{12}(-1)\,t_{31}(-2),\\
&\big(t_{12}(1)\,t_{21}(-1)\big)^3=t_{21}(1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{32}(2)\,t_{12}(-1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\,t_{23}(\tfrac{1}{2})\,t_{13}(\tfrac{1}{2})\times\\
&\quad\times t_{21}(1)\,t_{32}(-2)\,t_{31}(-2)\,t_{12}(-1),\\
&\big(t_{12}(1)\,t_{21}(-1)\big)^3=t_{21}(1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{32}(2)\,t_{12}(-1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\,t_{23}(\tfrac{1}{2})\,t_{13}(\tfrac{1}{2})\times\\
&\quad\times t_{32}(-2)\,t_{21}(1)\,t_{12}(-1),\\
&\big(t_{12}(1)\,t_{21}(-1)\big)^4=\\
&\quad=t_{21}(1)\,t_{12}(-1)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{13}(-\tfrac{1}{2})\,t_{32}(2)\,t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{31}(-2)\,t_{23}(\tfrac{1}{2})\,t_{13}(\tfrac{1}{2})\,t_{32}(-2),\\
&\big(t_{12}(1)\,t_{21}(-1)\big)^5=\\
&\quad=t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{13}(-\tfrac{1}{2})\,t_{32}(2)\,t_{31}(-2)\,t_{21}(1)\,t_{32}(-2)\,t_{13}(\tfrac{1}{2})t_{12}(-1),\\
&\big(t_{12}(1)\,t_{21}(-1)\big)^5=t_{23}(-\tfrac{1}{2})\,t_{13}(-\tfrac{1}{2})\,t_{21}(1)\,t_{13}(\tfrac{1}{2})t_{12}(-1),\\
&\big(t_{12}(1)\,t_{21}(-1)\big)^6=e.
\end{aligned}
$$

Значит, в полугруппе частных выполняется соотношение $\big(t_{12}(1)\,t_{21}(-1)\big)^6=e$.

Предложение доказано. □

Следствие 2. *Любые два элемента q_{ij} и q_{kl} коммутируют.*

Доказательство. Согласно утверждению 2 в случае $i=k$ эти два элемента совпадают, т. е. коммутируют.

Если же $i\neq k$, то $q_{ij}=q_{ik}$ и $q_{kl}=q_{ki}$. Необходимо показать, что $q_{ik}\,q_{ki}=q_{ki}\,q_{ik}$.

Согласно предложению 1 выполнено равенство $\big(t_{12}(-1)t_{21}(1)\big)^6=e$, т. е. элемент $\big(t_{12}(-1)t_{21}(1)\big)^3$ является элементом порядка 2. Рассмотрим, чему именно равняется выражение $\big(t_{12}(-1)t_{21}(1)\big)^3$:

$$\underbrace{t_{12}(-1)\,t_{21}(1)\,t_{12}(-1)\,\sigma_{12}}\ \underbrace{\sigma_{12}\,t_{21}(1)\,t_{12}(-1)\,t_{21}(1)} =$$
$$= \overbrace{(p_{12})^{-1}}\ \overbrace{q_{21}} =$$
$$= q_{12}\,q_{21}.$$

Таким образом, выполнено равенство $(q_{12}\,q_{21})^2 = e$. В силу того что каждый множитель имеет порядок 2, выполнено равенство

$$e = q_{12}\,q_{21}\,q_{12}\,q_{21} = q_{12}\,q_{21}(q_{12})^{-1}(q_{21})^{-1} = q_{12}\,q_{21}(q_{21}\,q_{12})^{-1}.$$

Оно равносильно $q_{12}\,q_{21} = q_{21}\,q_{12}$. Аналогично показывается, что $q_{ik}\,q_{ki} = q_{ki}\,q_{ik}$.

В итоге получаем следующую цепочку равенств:

$$q_{ij}\,q_{kl} = q_{ik}\,q_{ki} = q_{ki}\,q_{ik} = q_{kl}\,q_{ij}.$$

Следствие доказано. □

Обозначим через q_i элемент $q_{i1} = q_{i2} = \ldots = q_{in}$. Теперь мы готовы доказать следующее утверждение.

Лемма 8. *Представленные выше образующие соотношения для полугруппы* $\mathrm{G}_n(R)$ *являются образующими соотношениями для группы* $\mathrm{GL}_n(R)$.

Доказательство. В соотношениях для полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$ используются только неотрицательные элементы. Для доказательства данной леммы необходимо показать, что если в группе выполнены все соотношения для неотрицательных элементов, то в данной группе можно найти элементы, которые естественным образом являются элементами для отрицательных значений коэффициентов x, y, α_i.

Как уже говорилось ранее, кандидатами на элементы $t_{ij}(-a)$ для $a \in R_+$ являются элементы $\big(t_{ij}(a)\big)^{-1}$. Кандидатом для элемента $[\alpha_i = -1]$ является элемент q_i.

Теперь покажем, что каждое из образующих соотношений для $\mathrm{G}_n(R)$ также выполнено и для кандидатов элементов с неположительными параметрами.

Начнём с соотношений, не содержащих диагональных элементов.

- $e = t_{ij}(0) = \sigma_e = [1, \ldots, 1]$, соотношение (1).

  Очевидно, так как тут параметры не используются.
- $\sigma\, t_{ij}(a)\, \sigma^{-1} = t_{\sigma(i)\,\sigma(j)}(a)$, соотношение (4).

  Для данного условия получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
&\sigma\, t_{ij}(a)\, \sigma^{-1} = t_{\sigma(i)\,\sigma(j)}(a),\\
&\sigma\, t_{ij}(a) = t_{\sigma(i)\,\sigma(j)}(a)\, \sigma,\\
&\sigma = t_{\sigma(i)\,\sigma(j)}(a)\, \sigma t_{ij}(-a),\\
&t_{\sigma(i)\,\sigma(j)}(-a)\, \sigma = \sigma\, t_{ij}(-a),\\
&t_{\sigma(i)\,\sigma(j)}(-a) = \sigma\, t_{ij}(-a)\, \sigma^{-1}.
\end{aligned}$$

- $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$, где σ_3 — перестановка $\sigma_1\sigma_2$ в S_n, соотношение (6).

  Доказывается аналогично доказательству пункта (1).

- $t_{ij}(x)t_{ij}(y) = t_{ij}(x+y)$, соотношение (7).

  Для данного выражения возможно четыре случае, когда x, y больше или меньше 0. В каждом из этих четырёх вариантов достаточно путём домножения слева или справа на обратные элементы получить выражение для положительных элементов.

  Действительно, в случае $x > 0$, $y < 0$ получаем

$$\begin{aligned} t_{ij}(x)t_{ij}(y) &= t_{ij}(x+y), \\ t_{ij}(x) &= t_{ij}(x+y)t_{ij}(-y). \end{aligned}$$

  Если $x + y > 0$, то последнее выражение выполнено, так как оно верно для положительных $x + y$ и $-y$. Аналогичным образом доказываются все остальные случаи.

- $t_{ij}(a)\,t_{kl}(b) = t_{kl}(b)\,t_{ij}(a)$, где $i \neq l$ и $j \neq k$, соотношение (9).

  Рассмотрим случай, когда $a > 0$ и $b < 0$. Тогда получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} t_{ij}(a)\,t_{kl}(b) &= t_{kl}(b)\,t_{ij}(a), \\ t_{ij}(a) &= t_{kl}(b)\,t_{ij}(a)\,t_{kl}(-b), \\ t_{kl}(-b)\,t_{ij}(a) &= t_{ij}(a)\,t_{kl}(-b). \end{aligned}$$

  Последнее равенство выполнено в силу положительности a и $-b$.

  Аналогично выводятся равенства и для остальных случаев.

- $t_{ij}(a)\,t_{jk}(b) = t_{ik}(ab)\,t_{jk}(b)\,t_{ij}(a)$, где $i \neq k$, соотношение (10).

  Заметим, что согласно пункту (9) множитель $t_{ik}(ab)$ в правой части равенства может стоять на любой позиции.

Теперь рассмотрим соотношения с диагональными матрицами. Как мы говорили, кандидатами на диагональную матрицу с одной -1 на диагонали являются элементы q_i. Покажем, что для элементов q_i выполнены все необходимые соотношения.

- $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n][\beta_1, \ldots, \beta_n] = [\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n]$, соотношение (5).

  Для начала покажем, что выполнено равенство $[\alpha_i = a]\,q_i = q_i\,[\alpha_i = a]$.

  Действительно, распишем представление элемента q_i и получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} &[\alpha_i = a]\,q_i\,[\alpha_i = a^{-1}] = \\ &\quad = [\alpha_i = a]\,\underbrace{\sigma_{ik}\,t_{ik}(1)\,t_{ki}(-1)\,t_{ik}(1)\,[\alpha_i = a^{-1}]} = \\ &\quad = \underbrace{[\alpha_i = a]\,[\alpha_k = a^{-1}]}\,\overbrace{\sigma_{ik}\,t_{ik}(a)\,t_{ki}(-a^{-1})\,t_{ik}(a)} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [\alpha_k = a^{-1}]\,[\alpha_i = a]\,\sigma_{ik}\,t_{ik}(a)\,t_{ki}(-a^{-1})\,t_{ik}(a) = \\
&= [\alpha_k = a^{-1}]\,\sigma_{ik}\,t_{ik}(1)\,t_{ki}(-1)\,t_{ik}(1)\,[\alpha_k = a] = \\
&= [\alpha_k = a^{-1}]\,\sigma_{ij}\,t_{ij}(1)\,t_{ji}(-1)\,t_{ij}(1)\,[\alpha_k = a] = \\
&= [\alpha_k = a^{-1}]\,[\alpha_k = a]\;\sigma_{ij}\,t_{ij}(1)\,t_{ji}(-1)\,t_{ij}(1) = \\
&= q_i.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в качестве всех диагональных матриц будут выступать элементы вида $\alpha\prod(q_i)^{a_i}$, где α — диагональная матрица из $\mathrm{G}_n(R)$ и $a_i \in$ $\in \{0,1\}$. Будем обозначать такие элементы через $[(-1)^{a_1}\alpha_1, \ldots, (-1)^{a_n}\alpha_n]$

Так как элементы q_i коммутируют между собой и с элементом α, получаем следующее:

$$
\begin{aligned}
&[(-1)^{a_1}\alpha_1, \ldots, (-1)^{a_n}\alpha_n][(-1)^{b_1}\beta_1, \ldots, (-1)^{b_n}\beta_n] = \\
&\quad = \alpha\prod(q_i)^{a_i}\cdot\beta\prod(q_i)^{b_i} = \\
&\quad = \alpha\beta\prod(q_i)^{a_i+b_i} = \\
&\quad = [(-1)^{a_1+b_1}\alpha_1\beta_1, \ldots, (-1)^{a_n+b_n}\alpha_n\beta_n] = \\
&\quad = [(-1)^{a_1}\alpha_1(-1)^{b_1}\beta_1, \ldots, (-1)^{a_n}\alpha_n(-1)^{b_n}\beta_n].
\end{aligned}
$$

Это и доказывает данный пункт.

- $\alpha\, t_{ij}(x) = t_{ij}(\alpha_i x \alpha_j^{-1})\,\alpha$, соотношение (2).

Данное выражение можно преобразовать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\alpha\, t_{ij}(x) = t_{ij}(\alpha_i x \alpha_j^{-1})\,\alpha, \\
&\alpha = t_{ij}(\alpha_i x \alpha_j^{-1})\alpha\, t_{ij}(-x), \\
&t_{ij}(-\alpha_i x \alpha_j^{-1})\,\alpha = \alpha\, t_{ij}(-x), \\
&t_{ij}(\alpha_i(-x)\alpha_j^{-1})\,\alpha = \alpha\, t_{ij}(-x).
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что достаточно рассмотреть случай с положительным x.

Согласно доказательству пункта (5) все диагональные матрицы группы частных представляются в виде произведения коммутирующих между собой элементов $\alpha\prod(q_i)^{a_i}$.

Покажем, как именно коммутируют элементы $t_{ij}(a)$ и q_k. В случае когда $k \neq i, j$, получаем

$$
\begin{aligned}
&t_{ij}(a)\,q_k = t_{ij}(a)\,q_{ki} = \\
&\quad = t_{ij}(a)\,\sigma_{ki}\;t_{ki}(1)\,t_{ik}(-1)\,t_{ki}(1) = \\
&\quad = \sigma_{ki}\;t_{kj}(a)\,t_{ki}(1)\;t_{ik}(-1)\,t_{ki}(1) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_{ki}\, t_{ki}(1)\, t_{kj}(a)\, t_{ik}(-1)\, t_{ki}(1) = \\
&= \sigma_{ki}\, t_{ki}(1)\, t_{ik}(-1)\, t_{kj}(a)\, t_{ij}(a)\, t_{ki}(1) = \\
&= \sigma_{ki}\, t_{ki}(1)\, t_{ik}(-1)\, t_{kj}(a)\, t_{kj}(-a)\, t_{ki}(1)\, t_{ij}(a) = \\
&= \sigma_{ki}\, t_{ki}(1)\, t_{ik}(-1)\, t_{ki}(1)\, t_{ij}(a) = \\
&= q_k\, t_{ij}(a).
\end{aligned}
$$

В случае $k = i$ получаем

$$
\begin{aligned}
t_{ij}(a)\, q_i &= t_{ij}(a)\, q_{ik} = \\
&= t_{ij}(a)\, \sigma_{ik}\, t_{ik}(1)\, t_{ki}(-1)\, t_{ik}(1) = \\
&= \sigma_{ik}\, t_{kj}(a)\, t_{ik}(1)\, t_{ki}(-1)\, t_{ik}(1) = \\
&= \sigma_{ik}\, t_{ik}(1)\, t_{kj}(a)\, t_{ij}(-a)\, t_{ki}(-1)\, t_{ik}(1) = \\
&= \sigma_{ik}\, t_{ik}(1)\, t_{kj}(a)\, t_{kj}(-a)\, t_{ki}(-1)\, t_{ij}(-a)\, t_{ik}(1) = \\
&= \sigma_{ik}\, t_{ik}(1)\, t_{ki}(-1)\, t_{ik}(1)\, t_{ij}(-a) = \\
&= q_i\, t_{ij}(-a).
\end{aligned}
$$

Остался последний случай, а именно $k = j$. Тут всё делаем аналогично предыдущему пункту:

$$
\begin{aligned}
t_{ij}(a)\, q_j &= t_{ij}(a)\, q_{jk} = \\
&= t_{ij}(a)\, \sigma_{jk}\, t_{jk}(1)\, t_{kj}(-1)\, t_{jk}(1) = \\
&= \sigma_{jk}\, t_{ik}(a)\, t_{jk}(1)\, t_{kj}(-1)\, t_{jk}(1) = \\
&= \sigma_{jk}\, t_{jk}(1)\, t_{ik}(a)\, t_{kj}(-1)\, t_{jk}(1) = \\
&= \sigma_{jk}\, t_{jk}(1)\, t_{kj}(-1)\, t_{ik}(a)\, t_{ij}(-a)\, t_{jk}(1) = \\
&= \sigma_{jk}\, t_{jk}(1)\, t_{kj}(-1)\, t_{ik}(a)\, t_{ik}(-a)\, t_{jk}(1)\, t_{ij}(-a) = \\
&= \sigma_{jk}\, t_{jk}(1)\, t_{kj}(-1)\, t_{jk}(1)\, t_{ij}(-a) = \\
&= q_j\, t_{ij}(-a).
\end{aligned}
$$

Таким образом, поведение элемента q_i полностью аналогично поведению элемента $[\alpha_i = -1]$.

- $\sigma[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]\sigma^{-1} = [\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}]$, соотношение (3).

Для доказательства этого пункта снова обратимся к виду диагональных матриц в группе частных: $\alpha \prod (q_i)^{a_i}$.

Обозначим $[\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}]$ через α_σ.

Элемент α имеет только положительные элементы, т. е. выполнено соотношение $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \alpha_\sigma$.

Посмотрим, куда именно переходит элемент q_i при коммутировании элементом σ:

$$\sigma\, q_i = \sigma\, \sigma_{ik}\, t_{ik}(1)\, t_{ki}(-1)\, t_{ik}(1) = \\ = \sigma_{\sigma(i)\sigma(k)}\, t_{\sigma(i)\sigma(k)}(1)\, t_{\sigma(k)\sigma(i)}(-1)\, t_{\sigma(i)\sigma(k)}(1)\sigma = q_{\sigma(i)}\sigma.$$

Таким образом, выполнено

$$[(-1)^{a_1}\alpha_1, \ldots, (-1)^{a_n}\alpha_n] = \sigma\alpha \prod (q_i)^{a_i} \sigma^{-1} = \alpha_\sigma \prod (q_{\sigma(i)})^{a_{\sigma(i)}} = \\ = [(-1)^{a_{\sigma(1)}}\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, (-1)^{a_{\sigma(n)}}\alpha_{\sigma(n)}].$$

- $t_{ij}(x)t_{ji}(y) = \alpha\, t_{ji}(u)t_{ij}(v)$, где $1+xy$ — обратимый элемент, $u = (1+yx)y$, $v = (1+xy)^{-1}x$, α — диагональная матрица с $\alpha_i = 1+xy$, $\alpha_j = (1+yx)^{-1}$, соотношение (8).

  Для начала заметим, что искомое соотношение можно переписать в виде

  $$t_{ij}(x)t_{ji}(y)[\alpha_j\colon 1+yx] = [\alpha_i\colon 1+xy]t_{ji}(y)t_{ij}(x).$$

  Рассмотрим случаи, когда среди элементов x и y есть обратимые и когда их нет.

  В случае когда y обратим, преобразуем правую и левую часть исходного выражения следующим образом:

  $$\begin{aligned} & t_{ij}(x)\, t_{ji}(y)\, [\alpha_j\colon 1+yx] = [\alpha_i\colon 1+xy]t_{ji}(y)t_{ij}(x), \\ & t_{ij}(y^{-1})\, t_{ji}(y) = t_{ij}\bigl(-(x+y^{-1})\bigr)[\alpha_i\colon 1+xy]\, t_{ji}(y)t_{ij}(x)\, [\alpha_j\colon (1+yx)^{-1}], \\ & t_{ij}(-y^{-1})t_{ji}(y)\, t_{ij}(-y^{-1}) = \\ & \quad = [\alpha_i\colon 1+xy]\, t_{ij}(-y^{-1})t_{ji}(y)\, t_{ij}(x)[\alpha_j\colon (1+yx)^{-1}]\, t_{ij}(-y^{-1}), \\ & \sigma_{ij}[\alpha_i\colon y,\ \alpha_j\colon -y^{-1}] = \\ & \quad = [\alpha_i\colon 1+xy]t_{ij}(-y^{-1})t_{ji}(y)\, t_{ij}(-y^{-1})[\alpha_j\colon (1+yx)^{-1}], \\ & \sigma_{ij}[\alpha_i\colon y,\ \alpha_j\colon -y^{-1}] = [\alpha_i\colon 1+xy]\, \sigma_{ij}[\alpha_i\colon y,\ \alpha_j\colon -y^{-1}][\alpha_j\colon (1+yx)^{-1}], \\ & [\alpha_i\colon y,\ \alpha_j\colon -y^{-1}] = [\alpha_i\colon y,\ \alpha_j\colon -(1+xy)y^{-1}(1+yx)^{-1}], \\ & [\alpha_i\colon y,\ \alpha_j\colon -y^{-1}] = [\alpha_i\colon y,\ \alpha_j\colon y^{-1}]. \end{aligned}$$

  Аналогично разбирается случай, когда x является обратимым элементом.

Теперь рассмотрим случай, когда x и y необратимы. Так как кольцо является локальным, то элементы $1-y$ и $1+x$ обратимы.

Перепишем левую часть равенства:

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{t_{ij}(x)}\,\underbrace{t_{ji}(y)}[\alpha_j\colon 1+yx] = \\
&\quad = \overbrace{t_{ij}(1+x)t_{ij}(1)}\,\overbrace{t_{ji}(-1)t_{ji}(1+y)}[\alpha_j\colon 1+yx] = \\
&\quad = t_{ij}(1+x)\,\underbrace{t_{ij}(-1)t_{ji}(1)}\,t_{ji}(-1+y)[\alpha_j\colon 1+yx].
\end{aligned}
$$

Перенесём один множитель слева и два множителя справа в правую часть равенства и получим

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{t_{ij}(-1-x)[\alpha_i\colon 1+xy]}\,t_{ji}(y)t_{ij}(x)[\alpha_j\colon (1+yx)^{-1}]t_{ji}(1-y) = \\
&= \overbrace{[\alpha_i\colon 1+xy]\underbrace{t_{ij}\big(-(1+xy)^{-1}(1+x)\big)}t_{ji}(y)}t_{ij}(x)[\alpha_j\colon (1+yx)^{-1}]t_{ji}(1-y).
\end{aligned}
$$

Так как элемент $(1+xy)^{-1}(1+x)$ обратим, как уже было показано ранее, можно произвести следующую перестановку:

$$
\begin{aligned}
&t_{ij}\big(-(1+xy)^{-1}(1+x)\big)t_{ji}(y) = \\
&\quad = [\alpha_i\colon 1-(1+xy)^{-1}(1+x)y]t_{ji}(y)\,t_{ij}\,\big(-(1+xy)^{-1}(1+x)\big)\times \\
&\quad \times [\alpha_j\colon 1-y(1+xy)^{-1}(1+x)] = \\
&\quad = [\alpha_i\colon (1+xy)^{-1}(1-y)]t_{ji}(y)\,t_{ij}\big(-(1+xy)^{-1}(1+x)\big)\times \\
&\quad \times [\alpha_j\colon (1-y)^{-1}(1+yx)].
\end{aligned}
$$

Подставляем и получаем

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{[\alpha_i\colon 1+xy][\alpha_i\colon (1+xy)^{-1}(1-y)]}\,t_{ji}(y)\times \\
&\quad \times t_{ij}\big(-(1+xy)^{-1}(1+x)\big)\,\underbrace{[\alpha_j\colon (1-y)^{-1}(1+yx)]t_{ij}(x)}\times \\
&\quad \times [\alpha_j\colon (1+yx)^{-1}]t_{ji}(1-y) = \\
&\quad = \overbrace{[\alpha_i\colon (1-y)]}\,t_{ji}(y)\times \\
&\quad \times \underbrace{t_{ij}\big(-(1+xy)^{-1}(1+x)\big)\,\overbrace{t_{ij}\big(x(1+yx)^{-1}(1-y)\big)}}\overbrace{[\alpha_j\colon (1-y)^{-1}(1+yx)]}\times \\
&\quad \times [\alpha_j\colon (1+yx)^{-1}]t_{ji}(1-y) = \\
&\quad = [\alpha_i\colon (1-y)]t_{ji}(y)\times \\
&\quad \times \overbrace{t_{ij}(-1)}\,\underbrace{[\alpha_j\colon (1-y)^{-1}(1+yx)][\alpha_j\colon (1+yx)^{-1}]}\,t_{ji}(1-y) = \\
&\quad = [\alpha_i\colon (1-y)]t_{ji}(y)t_{ij}(-1)\,\underbrace{\overbrace{[\alpha_j\colon (1-y)^{-1}]}\,t_{ji}(1-y)} = \\
&\quad = [\alpha_i\colon (1-y)]t_{ji}(y)t_{ij}(-1)\,\overbrace{t_{ji}(1)[\alpha_j\colon (1-y)^{-1}]}\,.
\end{aligned}
$$

Сравниваем с тем, что осталось в левой части, и получаем

$$
\begin{aligned}
&t_{ij}(-1)t_{ji}(1) = [\alpha_i\colon (1-y)]t_{ji}(y)t_{ij}(-1)t_{ji}(1)[\alpha_j\colon (1-y)^{-1}],\\
&t_{ji}(1)\, t_{ij}(-1)t_{ji}(1) = t_{ji}(1)[\alpha_i\colon (1-y)]\, t_{ji}(y)t_{ij}(-1)t_{ji}(1)[\alpha_j\colon (1-y)^{-1}],\\
&t_{ji}(1)\, t_{ij}(-1)t_{ji}(1) = [\alpha_i\colon (1-y)]\, t_{ji}(1-y)t_{ji}(y)\, t_{ij}(-1)t_{ji}(1)[\alpha_j\colon (1-y)^{-1}],\\
&t_{ji}(1)t_{ij}(-1)t_{ji}(1) = [\alpha_i\colon (1-y)]\, t_{ji}(1)t_{ij}(-1)t_{ji}(1)[\alpha_j\colon (1-y)^{-1}],\\
&\sigma_{ij}\, q_j = [\alpha_i\colon (1-y)]\, \sigma_{ij} q_j[\alpha_j\colon (1-y)^{-1}],\\
&q_j = [\alpha_j\colon (1-y)]\, q_j[\alpha_j\colon (1-y)^{-1}],\\
&e = e.
\end{aligned}
$$

В итоге получаем, что в группе частных полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$ выполнены все соотношения группы $\mathrm{GL}_n(R)$. □

4. Основной результат

Теперь мы можем доказать основную теорему этой работы.

Теорема 2. *Для линейно упорядоченного (необязательно коммутативного) локального кольца R с $\frac{1}{2}$ при $n \geqslant 3$ группа частных полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$ совпадает с группой $\mathrm{GL}_n(R)$.*

Доказательство. Обозначим через H группу частных полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$. Поскольку $\mathrm{GL}_n(R)$ является минимальным расширением $\mathrm{G}_n(R)$, группа H содержит в себе такую нормальную подгруппу K, что фактор H/K изоморфен $\mathrm{GL}_n(R)$.

Так как определяющее соотношение $\bigl(t_{12}(-1)\, t_{21}(1)\bigr)^6 = e$ группы $\mathrm{GL}_n(R)$ является следствием образующих соотношений полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$ (по предложению 1), а остальные соотношения группы $\mathrm{GL}_n(R)$ выводятся из образующих соотношений полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$, то группа $\mathrm{GL}_n(R)$ является расширением группы H.

Значит, $H = \mathrm{GL}_n(R)$. □

Литература

[1] Бунина Е. И. Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами // Матем. заметки. — 2011. — Т. 91, № 1. — С. 3—12.

[2] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. матем. — 2005. — Т. 11, № 2. — С. 3—23.

[3] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, № 2. — С. 39—53.

[4] Бунина Е. И., Михалёв А. В., Немиро В. В. Группы частных полугрупп обратимых неотрицательных матриц над телами // Докл. РАН. — 2017. — Т. 472, № 2. — С. 1—4.

[5] Бунина Е. И., Немиро В. В. Группа частных полугруппы обратимых неотрицательных матриц порядка три над полями // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 3. — С. 27—42.

[6] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, № 2. — С. 69—100.

[7] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, № 4. — С. 75—85.

[8] Мальцев А. И. О включении ассоциативных систем в группы. II // Матем. сб. — 1940. — Т. 8, № 2. — С. 251—264.

[9] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Матем. сб. — 1970. — Т. 81, № 4. — С. 600—609.

[10] Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными целыми элементами // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 9. — С. 117—132.

[11] Семёнов П. П. Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, № 5. — С. 165—178.

[12] Фаянс В. Г. Группа частных полугруппы неособенных матриц с неотрицательными элементами // УМН. — 1973. — Т. 28, № 6. — С. 221—222.