Квазипростые конечные группы существенной размерности 3*

Ю. Г. ПРОХОРОВ
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: prokhoro@mi.ras.ru

УДК 512.76

Ключевые слова: существенная размерность, группа, алгебраическое многообразие, представление, группа Кремоны.

Аннотация

Мы классифицируем квазипростые конечные группы существенной размерности 3.

Abstract

Yu. G. Prokhorov, Quasi-simple finite groups of essential dimension 3, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 189—199.

We classify quasi-simple finite groups of essential dimension 3.

Памяти профессора Альфреда Львовича Шмелькина

1. Введение

Настоящая статья основана на докладе, прочитанном на конференции в Магадане.

Пусть G — конечная группа и V — точное представление G, рассматриваемое как алгебраическое многообразие. *Сжатием* называется G-эквивариантное доминантное рациональное отображение $V \dashrightarrow X$ G-многообразий с эффективным действием G. *Существенной размерностью* $\mathrm{ed}(G)$ группы G называется минимальная размерность всех G-многообразий X с эффективным действием G, появляющихся в сжатиях $V \dashrightarrow X$. Это понятие было введено Дж. Бахлером и З. Райхштейном [6] в связи с некоторыми классическими проблемами теории многочленов. Оказывается, что существенная размерность зависит только

*Работа автора частично поддержана грантами РФФИ 15-01-02164 и 15-01-02158 и научным проектом государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

от группы G, т. е. не зависит от выбора линейного представления V [6, теорема 3.1]. Вычисление существенной размерности является сложной задачей алгебры и алгебраической геометрии. Конечные группы существенной размерности не больше 2 классифицированы (см. [10]). Простые конечные группы существенной размерности 3 были недавно найдены А. Бовилем [4] (см. также [9, 18].

1.1. Теорема. *Простые группы существенный размерности* 3 *— это* $\mathfrak{A}_6$ *и, возможно,* $\mathrm{PSL}_2(11)$.

Существенная размерность p-групп была вычислена Н. Карпенко и А. Меркурьевым [12].

В этой короткой заметке мы найдём все конечные квазипростые группы существенной размерности 3.

1.2. Определение. Группа G называется *квазипростой*, если G совершенна, т. е. совпадает со своим коммутантом, а фактор G по её центру является простой группой.

Основным результатом работы является следующая теорема.

1.3. Теорема. *Пусть* G *— конечная квазипростая непростая группа. Если* $\mathrm{ed}(G) = 2$*, то* $G \simeq 2.\mathfrak{A}_5$*. Если* $\mathrm{ed}(G) = 3$*, то* $G \simeq 3.\mathfrak{A}_6$.

1.4. Обозначения. Всюду в этой работе основное поле предполагается полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Мы используем следующие стандартные обозначения теории групп:

— $\boldsymbol{\mu}_n$ обозначает мультипликативную группу порядка n (в $\mathbb{C}^*$),
— $\mathfrak{A}_n$ обозначает знакопеременную группу степени n,
— $\mathrm{SL}_n(q)$ ($\mathrm{PSL}_n(q)$) обозначает специальную линейную группу (соответственно проективную специальную линейную группу) над конечным полем $\mathbf{F}_q$,
— $n.G$ обозначает нерасщепимое центральное расширение G при помощи $\boldsymbol{\mu}_n$,
— $\mathrm{z}(G)$ ($[G, G]$) обозначает центр (соответственно коммутант) группы G.

Все простые группы предполагаются нециклическими.

2. Доказательство теоремы 1.3

Следующее утверждение является непосредственным следствием соответствующего факта для простых групп [14].

2.1. Предложение. *Пусть* X *— трёхмерное рационально связное многообразие и* $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ *— конечная квазипростая непростая группа. Тогда* G *изоморфна одной из следующих групп*:

$$\mathrm{SL}_2(7),\ \mathrm{SL}_2(11), \mathrm{Sp}_4(3),\ 2.\mathfrak{A}_5,\ n.\mathfrak{A}_6,\ n.\mathfrak{A}_7, \quad \text{где}\ \ n = 2, 3, 6. \tag{2.1.1}$$

Доказательство. Мы можем считать, что группа G бирегулярно (и эффективно) действует на X. Пусть $Y := X/\operatorname{z}(G)$ и $G_1 := G/\operatorname{z}(G)$. Тогда Y — трёхмерное рационально связное многообразие, на котором действует конечная простая группа G_1. Тогда согласно [14] группа G_1 принадлежит следующему списку:

$$\mathrm{PSL}_2(7),\ \mathrm{PSL}_2(8),\ \mathrm{PSL}_2(11),\ \mathrm{PSp}_4(3),\ \mathfrak{A}_5,\ \mathfrak{A}_6,\ \mathfrak{A}_7. \tag{2.1.2}$$

Так как группа G_1 совершенна, то существует *универсальная накрывающая* $\tilde{G}_1$, т. е. центральное расширение G_1, такое что для любого другого центрального расширения $\hat{G}_1$ существует единственный гомоморфизм $\tilde{G}_1 \to \hat{G}_1$ центральных расширений (см., например, [11, § 11.7, теорема 7.4]). Ядро гомоморфизма $\tilde{G}_1 \to G_1$ является мультипликатором Шура $\mathrm{M}(G_1) = H^2(G_1, \mathbb{C}^*)$ группы G_1. Таким образом, G однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется $G/\operatorname{z}(G)$ и гомоморфизмом $\mathrm{M}(G_1) \to \operatorname{z}(G)$. Известно, что $\mathrm{M}(G_1) \simeq \boldsymbol{\mu}_2$ во всех случаях (2.1.2), за исключением $\mathfrak{A}_6$ и $\mathfrak{A}_7$, где мультипликатор Шура изоморфен $\boldsymbol{\mu}_6$, и $\mathrm{PSL}_2(8)$, где мультипликатор Шура тривиален (см. [7; 11, § 12.3, теорема 3.2, § 16.3, теорема 3.2]). Это даёт нам список (2.1.1). □

2.1.3. Замечание. Мы не утверждаем, что все возможности (2.1.1) реализуются. Используя технику, разработанную в [1, 14—17], можно получить полную классификацию действий квазипростых групп на рационально связанных многообразиях. Однако это гораздо более сложная задача.

2.1.4. Следствие. *Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям предложения* 2.1. *Тогда G имеет неприводимое точное представление. Минимальная размерность такого представления V задаётся следующей таблицей* [7]:

G	$2.\mathfrak{A}_5$	$3.\mathfrak{A}_6$	$\mathrm{SL}_2(7)$, $\mathrm{Sp}_4(3)$, $2.\mathfrak{A}_6$, $2.\mathfrak{A}_7$	$\mathrm{SL}_2(11)$, $6.\mathfrak{A}_6$, $3.\mathfrak{A}_7$, $6.\mathfrak{A}_7$
$\dim V$	2	3	4	6

.

2.2. Конструкция. Пусть G — конечная квазипростая непростая группа, имеющая точное неприводимое представление V. Пусть $\psi \colon V \dashrightarrow X$ — сжатие с $\dim X = \operatorname{ed}(G)$. Применяя эквивариантное разрешение особенностей (см. [3]), мы можем считать, что многообразие X является гладким (и проективным). Далее рассмотрим компактификацию $\mathbb{P} := \mathbb{P}(V \oplus \mathbb{C})$, и пусть $X \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{f} \mathbb{P} \supset V$ — эквивариантное разрешение отображения ψ, где f — бирациональный морфизм, а многообразие Y гладкое и проективное. Мы также можем предположить, что f пропускается через раздутие $\tilde{f} \colon \tilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}$ точки $0 \in V \subset \mathbb{P}$. Пусть $\tilde{E} \subset \tilde{V}$ — $\tilde{f}$-исключительный дивизор, $E \subset Y$ — его собственный прообраз и $B := \varphi(E)$. Таким образом, мы имеем следующую G-эквивариантную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl] \arrow[rrrrr, bend left] & \subset & Y \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[r] & \tilde{\mathbb{P}} \arrow[d, "\tilde{f}"] & \supset & \tilde{E} \arrow[drr] & & \\
B & \subset & X & & \mathbb{P} \arrow[ll, dashed, "\psi"'] & \supset & V & \ni & 0
\end{tikzcd}.$$

Действие $\mathrm{z}(G)$ на $\tilde{E} \simeq \mathbb{P}(V)$ и на E тривиально, поскольку V — неприводимое представление. Следовательно, группа $G/\mathrm{z}(G)$ эффективно действует на E. По условию действие $\mathrm{z}(G)$ на X является эффективным. Следовательно, $B \neq X$, и поэтому B — рационально связное многообразие размерности меньше $\mathrm{ed}(G)$.

2.3. Предложение. *Пусть G — конечная квазипростая непростая группа, имеющая точное неприводимое представление. Тогда $G/\mathrm{z}(G)$ эффективно действует на рационально связном многообразии размерности меньше* $\mathrm{ed}(G)$.

Доказательство. Пусть V — точное неприводимое представление группы G, $\psi\colon V \dashrightarrow X$ — сжатие с $\dim X = \mathrm{ed}(G)$. Применим конструкцию 2.2. Сначала предположим, что G имеет неподвижную точку $P \in X$. Тогда G имеет точное представление на касательном пространстве $T_{P,X}$. Пусть $T_{P,X} = \bigoplus T_i$ — разложение на неприводимые компоненты. По крайней мере одна из них, скажем T_1, нетривиальна. Тогда группа $G/\mathrm{z}(G)$ эффективно действует на $\mathbb{P}(T_1)$, где $\mathbb{P}(T_1) < \dim X = \mathrm{ed}(G)$. Таким образом, можно считать, что G не имеет неподвижных точек на X. По построению 2.2 многообразие B рационально связно и $\dim B < \mathrm{ed}(G)$. Так как G не имеет неподвижных точек на B и группа $G/\mathrm{z}(G)$ проста, её действие на B должно быть эффективным. □

Сравнивая список (2.1.1) с теоремой 3.1, получаем следующее утверждение.

2.4. Следствие. *Пусть G — конечная квазипростая непростая группа с* $\mathrm{ed}(G) \leqslant 3$. *Тогда для G мы имеем одну из следующих возможностей*:

$$\mathrm{SL}_2(7),\ n.\mathfrak{A}_6, \quad \text{где} \quad n = 2, 3, 6. \tag{2.4.1}$$

Рассмотрим последовательно возможности (2.4.1).

2.5. Лемма. $\mathrm{ed}(2.\mathfrak{A}_5) = 2$ *и* $\mathrm{ed}(3.\mathfrak{A}_6) = 3$.

Доказательство. Докажем, например, второе равенство. Так как $3.\mathfrak{A}_6$ имеет точное трёхмерное представление, $\mathrm{ed}(3.\mathfrak{A}_6) \leqslant 3$. С другой стороны, $\mathfrak{A}_6$ не может эффективно действовать на рациональной кривой. Следовательно, по предложению 2.3 имеем $\mathrm{ed}(3.\mathfrak{A}_6) \geqslant 3$. □

2.5.1. Лемма. *Пусть G — квазипростая непростая группа. Предположим, что $G \not\simeq 2.\mathfrak{A}_5$, $3.\mathfrak{A}_6$. Предположим также, что G содержит подгруппу $\bar{H}$, такую что*

(i) *$\bar{H}$ неабелева, но её образ $H \subset G/\mathrm{z}(G)$ абелев,*

(ii) *для любого действия $G/\mathrm{z}(G)$ на рациональной проективной поверхности подгруппа $H \subset G/\mathrm{z}(G)$ имеет неподвижную точку.*

Тогда $\mathrm{ed}(G) \geqslant 4$.

Доказательство. Поскольку $\bar{H}/(\mathrm{z}(G) \cap \bar{H}) = H$, то $\mathrm{z}(G) \cap \bar{H} \supset [\bar{H}, \bar{H}]$ и $[\bar{H}, \bar{H}] \neq \{1\}$ (поскольку $\bar{H}$ неабелева). Предположим, что $\mathrm{ed}(G) = 3$. Применим конструкцию 2.2. Из списка (2.1.1) видно, что группа $G/\mathrm{z}(G)$ не может эффективно действовать на рациональной кривой, и по следствию 2.1.4 группа G не имеет неподвижных точек на X. Следовательно, B является (рациональной) поверхностью. По лемме ii группа $\bar{H}$ имеет неподвижную точку, скажем P, на $B \subset X$. Существует инвариантное разложение $T_{P,X} = T_{P,B} \oplus T_1$, где $\dim T_1 = 1$. Действие $[\bar{H}, \bar{H}]$ на $T_{P,B}$ и T_1 тривиально. Следовательно, оно тривиально на $T_{P,X}$ и X. Противоречие. □

2.6. Предложение. $\mathrm{ed}\big(\mathrm{SL}_2(7)\big) = 4$.

2.6.1. Лемма. *Пусть S — гладкая проективная рациональная поверхность, допускающая действие $\mathrm{PSL}_2(7)$. Пусть $H \subset \mathrm{PSL}_2(7)$ — подгруппа, изоморфная $\boldsymbol{\mu}_2 \times \boldsymbol{\mu}_2$. Тогда H имеет неподвижную точку на S.*

Доказательство. Поскольку H абелева, согласно [13] достаточно показать существование неподвижной точки на некоторой бирациональной модели S. По теореме 3.1 можно считать, что поверхность S изоморфна либо $\mathbb{P}^2$, либо некоторой специальной поверхности дель Пеццо степени 2 (см. п. (iii) теоремы 3.1). В первом случае $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(W)$, где W — трёхмерное неприводимое представление $\mathrm{PSL}_2(7)$. Тогда абелева группа $H \simeq \boldsymbol{\mu}_2 \times \boldsymbol{\mu}_2$ имеет неподвижную точку на $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(W)$. Таким образом, мы предполагаем, что S является поверхностью дель Пеццо степени 2. Пусть $\alpha \in H$ — элемент порядка 2. Предположим сначала, что α имеет кривую C неподвижных точек. Образ $\pi(C)$ при антиканоническом двойном накрытии $\pi\colon S \to \mathbb{P}^2$ должен быть прямой (поскольку действие на $\mathbb{P}^2$ линейно). Пусть $\alpha' \in H$, $\alpha' \neq \alpha$ — ещё один элемент порядка 2. Тогда $\alpha'(C)$ также является кривой α-неподвижных точек, а $\pi\big(\alpha'(C)\big)$ также прямая. Следовательно, $\pi\big(\alpha'(C)\big) = \pi(C)$, и множество $\pi^{-1}\big(\pi(C)\big)$ содержит $\alpha'(C)$ и C. Поскольку $\pi^{-1}\big(\pi(C)\big) \sim -K_S$ и множество неподвижных точек α является гладким, то $\alpha'(C) = C = \pi^{-1}\big(\pi(C)\big) \sim -K_S$ является обильным дивизором. Отметим, что все элементы порядка 2 сопряжены в $\mathrm{PSL}_2(7)$. Следовательно, α' также имеет кривую неподвижных точек, например C' и $C' \sim -K_S$. Тогда точки пересечения $C \cap C'$ фиксируются группой $H = \langle \alpha, \alpha' \rangle$.

Таким образом, мы можем считать, что любой элемент $\alpha \in H$ порядка 2 имеет только изолированные неподвижные точки. Голоморфная формула Лефшеца для числа неподвижных точек показывает, что число этих неподвижных точек равно $4\chi(\mathscr{O}_S) = 4$. Тогда по топологической формуле Лефшеца

$$\mathrm{Tr}_{H^2(S,\mathbb{C})}\, \alpha^* = 2.$$

Так как $\dim H^2(S,\mathbb{C}) = 8$ и все собственные значения оператора α^* равны ± 1, то его определитель должен быть равен -1, и поэтому мы имеем нетривиальный характер группы $\mathrm{PSL}_2(7)$. Это противоречит тому, что группа $\mathrm{PSL}_2(7)$ проста. □

Доказательство предложения 2.6. Рассмотрим подгруппу $\bar{H} \subset \mathrm{SL}_2(7)$, порождённую матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть H — её образ в $\mathrm{PSL}_2(7)$. Легко проверить, что $A^2 = B^2 = -I$ и $[A,B] = -I$. Следовательно, $\bar{H}$ изоморфна группе кватернионов Q_8, и $H \simeq \simeq \mathrm{Q}_8 / \mathrm{z}(\mathrm{Q}_8) \simeq \boldsymbol{\mu}_2 \times \boldsymbol{\mu}_2$. По лемме 2.6.1 группа $\bar{H}$ имеет неподвижную точку на $B \subset X$. Поэтому мы можем применить лемму 2.5.1. □

2.7. Предложение. $\mathrm{ed}(2.\mathfrak{A}_6) = 4$, $\mathrm{ed}(6.\mathfrak{A}_6) \geqslant 4$.

Доказательство. Как и выше, мы собираемся применить лемму 2.5.1. Пусть S — проективная рациональная поверхность, на которой действует $G/\mathrm{z}(G) = \mathfrak{A}_6$. По теореме 3.1 можно считать, что $S \simeq \mathbb{P}^2$. Группа $2.\mathfrak{A}_6$ изоморфна $\mathrm{SL}_2(9)$ (см. [7]). Как и в доказательстве предложения 2.6, возьмём подгруппу $\mathrm{Q}_8 \simeq \bar{H} \subset \mathrm{SL}_2(9)$, порождённую матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \tag{2.7.1}$$

и применим лемму 2.5.1. В случае $G = 6.\mathfrak{A}_6$ пусть $Z \subset \mathrm{z}(G)$ — подгруппа порядка 3. Тогда $6.\mathfrak{A}_6/Z \simeq 2.\mathfrak{A}_6 \simeq \mathrm{SL}_2(9)$. Пусть $\hat{H}$ — прообраз подгруппы $\mathrm{SL}_2(9)$, порождённой A и B из (2.7.1) и $\bar{H} \subset \hat{H}$ — силовская 2-подгруппа. Тогда, как и выше, $\bar{H} \simeq \mathrm{Q}_8$ и мы можем применить лемму 2.5.1. □

2.7.2. Замечание. Поскольку $6.\mathfrak{A}_6$ имеет шестимерное точное представление, то $\mathrm{ed}(6.\mathfrak{A}_6) \leqslant 6$. Однако нам не удалось вычислить $\mathrm{ed}(6.\mathfrak{A}_6)$.

3. Приложение: простые подгруппы в группе Кремоны плоскости

Следующая теорема может быть легко получена из классификации [8]. Для удобства читателя мы предлагаем относительно короткое и самодостаточное доказательство.

3.1. Теорема [8]. *Пусть $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ — конечная простая подгруппа. Тогда вложение $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ индуцируется одним из следующих действий:*

(i) *группы $\mathfrak{A}_5$, $\mathrm{PSL}_2(7)$ или $\mathfrak{A}_6$, действующие на $\mathbb{P}^2$;*

(ii) *группа $\mathfrak{A}_5$, действующая на поверхности дель Пеццо степени 5;*

(iii) *группа $\mathrm{PSL}_2(7)$, действующая на некоторой специальной поверхности дель Пеццо степени 2, которая может быть реализована как двойное покрытие $\mathbb{P}^2$, разветвлённой в кривую Клейна;*

(iv) *группа $\mathfrak{A}_5$, действующая на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ через первый сомножитель.*

3.2. Замечание. Известно (см. [2, § B; 8, § 8]), что перечисленные выше действия не являются сопряжёнными между собой в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$.

Доказательство. Применяя стандартные аргументы (см., например, [8, § 3]), можно считать, что G эффективно действует на гладкой проективной рациональной поверхности X, которая является либо поверхностью дель Пеццо, либо эквивариантным расслоением на коники. Кроме того, в случае дель Пеццо (расслоения на коники) имеем $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X)^G = 1$ (соответственно $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X)^G = 2$).

Сначала рассмотрим случай, когда X имеет эквивариантную структуру расслоения на коники $\pi\colon X \to B \simeq \mathbb{P}^1$. Так как группа G проста, то действие эффективно либо на базе B, либо на общем слое. Следовательно, G может быть вложена в $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Это возможно, только если $G \simeq \mathfrak{A}_5$. Покажем, что π является $\mathbb{P}^1$-расслоением. Предположим, что π имеет вырожденный слой F. Тогда его компоненты $F', F'' \subset F$ должны переставляться элементом $\alpha \in G$ порядка 2. Точка пересечения $P = F' \cap F''$ неподвижна для α, а действие α на касательном пространстве $T_{P,X}$ диагонализируемо. Так как касательные направления к F' и F'' переставляются, то действие α на $T_{P,X}$ имеет вид $\operatorname{diag}(1, -1)$. Это означает, что α имеет кривую C неподвижных точек, проходящую через P. Очевидно, что C накрывает B, и поэтому действие α на B тривиально. Все элементы порядка 2 в $G \simeq \mathfrak{A}_5$ сопряжены и порождают G. Следовательно, G действует на B тривиально. Но тогда точка P должна быть неподвижна для G, и следовательно, G имеет точное двумерное представление на $T_{P,X}$. Противоречие.

Таким образом, π является $\mathbb{P}^1$-расслоением, а X является рациональной линейчатой поверхностью (поверхностью Хирцебруха) $\mathbb{F}_n$. Пусть F_1 — слой и $F_1, \dots, F_r$ — его орбита. Применяя элементарные преобразования в слоях $F_1, \dots, F_r$, мы получаем эквивариантные бирациональные отображения $\mathbb{F}_n \dashrightarrow \mathbb{F}_{n+r}$ и (только если $n \geqslant r$) $\mathbb{F}_n \dashrightarrow \mathbb{F}_{n-r}$. Такие орбиты существуют для $r = 12$, 20, 30, 60. Используя этот трюк, можно заменить $\mathbb{F}_n$ на $\mathbb{F}_{n'}$, где $n' = 0$ или $n' = 1$. Если $n' = 1$, то, стягивая отрицательное сечение, получаем действие на $\mathbb{P}^2$ с неподвижной точкой. Это невозможно для $G \simeq \mathfrak{A}_5$. Следовательно, мы можем считать, что $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Дополнительные элементарные преобразования позволяют тривиализировать действие на втором множителе. Это случай (iv). Подробности можно найти в [2, § B].

Начиная с этого места мы предполагаем, что X — поверхность дель Пеццо[1] с $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X)^G = 1$. Рассмотрим возможности согласно значению степени $d = K_X^2$.

Случай $d = 1$. Этот случай не реализуется, так как $|-K_X|$ имеет одну базисную точку P, а группа G должна действовать на $T_{P,X}$ эффективно. Следовательно, $G \subset \mathrm{GL}(T_{P,X})$. Однако $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ не содержит простых конечных подгрупп. Противоречие.

Случай $d = 2$. В этом случае антиканоническое отображение $X \to \mathbb{P}^2$ является двойным накрытием с дивизором ветвления $B \subset \mathbb{P}^2$ — гладкой квартикой. Действие G в X опускается на $\mathbb{P}^2$, и кривая B является G-инвариантной. Следовательно, $G \subset \operatorname{Aut}(B)$. Согласно оценке Гурвица $|G| \leqslant 168$. Более того, $\operatorname{Aut}(B)$ не содержит элементов порядка 5. Тогда единственной возможностью является $G \simeq \mathrm{PSL}_2(7)$ и $B = \{x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0\}$. Получаем случай (iii).

[1] В общем случае действия простых групп на поверхностях дель Пеццо с логтерминальными особенностями изучались в [5].

Случай $d = 3$. Тогда X — кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$. Действие G на решётке $\Lambda := K_X^{\perp} \subset \mathrm{Pic}(X)$ является точным. Следовательно, наша группа G имеет представление на векторном пространстве $\Lambda/2\Lambda = (\mathbf{F}_2)^6$ над полем $\mathbf{F}_2$. Форма пересечения индуцирует чётную квадратичную форму на Λ и, следовательно, индуцирует квадратичную форму на $\Lambda/2\Lambda$

$$q(x) := \frac{1}{2}(x, x) \mod 2.$$

Возьмём стандартный базис $\mathbf{h}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_6$ в $\mathrm{Pic}(X)$, где $(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = 1$, $(\mathbf{h}, \mathbf{e}_i) = 0$, $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = -\delta_j^i$. Тогда в базисе $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_6$, $\mathbf{h} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{h} - \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_6$ пространства Λ форму $q(x)$ можно записать в следующем виде:

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_3x_4 + x_5^2 + x_6^2 + x_5x_6.$$

Тогда легко видеть, что инвариант Арфа формы $q(x)$ равен 1. Группа сохраняет форму пересечения и квадратичную форму $q(x)$. Следовательно, существует естественное вложение $G \hookrightarrow \mathrm{O}_6(\mathbf{F}_2)^-$. Поскольку G проста, то $G \subset [\mathrm{O}_6(\mathbf{F}_2)^-, \mathrm{O}_6(\mathbf{F}_2)^-]$. Известно, что $[\mathrm{O}_6(\mathbf{F}_2)^-, \mathrm{O}_6(\mathbf{F}_2)^-] \simeq \mathrm{PSp}_4(3)$ (см., например, [7]). Кроме того, G изоморфна одной из следующих групп: $\mathrm{PSp}_4(3)$, $\mathfrak{A}_6$ или $\mathfrak{A}_5$. С другой стороны, G эффективно действует на $H^0(X, -K_X) \simeq \mathbb{C}^4$. Тогда единственная возможность $G \simeq \mathfrak{A}_5$. Уравнение $\psi(z) = 0$ поверхности $X \subset \mathbb{P}^3$ является кубическим инвариантом на $H^0(X, -K_X)$. Следовательно, представление на $H^0(X, -K_X)$ является стандартным неприводимым представлением $\mathfrak{A}_5$. Тогда в подходящем базисе мы можем записать $\psi = z_1^3 + \ldots + z_4^3 - (z_1 + \ldots + z_4)^3$. Множество неподвижных точек элемента $\alpha \in G$ второго порядка является объединением прямой и трёх изолированных точек. По топологической формуле Лефшеца для числа неподвижных точек действие α на Λ диагонализуемо следующим образом: $\alpha = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1)$. Это означает, что представление G на Λ является суммой неприводимого четырёхмерного представления и тривиального. Это противоречит предположению минимальности $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X)^G = 1$.

Случай $d = 4$. Тогда $X = X_{2\cdot 2} = Q' \cap Q'' \subset \mathbb{P}^4$ является пересечением двух квадрик. Группа G действует на пучке квадрик $\langle Q', Q'' \rangle \simeq \mathbb{P}^1$, оставляя инвариантом подмножество пяти особых элементов. Легко видеть, что в этом случае действие на $\langle Q', Q'' \rangle$ должно быть тривиальным. Следовательно, G фиксирует вершины $P_1, \ldots, P_5$ пяти G-инвариантных квадратичных конусов $Q_i \in \langle Q', Q'' \rangle$. Поскольку эти точки $P_1, \ldots, P_5$ порождают $\mathbb{P}^5$, группа G должна быть абелевой. Противоречие.

Случай $d = 5$. Поверхность дель Пеццо степени 5 единственна с точностью до изоморфизма. Рассмотрим (эффективное) действие G на пространстве $\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{C}$ и на ортогональном дополнении $K_X^{\perp} \subset \mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{C}$. Форма пересечения индуцирует невырожденную квадратичную форму на $K_X^{\perp}$. Следовательно, G эффективно действует на двумерной квадрике в $\mathbb{P}^3$. Тогда единственная возможность $G \simeq \mathfrak{A}_5$. Известно, что $\mathrm{Aut}(X)$ изоморфно симметрической группе $\mathfrak{S}_5$, и поэтому поверхность дель Пеццо степени 5 допускает действие $\mathfrak{A}_5$. Получаем случай (ii).

Случай $6 \leqslant d \leqslant 8$. Тогда действие G на $\operatorname{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}^{10-d}$ должно быть тривиальным. Это противоречит предположению минимальности $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X)^G = 1$.

Случай $d = 9$. Тогда $X = \mathbb{P}^2$. Здесь $G \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$, и по классификации конечных подгрупп в $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ получаем случай (i).

Теорема 3.1 доказана. $\square$

3.3. Теорема [8,19]. *Пусть $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ — конечная квазипростая непростая подгруппа. Тогда $G \simeq 2.\mathfrak{A}_5$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.1, мы можем считать, что G эффективно действует на гладкой проективной рациональной поверхности Пеццо X с $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X)^G = 1$ или эквивариантным расслоением на коники с $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X)^G = 2$. Пусть $\bar{G} := G/\mathrm{z}(G)$. Тогда $\bar{G}$ — простая группа, действующая на рациональной поверхности $X/\mathrm{z}(G)$. Следовательно, $\bar{G}$ вложима в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, и по теореме 3.1 мы имеем $\bar{G} \simeq \mathfrak{A}_5$, $\bar{G} \simeq \mathfrak{A}_6$ или $\bar{G} \simeq \mathrm{PSL}_2(7)$. Поэтому, как и в доказательстве предложения 2.1, мы имеем одну из следующих возможностей: $G \simeq 2.\mathfrak{A}_5$, $\mathrm{SL}_2(7)$ или $n.\mathfrak{A}_6$ для $n = 2$, $n = 3$ или $n = 6$. Если X имеет эквивариантную структуру расслоения на коники $\pi\colon X \to B \simeq \mathbb{P}^1$, то G нетривиально действует либо на базе B, либо на общем слое. Это возможно, только если $G \simeq 2.\mathfrak{A}_5$. Предположим, что X — поверхность дель Пеццо с $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X)^G = 1$. Пусть $Z \subset \mathrm{z}(G)$ — циклическая подгруппа простого порядка p и $\pi\colon X \to Y := X/Z$ — фактор. Поверхность Y рациональна, и $\bar{G} := G/Z$ эффективно действует на Y.

Сначала рассмотрим случай, когда Z имеет только изолированные неподвижные точки. Если $p = 2$, то по голоморфной формуле Лефшеца число неподвижных точек равно 4. Эти точки не могут переставляться группой G, поэтому они фиксируются G. Аналогично в случае $p = 3$ обозначим через n_0 (n_1, n_2) число неподвижных точек с действием типа $\frac{1}{3}(1,-1)$ (соответственно $\frac{1}{3}(1,1)$, $\frac{1}{3}(-1,-1)$). Тогда снова по голоморфной формуле Лефшеца $n_1 = n_2$, $n_0 + n_1 = 3$. Следовательно, существует не более трёх точек каждого типа, и поэтому, как и выше, все эти точки фиксированы G. Так как группы $\mathrm{SL}_2(7)$ и $n.\mathfrak{A}_6$ не могут корректно действовать в касательном пространстве к неподвижной точке, единственной возможностью является $G \simeq 2.\mathfrak{A}_5$.

Рассмотрим теперь случай, когда множество неподвижных точек X^Z группы Z одномерно. Пусть C — объединение всех кривых в X^Z. Заметим, что многообразие C неособо, поскольку оно является объединением компонент множества неподвижных точек. Ясно, что C также является G-инвариантным. Тогда класс C должен быть пропорционален $-K_X$ в $\operatorname{Pic}(X)$. Следовательно, C — обильный и связный дивизор. Поскольку C неособо, то оно неприводимо. Группа G/Z нетривиально действует на C. Следовательно, C не может быть эллиптической кривой. Более того, если кривая C рациональна, то $G/Z \simeq \mathfrak{A}_5$, что и требовалось. Таким образом, мы можем считать, что $C \sim -aK_X$ с $a > 1$. Если дивизор $-K_X$ очень обилен, то C содержится в гиперплоском сечении и $a = 1$. Противоречие. Таким образом, осталось рассмотреть только две возможности: $K_X^2 = 1$ и $K_X^2 = 2$. Если $K_X^2 = 1$, то антиканоническая линейная система имеет единственную базовую точку, например O. Поскольку представление G в касательном пространстве $T_{O,X}$ является точным, единственной возможностью является $G \simeq 2.\mathfrak{A}_5$. Наконец, предположим, что $K_X^2 = 2$. Тогда антиканоническое отображение является двойным накрытием $\Phi_{|-K_X|}\colon X \to \mathbb{P}^2$. Действие Z на $\mathbb{P}^2$ должно быть тривиальным (иначе $a = 1$). Следовательно, $p = 2$, Z порождается инволюцией Гейзера γ, а C — кривой ветвления $\Phi_{|-K_X|}$. С другой стороны, существует гомоморфизм

$$\lambda\colon \operatorname{Aut}(X) \hookrightarrow \operatorname{GL}\bigl(\operatorname{Pic}(X)\bigr) = \operatorname{GL}_8(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\det} \{\pm 1\},$$

где $\lambda(\gamma) = -1$. Поскольку наша группа G совершенна, $\gamma \notin G$. Противоречие. $\square$

3.4. Замечание. Точно так же можно описать действия $G = 2.\mathfrak{A}_5$ на рациональных поверхностях, т. е. вложения $2.\mathfrak{A}_5 \hookrightarrow \operatorname{Cr}_2(\mathbb{C})$ (см. [19]).

Автор благодарит рецензента за тщательное прочтение рукописи и многочисленные полезные замечания и предложения.

Литература

[1] Прохоров Ю. Г. О трехмерных G-многообразиях Фано // Изв. РАН. Сер. матем. — 2015. — Т. 79, № 4. — С. 159—174.

[2] Чельцов И. А. Два локальных неравенства // Изв. РАН. Сер. матем. — 2014. — Т. 78. — С. 167—224.

[3] Abramovich D., Wang J. Equivariant resolution of singularities in characteristic 0 // Math. Res. Lett. — 1997. — Vol. 4, no. 2-3. — P. 427—433.

[4] Beauville A. Finite simple groups of small essential dimension // Trends in Contemporary Mathematics. Selected Talks Based on the Presentations at the INdAM Day, June 18, 2014. — Cham: Springer, 2014. — P. 221—228.

[5] Belousov G. Log del Pezzo surfaces with simple automorphism groups // Proc. Edinburgh Math. Soc., II. Ser. — 2015. — Vol. 58, no. 1. — P. 33—52.

[6] Buhler J., Reichstein Z. On the essential dimension of a finite group // Compos. Math. — 1997. — Vol. 106, no. 2. — P. 159—179.

[7] Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of Finite Groups. Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups. — Oxford: Clarendon Press, 1985.

[8] Dolgachev I. V., Iskovskikh V. A. Finite subgroups of the plane Cremona group // Algebra, Arithmetic, and Geometry: in Honor of Yu. I. Manin. Vol. I. — Boston: Birkhäuser, 2009. — (Progr. Math.; Vol. 269). — P. 443—548.

[9] Duncan A. Essential dimensions of A_7 and S_7 // Math. Res. Lett. — 2010. — Vol. 17, no. 2. — P. 263—266.

[10] Duncan A. Finite groups of essential dimension 2 // Comment. Math. Helv. — 2013. — Vol. 88, no. 3. — P. 555—585.

[11] Karpilovsky G. Group Representations. Vol. 2. — Amsterdam: North-Holland, 1993. — (North-Holland Math. Stud.; Vol. 177).

[12] Karpenko N., Merkurjev A. Essential dimension of finite p-groups // Invent. Math. — 2008. — Vol. 172. — P. 491—508.

[13] Kollár J., Szabó E. Fixed points of group actions and rational maps // Canad. J. Math. — 2000. — Vol. 52, no. 5. — P. 1054—1056.

[14] Prokhorov Yu. Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3 // J. Algebraic Geom. — 2012. — Vol. 21, no. 3. — P. 563—600.

[15] Prokhorov Yu., Shramov C. Finite groups of birational selfmaps of threefolds. — 2016. — `arXiv:1611.00789`.

[16] Prokhorov Yu., Shramov C. Jordan constant for Cremona group of rank 3. — 2016. — `arXiv:1608.00709`.

[17] Prokhorov Yu., Shramov C. p-subgroups in the space Cremona group. — 2016. — `arXiv:1610.02990`.

[18] Serre J.-P. Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis // Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997—1011. — Paris: Soc. Math. de France, 2010. — P. 75—100.

[19] Tsygankov V. I. The conjugacy classes of finite nonsolvable subgroups in the plane Cremona group // Adv. Geom. — 2013. — Vol. 13, no. 2. — P. 323—347.