Абелевы группы без кручения конечного ранга с отмеченными базисами

А. А. ФОМИН
Московский педагогический государственный университет
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, модуль, категория.

Аннотация

В статье устанавливается взаимно-однозначное соответствие между абелевыми группами без кручения конечного ранга с отмеченными базисами и конечными последовательностями элементов конечно представимых модулей над кольцом полиадических чисел. Это соответствие является двойственностью категорий.

Abstract

A. A. Fomin, Torsion-free Abelian groups of finite rank with marked bases, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 201—228.

We define a one-to-one correspondence between torsion-free Abelian groups of finite rank with marked bases and finite sequences of elements of finitely presented modules over the ring of polyadic numbers. This correspondence is a duality of two categories.

Изучение абелевых групп без кручения конечного ранга началось с работ Л. С. Понтрягина [15], А. И. Мальцева [3], А. Г. Куроша [13], Д. Дерри [9], Ф. Леви [14] и Р. Бэра [7]. Тогда возникло так называемое матричное описание Куроша—Мальцева—Дерри абелевых групп без кручения конечного ранга. На самом деле под этим названием скрываются два разных результата: собственно описание А. И. Мальцева [3] и описание Д. Дерри [9], основанное на теореме А. Г. Куроша [13]. Теорема Куроша—Дерри вошла в монографии А. Г. Куроша [1] и Л. Фукса [6] и по этой причине имеет бо́льшую известность, чем теорема А. И. Мальцева. К этой же теме относится описание абелевых групп без кручения ранга 2, полученное Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом [8].

Новый подход был предложен автором в [11]. Там были введены три категории $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$. Первые две категории являются категориями абелевых групп: $\mathcal{F}$ — категория абелевых групп без кручения конечного ранга с отмеченными базисами, $\mathcal{D}$ — категория смешанных факторно делимых групп с отмеченными базисами. Третья категория $\mathcal{S}$ является категорией терминов, в которых описываются группы первых двух категорий. Объектами категории $\mathcal{S}$ являются конечные последовательности элементов конечно представимых модулей над кольцом полиадических чисел. Категории $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ эквивалентны, а категории $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}$ двойственны. Таким образом, любая конечная последовательность элементов конечно представимого модуля над кольцом полиадических чисел определяет две группы: группу без кручения конечного ранга и смешанную факторно делимую группу. Эти две группы являются взаимно двойственными в смысле двойственности [12].

Доказательство эквивалентности категорий $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ содержится в [5], доказательство двойственности категорий $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}$ является главной целью данной статьи.

Все рассматриваемые группы являются абелевыми. $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\hat{\mathbf{Z}}_p$ обозначают соответственно кольца целых, рациональных и целых p-адических чисел. Кольцо полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}} = \prod\limits_p \hat{\mathbf{Z}}_p$ — это произведение колец целых p-адических чисел по всем простым числам p. Z_n — кольцо классов вычетов по модулю n, Z_{p^∞} — группа типа p-бесконечность.

Под характеристикой $\chi = (m_p)$ понимается любая последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞, занумерованная всеми простыми числами. Для каждой характеристики $\chi = (m_p)$ определяется кольцо $Z_\chi = \prod\limits_p K_p$ как произведение по всем простым числам p колец K_p, где $K_p = Z_{p^{m_p}}$ при $m_p < \infty$ или $K_p = \hat{\mathbf{Z}}_p$ при $m_p = \infty$.

Если $a_1, \ldots, a_n$ — элементы модуля M над коммутативным кольцом R, то $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_R$ обозначает подмодуль, порождённый данными элементами, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ — подгруппа, порождённая этими элементами. Модуль M называется конечно представимым, если существует точная последовательность

$$R^m \to R^n \to M \to 0$$

для некоторых целых положительных чисел m и n. Кольца Z_χ, рассматриваемые как модули над кольцом полиадических чисел, являются циклическими ($n = 1$) конечно представимыми модулями. В общем случае каждый конечно представимый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль M имеет вид

$$M \cong Z_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus Z_{\chi_n},$$

где $\chi_1 \leqslant \ldots \leqslant \chi_n$ — некоторая последовательность характеристик [10]. Если N является конечно порождённым подмодулем конечно представимого $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля M, то оба модуля N и M/N являются конечно представимыми [10].

Группа называется локально циклической, если любая её конечно порождённая подгруппа является циклической группой. Любая локально циклическая группа либо является группой без кручения, тогда она имеет ранг 1, либо является периодической группой, тогда она изоморфна подгруппе группы Q/Z, т. е. изоморфна группе вида $\bigoplus\limits_p Z_{p^{m_p}}$. Таким образом, периодические локально циклические группы описываются с точностью до изоморфизма характеристиками (m_p).

Все недостающие определения можно найти в [6], наши обозначения также совпадают с обозначениями в [6].

1. Контравариантные функторы вида $\mathrm{Hom}_R(-, D)$

Пусть R — коммутативное кольцо. Мы рассматриваем категорию R-модулей. Объектами этой категории являются модули над кольцом R, а морфизмами — гомоморфизмы R-модулей. Фиксируем некоторый R-модуль D.

Для любого модуля A множество $\mathrm{Hom}_R(A, D)$ всех R-модульных гомоморфизмов из A в D также является R-модулем относительно операций сложения $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ и умножения на скаляры $(\alpha f)(a) = \alpha f(a)$ для любых двух гомоморфизмов $f, g\colon A \to D$ и для любых $a \in A$, $\alpha \in R$. Обозначим этот модуль через $A^* = \mathrm{Hom}_R(A, D)$.

Пусть $f\colon A \to B$ — гомоморфизм R-модулей и $\varphi \in B^*$. Это означает, что $\varphi\colon B \to D$ также является гомоморфизмом. Тогда отображение $\varphi \mapsto \varphi f$ является гомоморфизмом из модуля B^* в модуль A^*. Мы будем обозначать этот гомоморфизм как $f^* = \mathrm{Hom}_R(f, D)\colon B^* \to A^*$. Таким образом, гомоморфизм f^* определён равенством

$$f^*(\varphi) = \varphi f. \tag{1}$$

Пусть даны два гомоморфизма $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ и $\varphi \in C^*$. Тогда мы получаем

$$(gf)^*(\varphi) = \varphi(gf) = (\varphi g)f = g^*(\varphi)f = f^*\big(g^*(\varphi)\big) = (f^*g^*)(\varphi)$$

для любых гомоморфизмов $\varphi\colon C \to D$. Таким образом, имеет место равенство $(gf)^* = f^*g^*$. Также очевидно равенство $(\mathrm{id}_A)^* = \mathrm{id}_{A^*}$ для любого тождественного гомоморфизма $\mathrm{id}_A\colon A \to A$, где $\mathrm{id}_A(a) = a$, $a \in A$. Это означает, что $\mathrm{Hom}_R(-, D)$ является контравариантным функтором из категории R-модулей в себя.

Из определений следует, что $(f+g)^* = f^* + g^*$ и $(\alpha f)^* = \alpha f^*$ для гомоморфизмов $f, g\colon A \to B$ и скаляров $\alpha \in R$.

Следующая теорема хорошо известна [2, 6] и легко доказывается.

Теорема 1.1. *Пусть $A, A_1, \ldots, A_n$ — модули над коммутативным кольцом R. Прямое разложение $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют $2n$ гомоморфизмов*

$$A_k \xrightarrow{i_k} A \xrightarrow{\pi_k} A_k,$$

таких что $\pi_m i_k = 0$ для всех $k \neq m$, $\pi_k i_k = \mathrm{id}_{A_k}$ для каждого $k = 1, \ldots, n$ и $i_1\pi_1 + \ldots + i_n\pi_n = \mathrm{id}_A$.

Теорема 1.2. *Если R-модуль A раскладывается в прямую сумму R-модулей $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, то R-модуль $A^* = \mathrm{Hom}_R(A, D)$ также раскладывается в прямую сумму R-модулей $A^* = A_1^* \oplus \ldots \oplus A_n^*$.*

Доказательство. Применяя к модулю A сначала теорему 1.1, а потом функтор $\mathrm{Hom}(-,D)$, мы получаем диаграммы

$$A_k^* \xleftarrow{i_k^*} A^* \xleftarrow{\pi_k^*} A_k^*,$$

где $i_k^*\pi_m^* = 0$ для всех $k \neq m$, $i_k^*\pi_k^* = \mathrm{id}_{A_k^*}$ для каждого $k = 1,\ldots,n$ и $\pi_1^* i_1^* + \ldots + \pi_n^* i_n^* = \mathrm{id}_{A^*}$. Мы видим, что функтор меняет местами «вложения» и «проекции». Применяя снова теорему 1.1, мы получаем результат. □

В случае бесконечной прямой суммы $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ мы имеем бесконечное множество вложений $\varepsilon_i\colon A_i \to A$, $i \in I$. Если $f\colon A \to D$ — некоторый гомоморфизм, т. е. $f \in A^*$, то $f\varepsilon_i \in A_i^*$ для каждого $i \in I$. Хорошо известно [2, 6] и легко проверяется, что соответствие $f \mapsto (f\varepsilon_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} A_i^*$ является изоморфизмом $A^* \to \prod\limits_{i\in I} A_i^*$, т. е. имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3. $\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} A_i\Big)^* \cong \prod\limits_{i\in I} A_i^*$.

Теперь мы определим функцию

$$\Phi_A\colon A \to A^{**} = \mathrm{Hom}_R(A^*, D) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(A,D),D).$$

Пусть $a \in A$. Мы определяем $\Phi_A(a)$ как функцию $\Phi_A(a)\colon \mathrm{Hom}_R(A,D) \to D$, где

$$\Phi_A(a)(\varphi) = \varphi(a) \tag{2}$$

для любого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A,D)$. Легко убедиться, что $\Phi_A\colon A \to A^{**}$ является R-модульным гомоморфизмом.

Теорема 1.4. *Для любого гомоморфизма R-модулей $g\colon A \to B$ следующая диаграмма является коммутативной:*

$$\begin{tikzcd}
A^{**} \arrow[r, "g^{**}"] & B^{**} \\
A \arrow[u, "\Phi_A"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "\Phi_B"']
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $a \in A$. Тогда $\Phi_A(a) \in A^{**}$ является гомоморфизмом $\Phi_A(a)\colon A^* \to D$. Мы рассмотрим также гомоморфизм $g^*\colon B^* \to A^*$. Применяя равенство (1), мы получаем равенство двух гомоморфизмов $B^* \to D$

$$g^{**}\big(\Phi_A(a)\big) = \Phi_A(a)g^*.$$

Пусть $\varphi \in B^*$, т. е. $\varphi\colon B \to D$ является гомоморфизмом. Применяя равенство (2), мы получаем

$$\Phi_A(a)\big(g^*(\varphi)\big) = \big(g^*(\varphi)\big)(a) = (\varphi g)(a)$$

для любого $\varphi \in B^*$. Таким образом, мы имеем $\big(g^{**}\Phi_A(a)\big)(\varphi) = (\varphi g)(a)$ для любого $\varphi \in B^*$.

С другой стороны, $\Phi_B\big(g(a)\big) \in B^{**}$, т. е. $\Phi_B\big(g(a)\big)\colon B^* \to D$ — гомоморфизм. Пусть $\varphi \in B^*$, т. е. $\varphi\colon B \to D$ — гомоморфизм. Тогда равенство (2) показывает, что $\Phi_B\big(g(a)\big)(\varphi) = \varphi\big(g(a)\big)$ для любого $\varphi \in B^*$. Следовательно, $\big(g^{**}\Phi_A(a)\big)(\varphi) = \Phi_B\big(g(a)\big)(\varphi)$ для любого $\varphi \in B^*$, и мы получаем равенство двух функций $g^{**}\Phi_A(a) = \Phi_B\big(g(a)\big)$ для любого элемента $a \in A$. Таким образом, мы можем заключить, что $g^{**} \cdot \Phi_A = \Phi_B \cdot g$, т. е. диаграмма является коммутативной. □

Теорема 1.5. *Если гомоморфизмы $\Phi_B\colon B \to B^{**}$ и $\Phi_C\colon C \to C^{**}$ являются изоморфизмами и $A = B \oplus C$, то гомоморфизм $\Phi_A\colon A \to A^{**}$ также является изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $\Phi_A(a) = 0$ и $\pi_B(a) = b$ для некоторого элемента $a \in A$ и проекции $\pi_B\colon A \to B$. По теореме 1.4 мы имеем $\Phi_B\pi_B(a) = \pi_B^{**}\Phi_A(a) = 0$. Поскольку гомоморфизм Φ_B инъективен, мы получаем, что $b = \pi_B(a) = 0$. Аналогично $c = \pi_C(a) = 0$. Следовательно,

$$a = (i_B\pi_B + i_C\pi_C)(a) = i_B(b) + i_C(c) = 0$$

и гомоморфизм Φ_A является инъективным.

По теореме 1.2 мы имеем $A^{**} = B^{**} \oplus C^{**}$. Пусть $f \in A^{**}$. Тогда

$$f = (i_B^{**}\pi_B^{**} + i_C^{**}\pi_C^{**})(f).$$

Так как гомоморфизм Φ_B сюръективен, то в диаграмме теоремы 1.4 для $g = \pi_B$ найдётся элемент $b \in B$, такой что $\pi_B^{**}(f) = \Phi_B(b)$. Аналогично найдётся элемент $c \in C$, такой что $\pi_C^{**}(f) = \Phi_C(c)$. Мы получаем равенство

$$f = i_B^{**}\big(\Phi_B(b)\big) + i_C^{**}\big(\Phi_C(c)\big) = \Phi_A\big(i_B(b) + i_C(c)\big),$$

которое показывает, что гомоморфизм Φ_A является сюръективным. □

2. χ-адическое пополнение

Под характеристикой $\chi = (m_p)$ мы понимаем последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞, занумерованную всеми простыми числами (см. [6]). Две характеристики эквивалентны, если они различаются не более чем для конечного числа конечных членов. Класс эквивалентности характеристики называется типом. На множестве характеристик задано отношение порядка, $(m_p) \leqslant (n_p)$ тогда и только тогда, когда $m_p \leqslant n_p$ для всех простых чисел p.

Каждое положительное целое число может быть представлено в виде $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — первые s простых чисел, $2, 3, 5, \ldots$, а показатели степеней — целые неотрицательные числа, $0 \leqslant k_i \in \mathbf{Z}$, $i = 1, \ldots, s$. Мы определим *характеристику* числа n следующим образом: $\mathrm{char}(n) = (k_1, \ldots, k_s, 0, 0, \ldots)$. В частности, $\mathrm{char}(1) = (0, 0, \ldots)$. Очевидно, что характеристики положительных чисел принадлежат нулевому типу. В действительности мы имеем взаимно-однозначное соответствие между целыми положительными числами и характеристиками нулевого типа. Также понятно, что число n делит число m тогда и только тогда, когда $\mathrm{char}(n) \leqslant \mathrm{char}(m)$.

Пусть $\chi = (m_p)$ — некоторая характеристика. Если для некоторого целого положительного числа n выполняется $\mathrm{char}(n) \leqslant \chi$, то мы будем кратко писать $n \leqslant \chi$. Обозначим через R_χ подгруппу аддитивной группы рациональных чисел, которая содержит единицу и в которой характеристика единицы совпадает с характеристикой χ (см. [6]). Легко убедиться, что для любого целого положительного числа n выполняется

$$n \leqslant \chi \Longleftrightarrow \frac{1}{n} \in R_\chi.$$

Теперь мы определим χ-адическую топологию на абелевых группах. χ-адическая топология на группе A определяется базой окрестностей нуля $\{nA \mid n \leqslant \chi\}$. Это означает, что подмножество в группе A является открытым в χ-адической топологии на группе A тогда и только тогда, когда оно пусто или является объединением подмножеств вида

$$a + nA, \quad a \in A, \quad n \leqslant \chi.$$

Мы определяем χ-адическое пополнение $\hat{A}_\chi$ для группы A как обратный предел обратного спектра

$$\pi_n^m \colon A/mA \to A/nA \tag{3}$$

для всех пар (m, n) целых положительных чисел, таких что $\mathrm{char}(n) \leqslant \mathrm{char}(m) \leqslant \chi$. Здесь $\pi_n^m(a + mA) = a + nA$.

Элемент $a = (a_n)_{n\leqslant\chi}$ группы $\prod\limits_{n\leqslant\chi} A/nA$ называется сетью спектра (3), если $\pi_n^m(a_m) = a_n$ для любой пары (m, n) положительных целых чисел, такой что $\mathrm{char}(n) \leqslant \mathrm{char}(m) \leqslant \chi$. Легко убедиться, что все сети образуют подгруппу группы $\prod\limits_{n\leqslant\chi} A/nA$. Эта подгруппа называется обратным пределом спектра (3).

Определение. Обратный предел спектра (3) называется χ-адическим пополнением группы A и обозначается $\hat{A}_\chi$.

p-примарные подспектры спектра (3) выглядят следующим образом:

$$A/p^{m_p}A \to \ldots \to A/pA \to 0, \quad \text{если} \quad m_p < \infty, \tag{4}$$

или

$$\ldots \to A/p^kA \to \ldots \to A/pA \to 0, \quad \text{если} \quad m_p = \infty. \tag{5}$$

Обратный предел спектра (4) совпадает с группой $A/p^{m_p}A$. Обратный предел спектра (5) является p-адическим пополнением $\hat{A}_p$ группы A. Так как примарные подспектры по всем простым числам p определяют весь спектр (3), то имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $\chi = (m_p)$ — некоторая характеристика. Для любой группы A*

$$\hat{A}_\chi \cong \prod_p A_p,$$

где $A_p = A/p^{m_p}A$, если $m_p < \infty$, или $A_p = \hat{A}_p$, если $m_p = \infty$.

Интересно заметить, что если характеристика χ принадлежит нулевому типу и в качестве A взять кольцо целых чисел, то эта теорема совпадёт с китайской теоремой об остатках. Теперь мы отдельно рассмотрим применение спектра (3) к кольцу целых чисел $\mathbf{Z}$:

$$\pi_n^m \colon \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \quad \operatorname{char}(n) \leqslant \operatorname{char}(m) \leqslant \chi. \tag{6}$$

Каждая группа $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ является также естественным образом кольцом. Каждый групповой гомоморфизм $\pi_n^m \colon \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ является также кольцевым гомоморфизмом. Таким образом, χ-адическое пополнение кольца целых чисел $\mathbf{Z}$ — коммутативное кольцо. Это кольцо Z_χ может быть также определено как $Z_\chi = \prod\limits_p K_p$, где $K_p = Z_{p^{m_p}}$, если $m_p < \infty$, или $K_p = \hat{\mathbf{Z}}_p$, если $m_p = \infty$.

Для любой группы A её χ-адическое пополнение $\hat{A}_\chi$ является Z_χ-модулем. Заметим также, что любой Z_χ-модуль является модулем над кольцом полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}} = \prod\limits_p \hat{\mathbf{Z}}_p$, так как $Z_\chi \cong \hat{\mathbf{Z}}/I_\chi$, где $I_\chi = \{\gamma \in \hat{\mathbf{Z}} \mid \operatorname{char}(\gamma) \geqslant \chi\}$ — идеал кольца $\hat{\mathbf{Z}}$.

Предложение 2.2. *Пусть*

$$\{C_n = \langle c_n \rangle \mid \operatorname{ord}(c_n) = n,\ n \leqslant \chi\} \text{ —}$$

множество циклических групп C_n с отмеченными образующими c_n порядка n, заиндексированное целыми положительными числами $n \leqslant \chi$, где χ — некоторая характеристика. Пусть

$$\{\pi_n^m \colon C_m \to C_n \mid \pi_n^m(c_m) = c_n,\ \operatorname{char}(n) \leqslant \operatorname{char}(m) \leqslant \chi\} \text{ —}$$

множество гомоморфизмов, такое что $\pi_n^m(c_m) = c_n$ по всем парам целых положительных чисел, для которых $\operatorname{char}(n) \leqslant \operatorname{char}(m) \leqslant \chi$. Тогда обратный предел M спектра $\{\pi_n^m \mid \operatorname{char}(n) \leqslant \operatorname{char}(m) \leqslant \chi\}$ имеет вид

$$M = cZ_\chi = \{c\alpha \mid \alpha \in Z_\chi\},$$

где $c = (c_n)_{n \leqslant \chi} \in \prod\limits_{n \leqslant \chi} C_n$ является элементом обратного предела. Более того, равенство $c\alpha = 0$ влечёт $\alpha = 0$ для $\alpha \in Z_\chi$.

Доказательство. Ясно, что элемент $c = (c_n)_{n \leqslant \chi} \in \prod\limits_{n \leqslant \chi} C_n$ является сетью спектра, т. е. c принадлежит обратному пределу. Мы имеем $C_n \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ для любого $n \leqslant \chi$. Пусть $d = (d_n)_{n \leqslant \chi} \in \prod\limits_{n \leqslant \chi} C_n$ — другой элемент обратного предела. Тогда мы имеем $d_n = c_n\alpha_n$, где $\alpha_n \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ для всех n. Поскольку элемент $d = (d_n)_{n \leqslant \chi} \in \prod\limits_{n \leqslant \chi} C_n$ является сетью нашего спектра, то элемент

$\alpha = (\alpha_n)_{n\leqslant\chi} \in \prod\limits_{n\leqslant\chi} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ обязан быть сетью спектра (6), т. е. $\alpha \in Z_\chi$ и $d = c\alpha$. Если $d = 0$, то $d_n = 0$ и $\alpha_n = 0$ для всех $n \leqslant \chi$. Следовательно, $\alpha = 0$. □

Отметим, что p-адическая топология и Z-адическая топология являются частными случаями χ-адических топологий для характеристик $\chi = (0,\ldots,0,\infty,0,\ldots)$ и $\chi = (\infty,\infty,\ldots)$ соответственно.

3. Двойственность для конечных групп

Группа $Q/Z \cong \bigoplus\limits_p Z(p^\infty)$ является периодической локально циклической группой. Она изоморфна периодической части мультипликативной группы комплексных чисел и играет важную роль в двойственности Понтрягина (см. [6]).

Рассмотрим конечную циклическую группу C порядка n, порождённую элементом c. Обозначим через $c^*\colon C \to Q/Z$ гомоморфизм, для которого $c^*(c) = \frac{1}{n} + Z \in Q/Z$. Любой гомоморфизм $\varphi\colon C \to Q/Z$ определяется образом порождающего элемента c, т. е. $\varphi(c) = \frac{k}{m} + Z \in Q/Z$. Поскольку $0 = \varphi(nc) = \frac{nk}{m} + Z$, то произведение nk должно делиться на m, т. е. $nk = mr$, $r \in Z$. Тогда $\varphi(c) = \frac{r}{n} + Z$, и мы получаем $\varphi = rc^*$. Таким образом, группа $C^* = \mathrm{Hom}(C, Q/Z)$ является циклической группой порядка n, порождённой элементом c^*.

Лемма 3.1. *Пусть $f\colon C_n \to C_m$ — гомоморфизм циклических групп, порождённых элементами c_n и c_m порядка n и m соответственно, т. е. $C_n = \langle c_n\rangle$ и $C_m = \langle c_m\rangle$. Если $f(c_n) = m_1 c_m$, где $0 \leqslant m_1 < m$, то*

1) *существует единственное число $n_1 \in \mathbf{Z}$, такое что $0 \leqslant n_1 < n$ и $n_1 m = n m_1$;*
2) *$f^*(c_m^*) = n_1 c_n^* = \frac{nm_1}{m} c_n^*$ для дуального гомоморфизма $f^*\colon C_m^* \to C_n^*$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Так как $0 = f(0) = f(nc_n) = nm_1 c_m$, то целое число nm_1 делится на порядок m элемента c_m. Более того, $n_1 = \frac{nm_1}{m} < n$, потому что $nm_1 < nm$.

Докажем утверждение 2). Элемент $f^*(c_m^*) \in C_n^* = \mathrm{Hom}(C_n, Q/Z)$ является гомоморфизмом $f^*(c_m^*)\colon C_n \to Q/Z$. Найдём значение этого гомоморфизма на элементе c_n:

$$f^*(c_m^*)(c_n) = c_m^*\bigl(f(c_n)\bigr) = c_m^*(m_1 c_m) = m_1 c_m^*(c_m) = \frac{m_1}{m} + Z \in Q/Z.$$

Так как

$$\frac{m_1}{m} = \frac{nm_1}{nm} = \frac{n_1 m}{nm} = \frac{n_1}{n},$$

то мы окончательно получаем

$$f^*(c_m^*)(c_n) = \frac{n_1}{n} + Z = n_1 c_n^*(c_n).$$

Таким образом, $f^*(c_m^*) = n_1 c_n^*$, потому что значения двух гомоморфизмов совпадают на образующем элементе c_n. □

Следствие 3.2. *Если число n является делителем числа m и $f(c_n) = \frac{m}{n}c_m$, то $f^*(c_m^*) = c_n^*$.*

Доказательство. $n_1 = \frac{nm_1}{m} = 1$ в терминах леммы 3.1. □

Следствие 3.3. *Гомоморфизм f инъективен тогда и только тогда, когда гомоморфизм f^* сюръективен.*

Доказательство. Равенство $n_1 m = nm_1$ показывает, что порядок элемента $f(c_n) = m_1 c_m$ равен n тогда и только тогда, когда числа n и n_1 взаимно просты. Это означает, что элемент $f^*(c_m^*) = n_1 c_n^*$ порождает группу C_n^*. □

Пусть C — конечная циклическая группа, порождённая элементом c порядка n, $C = \langle c \rangle$. Как мы знаем, группа $C^* = \mathrm{Hom}(C, Q/Z)$ является циклической того же порядка n, порождённой элементом $c^*\colon C \to Q/Z$, где $c^*(c) = \frac{1}{n} + Z \in$ $\in Q/Z$.

Теперь мы определим функцию

$$\Phi\colon C \to C^{**} = \mathrm{Hom}(C^*, Q/Z) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(C, Q/Z), Q/Z).$$

Пусть $a \in C$. Элемент $\Phi(a)$ определяется как гомоморфизм

$$\Phi(a)\colon \mathrm{Hom}(C, Q/Z) \to Q/Z,$$

где $\Phi(a)(\varphi) = \varphi(a)$ для любого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(C, Q/Z)$. Легко проверяется, что функция $\Phi\colon C \to C^{**}$ является изоморфизмом групп. Более того, мы можем видеть, что

$$\Phi(c)(c^*) = c^*(c) = \frac{1}{n} + Z \in Q/Z.$$

С другой стороны,

$$c^{**}(c^*) = \frac{1}{n} + Z \in Q/Z.$$

Следовательно, $\Phi(c) = c^{**}$.

Отождествляя вдоль изоморфизма Φ, мы получаем $C^{**} = C$ и $c^{**} = c$. Теорема 1.4 показывает, что при таком отождествлении $f^{**} = f$ для любого гомоморфизма $f\colon A \to B$ конечных циклических групп.

Поскольку любая конечная группа является прямой суммой конечных циклических групп, то теоремы 1.2 и 1.5 позволяют расширить наши утверждения до любых конечных групп: $A^{**} = A$ для любой конечной группы A и $f^{**} = f$ для любого гомоморфизма $f\colon A \to B$ конечных групп.

Таким образом, мы получаем контравариантный функтор $\mathrm{Hom}(-, Q/Z)$ из категории конечных групп в себя, такой что, будучи дважды применённым, он совпадает с тождественным функтором $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(-, Q/Z), Q/Z) = \mathrm{Id}$. Этот функтор называется двойственностью в категории конечных групп. Другие свойства этой двойственности можно найти, например, в [2].

Замечание. Мы можем определить такой же гомоморфизм Φ для бесконечной циклической группы. Хотя он и будет инъективным, но, к сожалению, не будет изоморфизмом:

$$\Phi\colon Z \to Z^{**} = \mathrm{Hom}(Z^*, Q/Z) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(Z, Q/Z), Q/Z) \cong \cong \mathrm{Hom}(Q/Z, Q/Z) \cong \hat{\mathbf{Z}}.$$

По этой причине двойственность не может быть расширена до категории конечно порождённых групп.

4. Локально циклические группы и конечно представимые модули

Любая периодическая группа A является модулем над кольцом полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}}$. Пусть $a \in A$ и $na = 0$ для некоторого целого числа $n > 0$. Для любого полиадического числа $\alpha \in \hat{\mathbf{Z}}$ существуют единственные $m \in \mathbf{Z}$ и $\beta \in \hat{\mathbf{Z}}$, такие что $\alpha = n\beta + m$ и $0 \leqslant m < n$. Мы определим $\alpha a = ma$. Это определение не зависит от выбора числа n, а группа A становится $\hat{\mathbf{Z}}$-модулем относительно так определённого умножения $\hat{\mathbf{Z}} \times A \to A$. Более того, каждый гомоморфизм периодических групп $A \to B$ является $\hat{\mathbf{Z}}$-модульным гомоморфизмом. Таким образом, $\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(A, B)$ для периодических групп A и B.

Рассмотрим периодическую локально циклическую группу C_χ характеристики χ. Для любого положительного целого числа $n \leqslant \chi$ группа C_χ содержит единственную циклическую подгруппу C_n порядка n. Кроме того, $C_n \subset C_m$ тогда и только тогда, когда число n является делителем числа m, т. е. $\mathrm{char}(n) \leqslant \leqslant \mathrm{char}(m) \leqslant \chi$. Выбирая образующий элемент c_n для каждой циклической подгруппы C_n, мы получаем множество образующих $\{c_n \mid n \leqslant \chi\}$ группы C_χ. Мы будем называть множество образующих $\{c_n \mid n \leqslant \chi\}$ *нормальным*, если $c_n = \frac{m}{n} c_m$ для любой пары целых положительных чисел, такой что $\mathrm{char}(n) \leqslant \leqslant \mathrm{char}(m) \leqslant \chi$.

Каждая периодическая локально циклическая группа C_χ содержит нормальное множество образующих, потому что она изоморфна подгруппе $B_\chi = = \{\frac{m}{n} + Z \mid n \leqslant \chi\}$ группы Q/Z, а группа B_χ содержит очевидное нормальное множество образующих $\{\frac{1}{n} + Z \mid n \leqslant \chi\}$.

Для подгрупп $C_n \subset C_\chi$ мы вводим обозначения для вложений $i_n\colon C_n \to C_\chi$, $i_n(a) = a$, а также $i_{nm}\colon C_n \to C_m$, $i_{nm}(a) = a$, $a \in C_n$, для любой пары положительных целых чисел, такой что $\mathrm{char}(n) \leqslant \mathrm{char}(m) \leqslant \chi$. Получаются следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & C_\chi & \\ C_n \arrow[ur, "i_n"] \arrow[rr, "i_{nm}"'] & & C_m \arrow[ul, "i_m"'] \end{tikzcd}.$$

Применив к ним контравариантный функтор $\mathrm{Hom}(-, Q/Z)$, мы получим следующие коммутативные диаграммы для любой пары положительных целых чисел, удовлетворяющих соотношению $\mathrm{char}(n) \leqslant \mathrm{char}(m) \leqslant \chi$:

$$\begin{tikzcd} & C_\chi^* \arrow[dl, "i_m^*"'] \arrow[dr, "i_n^*"] & \\ C_m^* \arrow[rr, "i_{nm}^*"'] & & C_n^* \end{tikzcd} .$$

Любой элемент группы C_χ^* переходит по гомоморфизмам $\{i_n^* \colon C_\chi^* \to C_n^* \mid n \leqslant \chi\}$ в некоторую сеть обратного спектра

$$i_{nm}^* \colon C_m^* \to C_n^*, \quad \mathrm{char}(n) \leqslant \mathrm{char}(m) \leqslant \chi. \tag{7}$$

Это отображение является изоморфизмом групп (а также $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей) между C_χ^* и обратным пределом спектра (7).

Предположим, что $\{c_n \mid n \leqslant \chi\}$ является нормальным множеством образующих группы C_χ. Тогда $i_{nm}(c_n) = \frac{m}{n} c_m$, и по следствию 3.2 получается, что $i_{nm}^*(c_m^*) = c_n^*$. Таким образом, элемент $y = (c_n^*)_{n \leqslant \chi} \in \prod\limits_{n \leqslant \chi} C_n^*$ является сетью спектра (7). Это означает, что элемент y принадлежит обратному пределу спектра (7).

Теорема 4.1. *Пусть C_χ — периодическая локально циклическая группа характеристики χ с нормальным множеством образующих $\{c_n \mid n \leqslant \chi\}$. Тогда $C_\chi^* \cong y Z_\chi$, где $y = (c_n^*)_{n \leqslant \chi} \in \prod\limits_{n \leqslant \chi} C_n^*$. Более того, $\alpha y = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ для $\alpha \in Z_\chi$.*

Доказательство. Теорема является прямым следствием предложения 2.2. $\square$

Поскольку все наши кольца коммутативны, мы не различаем левые и правые модули, например, $y Z_\chi = Z_\chi y$ и $\alpha y = y \alpha$ в этой теореме.

Следствие 4.2. *Кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}(Q/Z)$ группы Q/Z изоморфно кольцу полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}}$.*

Доказательство. Мы используем определение кольца $\hat{\mathbf{Z}}$ как обратного предела спектра (6) для характеристики $\chi = (\infty, \infty, \ldots)$. Множество элементов

$$\left\{ c_n = \frac{1}{n} + Z \in Q/Z \;\middle|\; 0 < n \in \mathbf{Z} \right\}$$

является нормальным множеством образующих локально циклической группы Q/Z. Для любого эндоморфизма $f \colon Q/Z \to Q/Z$ его ограничение $f \colon C_n \to C_n$ совпадает с умножением на целое число a_n, $0 \leqslant a_n < n$, $f(c_n) = a_n c_n$, где $C_n = \langle c_n \rangle$, $0 < n \in \mathbf{Z}$. Далее, если n делит m, то $a_m \equiv a_n \pmod{n}$. Это означает, что элемент $\alpha = (a_n)_{n > 0} \in \prod\limits_{n > 0} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ является сетью спектра (6), то есть полиадическим числом. Легко убедиться, что соответствие $f \leftrightarrow \alpha$ является изоморфизмом колец. $\square$

Для любой абелевой группы A группа $A^* = \mathrm{Hom}(A, Q/Z)$ является также модулем над кольцом полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}}$. Действительно, мы можем определить умножение $\hat{\mathbf{Z}} \times A^* \to A^*$ следующим образом. Пусть $\alpha \in \hat{\mathbf{Z}}$ и $\varphi \in A^*$. Поскольку $\alpha \in \hat{\mathbf{Z}}$ может рассматриваться как гомоморфизм $\alpha\colon Q/Z \to Q/Z$ по следствию 4.2, а элемент $\varphi \in A^*$ является гомоморфизмом $\varphi\colon A \to Q/Z$, то мы определяем произведение $\alpha\varphi \in A^*$ просто как композицию функций $\alpha\varphi\colon A \to Q/Z$, где $(\alpha\varphi)(a) = \alpha\bigl(\varphi(a)\bigr)$, $a \in A$.

Кроме того, для любого гомоморфизма групп $f\colon A \to B$ дуальный гомоморфизм $f^*\colon B^* \to A^*$ является не только групповым гомоморфизмом, но также и гомоморфизмом $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей, потому что

$$f^*(\alpha\varphi) = (\alpha\varphi)f = \alpha(\varphi f) = \alpha f^*(\varphi), \quad \alpha \in \hat{\mathbf{Z}}, \ \ \varphi \in A^*.$$

Таким образом, мы получаем предложение.

Предложение 4.3. $\mathrm{Hom}(-, Q/Z)$ *является контравариантным функтором из категории абелевых групп в категорию модулей над кольцом полиадических чисел* $\hat{\mathbf{Z}}$.

Мы напоминаем, что всякий циклический конечно представимый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль M изоморфен модулю Z_χ для некоторой характеристики χ [10]. Он имеет вид

$$M = yZ_\chi = \{\alpha y \mid \alpha \in Z_\chi\},$$

где y является образующим и $\alpha y = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ для $\alpha \in Z_\chi$, или $\gamma y = 0$ тога и только тогда, когда $\mathrm{char}(\gamma) \geqslant \chi$ для $\gamma \in \hat{\mathbf{Z}}$ [10]. Этот модуль будет называться циклическим $\hat{\mathbf{Z}}$-модулем характеристики χ. Заметим, что кохарактеристика элемента y в точности равна характеристике χ [5].

Конечно представимые $\hat{\mathbf{Z}}$-модули раскладываются в конечные прямые суммы конечно представимых циклических $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей, т. е. они имеют вид $y_1Z_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus y_nZ_{\chi_n}$, и без потери общности мы можем полагать, что $\chi_1 \leqslant \ldots \leqslant \chi_n$ [10].

Далее мы будем рассматривать контравариантный функтор $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(-, Q/Z)$ из категории $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей в себя, который совпадает с функтором $\mathrm{Hom}(-, Q/Z)$ на периодических группах.

Обозначение A^* будет использоваться далее в этом разделе для $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(A, Q/Z)$.

Теорема 4.4. *Пусть M — циклический $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль характеристики χ. Тогда M^* является периодической локально циклической группой характеристики χ.*

Доказательство. Мы имеем $M = yZ_\chi$. Пусть $f\colon yZ_\chi \to Q/Z$ — $\hat{\mathbf{Z}}$-модульный гомоморфизм, т. е. $f \in M^*$. Тогда $f(y) = \frac{k}{n} + Z \in Q/Z$, где $\frac{k}{n} \in \mathbf{Q}$ — несократимая дробь. В этом случае n является порядком элемента $\frac{k}{n} + Z \in Q/Z$ и характеристика n совпадает с кохарактеристикой элемента $f(y)$ в циклической группе $\langle f(y)\rangle$, порождённой этим элементом. Свойство 7 параграфа 4 в [5] показывает, что $\mathrm{char}(n) \leqslant \chi$.

Соответствие $f \leftrightarrow \frac{k}{n} + Z$, где $f(y) = \frac{k}{n} + Z \in Q/Z$ и $n \leqslant \chi$, является изоморфизмом $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей. Более того, гомоморфизмы $c_n \colon M \to Q/Z$, где $c_n(y) = \frac{1}{n} + Z$ и $n \leqslant \chi$, образуют нормальное множество образующих локально циклической группы M^* характеристики χ. $\square$

Пусть M — некоторый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль. Напомним, что $\hat{\mathbf{Z}}$-модульный гомоморфизм $\Phi_M \colon M \to M^{**} = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(M, Q/Z), Q/Z)$ определяется равенством $\Phi_M(a)(\varphi) = \varphi(a)$ для любого элемента $\varphi \in M^* = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(M, Q/Z)$.

Теорема 4.5. *Пусть M — конечная прямая сумма локально циклических групп. Тогда гомоморфизм $\Phi_M \colon M \to M^{**}$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Согласно теореме 1.5 утверждение достаточно доказать для локально циклических групп. Пусть $M = C_\chi$ — некоторая локально циклическая группа характеристики χ с нормальным множеством образующих $\{c_n \mid n \leqslant \chi\}$. По теореме 4.1 мы имеем $M^* = yZ_\chi$, где $y = (c_n^*)_{n \leqslant \chi} \in \prod\limits_{n \leqslant \chi} C_n^*$.

Любой элемент $a \in M$ может быть представлен в виде $a = kc_n$, где $0 \leqslant k < n$. Предполагая $\Phi_M(a) = 0$, мы получаем, что $\Phi_M(a)(\alpha y) = (\alpha y)(a) = 0$ для всех $\alpha \in Z_\chi$. В частности,

$$0 = y(a) = y(kc_n) = ky(c_n) = k\left(\frac{1}{n} + Z\right) = \left(\frac{k}{n} + Z\right) \in Q/Z.$$

Следовательно, $k = 0$ и $a = 0$. Таким образом, гомоморфизм $\Phi_M \colon M \to M^{**}$ инъективен.

Пусть $f \in M^{**}$. Это означает, что $f \colon M^* \to Q/Z$ является $\hat{\mathbf{Z}}$-модульным гомоморфизмом. Поскольку модуль $M^* = yZ_\chi$ является циклическим, то гомоморфизм f определяется элементом $f(y) = (\frac{k}{n} + Z) \in Q/Z$ для некоторого $\frac{k}{n} \in Q$. Заметим, что также

$$\Phi_M(kc_n)(y) = y(kc_n) = \left(\frac{k}{n} + Z\right) \in Q/Z.$$

Так как значения двух гомоморфизмов $f \colon M^* \to Q/Z$ и $\Phi_M(kc_n) \colon M^* \to Q/Z$ совпадают на образующем элементе y, то они совпадают на любом элементе модуля M^*, т. е. $f = \Phi_M(kc_n)$. Отсюда следует, что гомоморфизм $\Phi_M \colon M \to M^{**}$ сюръективен. $\square$

Теорема 4.6. *Пусть M — конечно представимый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль. Тогда гомоморфизм $\Phi_M \colon M \to M^{**}$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Любой конечно представимый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль является конечной прямой суммой конечно представимых циклических модулей $M = y_1 Z_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus y_n Z_{\chi_n}$. Согласно теореме 1.5 достаточно доказать утверждение для циклических конечно представимых $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей. Пусть $M = yZ_\chi$ — циклический $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль характеристики χ, порождённый элементом y.

Предполагая $\Phi_M(a) = 0$, где $a = \alpha y$ — некоторый элемент модуля $M = yZ_\chi$, мы получаем, что $\big(\Phi_M(a)\big)(\varphi) = \varphi(\alpha y) = 0$ для всех $\varphi \in M^* = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(M, Q/Z)$.

Другими словами, $\alpha\big(\varphi(y)\big) = 0$, где $\varphi(y)$ пробегает все элементы $\frac{k}{n} + Z \in Q/Z$, для которых $n \leqslant \chi$. В частности, мы получаем, что $\alpha(\frac{1}{n} + Z) = 0$ для всех $n \leqslant \chi$. χ-адическое число $\alpha \in Z_\chi$ может быть представлено как сеть спектра (6): $\alpha = (\alpha_n)_{n \leqslant \chi} \in \prod\limits_{n \leqslant \chi} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, где $\alpha_n = a_n + \mathbf{Z} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ и $0 \leqslant a_n < n$. Равенство $\alpha(\frac{1}{n} + Z) = \frac{a_n}{n} + Z$ имеет место по определению этого произведения. Следовательно, $a_n = 0$ для всех $n \leqslant \chi$. Отсюда следует, что $\alpha = 0$ и $a = \alpha y = 0$. Таким образом, гомоморфизм $\Phi_M\colon M \to M^{**}$ инъективен.

По теореме 4.4 $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль M^* является локально циклической группой характеристики χ с нормальным множеством образующих $\{c_n \mid n \leqslant \chi\}$, таким что $c_n(y) = \frac{1}{n} + Z \in Q/Z$ для всех $n \leqslant \chi$.

Пусть $f \in M^{**}$, т. е. f является гомоморфизмом $f\colon M^* \to Q/Z$. Обозначая $f(c_n) = \frac{a_n}{n} + Z \in Q/Z$ для всех $n \leqslant \chi$, мы получаем множество целых чисел $\{a_n \mid n \leqslant \chi\}$. Так как множество образующих $\{c_n \mid n \leqslant \chi\}$ является нормальным, то $kc_m = c_n$ в случае $m = kn \in \mathbf{Z}$. Следовательно,

$$\frac{a_n}{n} + Z = f(c_n) = f(kc_m) = \frac{ka_m}{m} + Z = \frac{a_m}{n} + Z \in Q/Z.$$

Отсюда следует, что $a_m \equiv a_n \pmod{n}$ для всех пар положительных целых чисел, для которых $\operatorname{char}(n) \leqslant \operatorname{char}(m) \leqslant \chi$. Это означает, что элемент $\alpha = (a_n + n\mathbf{Z})_{n \leqslant \chi} \in \prod\limits_{n \leqslant \chi} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ является сетью спектра (6), т. е. $\alpha \in Z_\chi$. Теперь мы рассмотрим действие элемента $\Phi_M(\alpha y) \in M^{**}$ на образующих $c_n \in M^*$. Мы получаем

$$\big(\Phi_M(\alpha y)\big)(c_n) = c_n(\alpha y) = \alpha c_n(y) = \alpha\left(\frac{1}{n} + Z\right) = \frac{a_n}{n} + Z = f(c_n).$$

Так как действие гомоморфизма $\Phi_M(\alpha y)\colon M^* \to Q/Z$ совпадает с действием гомоморфизма $f\colon M^* \to Q/Z$ на множестве всех образующих $c_n \in M^*$, то эти два гомоморфизма совпадают. Таким образом, равенство $f = \Phi_M(\alpha y)$ показывает, что гомоморфизм $\Phi_M\colon M \to M^{**}$ сюръективен. $\square$

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — две категории. Мы напоминаем, что функтор $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется двойственностью, если он контравариантен и существует контравариантный функтор $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, такой что композиции этих функторов изоморфны тождественным функторам, т. е. $FG \cong \mathrm{id}_\mathcal{B}$ и $GF \cong \mathrm{id}_\mathcal{A}$. В этом случае категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются двойственными.

Изоморфизм $GF \cong \mathrm{id}_\mathcal{A}$ означает, что для любого объекта A категории $\mathcal{A}$ имеется изоморфизм $\Phi_A\colon A \to GF(A)$, причём диаграммы

$$\begin{tikzcd} GF(A) \arrow[r, "GF(g)"] & GF(B) \\ A \arrow[u, "\Phi_A"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "\Phi_B"'] \end{tikzcd}$$

коммутативны для любых морфизмов $g\colon A \to B$ категории $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — это категория конечных прямых сумм локально циклических групп, а $\mathcal{B}$ — категория конечно представимых $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей. Теорема 4.1 вместе с теоремой 1.2 показывают, что $F = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(-, Q/Z)$ является контравариантным функтором из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{B}$. Этот функтор совпадает с функтором $\mathrm{Hom}(-, Q/Z)$. Теорема 4.4 вместе с теоремой 1.2 показывают, что $G = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(-, Q/Z)$ является контравариантным функтором из категории $\mathcal{B}$ в категорию $\mathcal{A}$. Теоремы 4.5 и 4.6 вместе с теоремой 1.4 показывают, что композиции FG и GF изоморфны тождественным функторам, и мы получаем главный результат этого раздела.

Теорема 4.7. *Категория конечных прямых сумм локально циклических групп является двойственной категории конечно представимых $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей.*

Если характеристика χ принадлежит нулевому типу, то она соответствует некоторому целому положительному числу n. Циклический $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль yZ_χ характеристики χ и локально циклическая группа C_χ характеристики χ изоморфны в этом случае циклической группе C_n порядка n. Более того, пересечение категории конечно представимых $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей и категории конечных прямых сумм локально циклических групп совпадает с категорией конечных групп. Ограничение двойственности теоремы 4.7 совпадает с двойственностью для конечных групп. Таким образом, двойственность теоремы 4.7 является расширением двойственности для конечных групп.

Замечание. Если бы рассматривался функтор $\mathrm{Hom}(-, Q/Z)$ вместо функтора $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(-, Q/Z)$, то теоремы 4.4—4.7 не были бы верны.

Например,

$$Q/Z \cong \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(\hat{\mathbf{Z}}, Q/Z) \subsetneqq \mathrm{Hom}(\hat{\mathbf{Z}}, Q/Z).$$

Пусть S — максимальное линейно независимое над $\mathbf{Z}$ множество в аддитивной группе кольца полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}}$. Мощность множества S равна континууму. Любая функция $S \to Q/Z$ может быть продолжена до гомоморфизма групп $\hat{\mathbf{Z}} \to Q/Z$, в то время как $\hat{\mathbf{Z}}$-модульный гомоморфизм полностью определяется своим значением на образующем элементе $1 \in \hat{\mathbf{Z}}$ в $\hat{\mathbf{Z}}$-модуле $\hat{\mathbf{Z}}$. Таким образом, $\mathrm{Hom}(\hat{\mathbf{Z}}, Q/Z)$ больше, чем $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(\hat{\mathbf{Z}}, Q/Z)$ даже по мощности.

5. Категория $\mathcal{F}$ групп без кручения конечного ранга с отмеченными базисами

Определим категорию $\mathcal{F}$. Объектами категории $\mathcal{F}$ являются пары вида $(A; a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где A — группа без кручения конечного ранга и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — её базис. Здесь под базисом понимается любая максимальная линейно независимая система элементов. В частности, число $n \geqslant 0$ совпадает с рангом группы A.

Пусть $(A; a_1, \ldots, a_n)$ и $(B; b_1, \ldots, b_k)$ — два объекта категории $\mathcal{F}$. Любой гомоморфизм групп $\varphi\colon A \to B$ однозначно определяет матрицу M_φ размера $k \times n$

с рациональными элементами, для которой выполняется матричное равенство

$$(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) = (b_1, \ldots, b_k) M_\varphi.$$

Мы определяем морфизмы категории $\mathcal{F}$ из объекта $(A; a_1, \ldots, a_n)$ в объект $(B; b_1, \ldots, b_k)$ как гомоморфизмы $\varphi\colon A \to B$, для которых матрица M_φ состоит из целых чисел.

Пусть даны два морфизма категории $\mathcal{F}$:

$$(A; a_1, a_2, \ldots, a_n) \xrightarrow{\varphi} (B; b_1, \ldots, b_k) \xrightarrow{\psi} (C; c_1, \ldots, c_m).$$

Тогда произведение гомоморфизмов $\psi\varphi\colon A \to C$ также является морфизмом категории $\mathcal{F}$, потому что матрица $M_{\psi\varphi} = M_\psi \cdot M_\varphi$ состоит из целых чисел. Мы можем видеть, что умножение морфизмов $\psi\varphi$ в категории $\mathcal{F}$ совпадает с обычным умножением гомоморфизмов. Следовательно, оно ассоциативно.

Тождественным гомоморфизмам $\mathrm{id}_A\colon A \to A$, где $\mathrm{id}_A(a) = a$, соответствуют единичные матрицы относительно любых базисов. Следовательно, они принадлежат категории $\mathcal{F}$ и играют роль тождественных морфизмов категории $\mathcal{F}$. Таким образом, $\mathcal{F}$ действительно является категорией.

Предложение 5.1. *Каждый морфизм $\varphi\colon (A; a_1, \ldots, a_n) \to (B; b_1, \ldots, b_k)$ категории $\mathcal{F}$ индуцирует гомоморфизм периодических групп $\bar{\varphi}\colon A/F \to B/G$, где $\bar{\varphi}(a+F) = \varphi(a)+G$, $a \in A$, $F = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \subset A$ и $G = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle \subset B$ являются свободными подгруппами, порождёнными соответствующими базисами.*

Доказательство. Так как матрица M_φ состоит из целых чисел, то имеет место вложение $\varphi(F) \subset G$ и гомоморфизм $\bar{\varphi}$ корректно определён. □

Предложение 5.2. *Пусть $(A; a_1, \ldots, a_n)$ — объект категории $\mathcal{F}$ и $F = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \subset A$ — свободная подгруппа, порождённая базисом $a_1, \ldots, a_n$. Тогда для любого простого числа p p-компонента $(A/F)_p$ фактор-группы A/F имеет вид*

$$(A/F)_p \cong Z(p^{m_{1p}}) \oplus Z(p^{m_{2p}}) \oplus \ldots \oplus Z(p^{m_{np}}),$$

где $0 \leqslant m_{1p} \leqslant m_{2p} \leqslant \ldots \leqslant m_{np} \leqslant \infty$ являются целыми неотрицательными числами или символами ∞. Группы $Z(p^{m_{ip}})$ являются циклическими порядка $p^{m_{ip}}$ или группами типа p^∞ соответственно.

Доказательство. Цоколь

$$(A/F)_p[p] = \{a \in (A/F)_p \mid pa = 0\}$$

является векторным пространством над полем $\mathbf{Z}_p$ из p элементов. Легко проверить, что если множество векторов $b_1 + F, \ldots, b_k + F \in (A/F)_p[p]$ является линейно независимым над полем $\mathbf{Z}_p$, то множество элементов $b_1, \ldots, b_k \in A$ является линейно независимым над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$. Следовательно, размерность r цоколя меньше либо равна рангу n группы A.

Мы имеем прямое разложение $(A/F)_p = B \oplus D$, где D — максимальная делимая подгруппа, а B — редуцированная p-группа. Все цоколи конечны: $(A/F)_p[p] = B[p] \oplus D[p]$. Делимая группа D изоморфна прямой сумме копий группы $\mathbf{Z}(p^\infty)$ в количестве, равном размерности цоколя $D[p]$. Редуцированная p-группа B имеет конечный p-базис и, как показано в [4], является прямой суммой циклических групп. Общее число слагаемых в прямом разложении группы $(A/F)_p$ равно r, и $r \leqslant n$. Если $r < n$, то мы можем добавить некоторое количество нулевых слагаемых, чтобы получить окончательный результат. $\square$

Напомним, что периодические локально циклические группы находятся во взаимно-однозначном соответствии с характеристиками. А именно, если $\chi = (m_p)$ — некоторая характеристика, то соответствующая периодическая локально циклическая группа имеет вид

$$C_\chi \cong \bigoplus_p Z(p^{m_p}) \cong R_\chi / Z,$$

где $Z \subset R_\chi \subset Q$ является подгруппой аддитивной группы рациональных чисел, для которой характеристика единицы в этой подгруппе равна χ.

Теорема 5.3. *Пусть $(A; a_1, \ldots, a_n)$ — некоторый объект категории $\mathcal{F}$ и $F = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Тогда существует последовательность характеристик $\chi_1 \leqslant \ldots \leqslant \chi_n$, такая что*

$$A/F = C_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus C_{\chi_n}.$$

Доказательство. По предложению 5.2 мы получаем, что

$$A/F = \bigoplus_p (A/F)_p \cong \bigoplus_p \left(\bigoplus_{i=1}^n Z(p^{m_{ip}}) \right) = \bigoplus_{i=1}^n \left(\bigoplus_p Z(p^{m_{ip}}) \right) \cong \bigoplus_{i=1}^n C_{\chi_i},$$

где $\chi_1 = (m_{1p}), \ldots, \chi_n = (m_{np})$. Неравенства $m_{1p} \leqslant m_{2p} \leqslant \ldots \leqslant m_{np}$ для каждого простого числа p показывают, что $\chi_1 \leqslant \ldots \leqslant \chi_n$. Некоторые характеристики могут оказаться нулевыми. $\square$

Определение. Пусть $(A; a_1, \ldots, a_n)$ — объект категории $\mathcal{F}$. Последовательность характеристик $\chi_1 \leqslant \ldots \leqslant \chi_n$, полученная в теореме 5.3, называется *обобщённой характеристикой* данного объекта. Некоторые первые характеристики в этой последовательности могут быть равны нулю. В частности, если $A = F$ — свободная группа, то $\chi_1 = \ldots = \chi_n = 0$.

Замечание. Предположим, что в группе без кручения конечного ранга выделены два различных базиса. Тогда две обобщённые характеристики $\chi_1 \leqslant \ldots \leqslant \chi_n$ и $\kappa_1 \leqslant \ldots \leqslant \kappa_n$, вообще говоря, различны. Однако они эквивалентны в том смысле, что $\chi_1 \sim \kappa_1, \ldots, \chi_n \sim \kappa_n$, т. е. соответствующие типы одинаковы

$$\sigma_1 = [\chi_1] = [\kappa_1], \ldots, \sigma_n = [\chi_n] = [\kappa_n].$$

Последовательность типов $\sigma_1 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n$ не зависит от выбора базиса. Она является инвариантом группы A и называется *типом Ричмана* группы A.

6. Основное тождество

Пусть $(A; a_1, \ldots, a_n)$ — некоторый объект категории $\mathcal{F}$. Это означает, что A является группой без кручения конечного ранга и $a_1, \ldots, a_n \in A$ — максимальное линейно независимое (над $\mathbf{Z}$) множество её элементов.

Элементы $a_1, \ldots, a_n$ порождают свободную подгруппу $F = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \subset A$ группы A. Для любого элемента $z \in A$ найдутся целые числа $m \neq 0$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{Z}$, для которых имеет место равенство

$$mz = m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n. \tag{8}$$

Соответствие

$$z \xmapsto{\lambda_A} \left(\frac{m_1}{m}, \ldots, \frac{m_n}{m}\right)$$

является правильно определённым инъективным гомоморфизмом групп $\lambda_A \colon A \to Q^n$. Ограничение гомоморфизма λ_A на подгруппу $F \subset A$ является изоморфизмом $\lambda_F \colon F \to Z^n \subset Q^n$ между группами F и Z^n. Таким образом, имеют место включения $Z^n \subset \lambda_A(A) \subset Q^n$, и мы можем видеть, что любая группа без кручения ранга n изоморфна некоторой подгруппе группы Q^n, содержащей Z^n в качестве подгруппы.

Более того, это соответствие является категорным функтором $\Lambda \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Группа $\lambda_A(A)$ с отмеченным базисом

$$\lambda_A(a_1) = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \lambda_A(a_n) = (0, \ldots, 0, 1)$$

является объектом категории $\mathcal{F}$. Мы определяем

$$\Lambda(A; a_1, \ldots, a_n) = \big(\lambda_A(A); \lambda_A(a_1), \ldots, \lambda_A(a_n)\big).$$

Пусть $f \colon (A; a_1, \ldots, a_n) \to (B; b_1, \ldots, b_k)$ — некоторый морфизм категории $\mathcal{F}$. Это означает, что $(fa_1, \ldots, fa_n) = (b_1, \ldots, b_k)M_f$ и рациональная матрица M_f состоит из целых чисел. Если $a = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n \in A$ для некоторых рациональных коэффициентов $r_1, \ldots, r_n$, то $(r_1, \ldots, r_n) \in \lambda_A(A)$. Мы определяем

$$\Lambda(f)(r_1, \ldots, r_n) = (r_1, \ldots, r_n)M_f^t,$$

это умножение справа на транспонированную матрицу M_f^t.

Матричные равенства

$$\big((r_1, \ldots, r_n)M_f^t\big)\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix} = (r_1, \ldots, r_n)\left(M_f^t \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (r_1, \ldots, r_n)\begin{pmatrix} fa_1 \\ \ldots \\ fa_n \end{pmatrix} = r_1 f(a_1) + \ldots + r_1 f(a_1) = f(a) \in B,$$

в частности, показывают, что $\Lambda(f) \colon \lambda_A(A) \to \lambda_B(B)$ является гомоморфизмом групп. Более того, этот гомоморфизм является морфизмом категории $\mathcal{F}$ с той же самой матрицей M_f.

Предложение 6.1. *Функтор* $\Lambda\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ *изоморфен тождественному функтору* $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

Доказательство. Вышеприведённые равенства также показывают, что

$$\lambda_B\big(f(a)\big) = \lambda_A(a)M_f^t = \Lambda(f)\big(\lambda_A(a)\big).$$

Это означает, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda(A; a_1, \ldots, a_n) \arrow[r, "\Lambda(f)"] & \Lambda(B; b_1, \ldots, b_k) \\
(A; a_1, \ldots, a_n) \arrow[u, "\lambda_A"] \arrow[r, "f"'] & (B; b_1, \ldots, b_k) \arrow[u, "\lambda_B"']
\end{tikzcd}.$$

Поскольку все вертикальные стрелки являются изоморфизмами категории $\mathcal{F}$, то коммутативность диаграммы для любого морфизма f означает, что функторы $\Lambda\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ и $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ изоморфны. $\square$

В частности, для $n = 1$ группы без кручения ранга 1 изоморфны подгруппам аддитивной группы рациональных чисел Q, содержащим аддитивную группу целых чисел, $Z \subset R_\chi \subset Q$. Такие подгруппы полностью описываются их характеристиками χ, введёнными Р. Бэром [7] и Ф. Леви [14]. В общем случае группы ранга 1 полностью описываются с точностью до изоморфизма бэровскими типами (см. [6, 7]). Таким образом, бэровские типы являются удовлетворительными терминами для описания групп без кручения ранга 1.

Наша главная цель в этой статье — найти некоторые термины для описания всех групп без кручения конечного ранга.

Изоморфизм $Q^n/Z^n \cong (Q/Z)^n$ достаточно очевиден. Мы рассмотрим гомоморфизм $\bar\lambda_A\colon A/F \to (Q/Z)^n$, индуцированный гомоморфизмом $\lambda_A\colon A \to Q^n$, где

$$\bar\lambda_A(\bar z) = \Big(\frac{m_1}{m} + Z, \ldots, \frac{m_n}{m} + Z\Big), \quad \bar z = z + F \in A/F$$

и элемент $z \in A$ удовлетворяет условию (8). Гомоморфизм $\bar\lambda_A$ инъективен. Композиции мономорфизма $\bar\lambda_A$ с проекциями дают нам n гомоморфизмов $a_1^\circ\colon A/F \to Q/Z, \ldots, a_n^\circ\colon A/F \to Q/Z$, таких что

$$a_1^\circ(\bar z) = \frac{m_1}{m} + Z, \ldots,\ a_n^\circ(\bar z) = \frac{m_n}{m} + Z.$$

Группа A содержится в своей делимой оболочке $V = Qa_1 \oplus \ldots \oplus Qa_n$, которую также можно рассматривать как векторное пространство размерности n над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Элементы $a_1, \ldots, a_n$ образуют базис этого векторного пространства.

Пусть элемент $z \in A$ удовлетворяет равенству (8). Элементы $\frac{m_1}{m}a_1, \ldots, \frac{m_n}{m}a_n$ группы V не обязательно принадлежат группе A. Подмножества

$$a_1^\circ(\bar z)a_1 = \Big\{\Big(\frac{m_1}{m} + k\Big)\, a_1 \;\Big|\; k \in Z\Big\}, \ldots,\ a_n^\circ(\bar z)a_n = \Big\{\Big(\frac{m_n}{m} + k\Big)\, a_n \;\Big|\; k \in Z\Big\} \subset V$$

в группе V также не обязательно содержатся в группе A в общем случае, однако множество $a_1^\circ(\bar z)a_1+\ldots+a_n^\circ(\bar z)a_n$ содержится в группе A. Более того, эта сумма множеств совпадает с множеством

$$\bar z = z + F = \left\{\frac{m_1a_1+\ldots+m_na_n}{m} + k_1a_1+\ldots+k_na_n \mid k_1,\ldots,k_n \in \mathbf{Z}\right\} \subset A.$$

Таким образом, мы получаем следующее равенство двух множеств:

$$\bar z = a_1^\circ(\bar z)a_1+\ldots+a_n^\circ(\bar z)a_n. \tag{9}$$

Мы будем называть его *основным тождеством* группы A или, более точно, объекта $(A; a_1,\ldots,a_n)$ категории $\mathcal{F}$. Мы можем сказать, что основное тождество определяет n гомоморфизмов $a_1^\circ,\ldots,a_n^\circ$ из группы A/F в группу Q/Z, т. е. n элементов $a_1^\circ,\ldots,a_n^\circ$ модуля $(A/F)^*$ над кольцом полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}}$.

Теорема 6.2. *Коэффициенты $a_1^\circ,\ldots,a_n^\circ$ основного тождества* (9) *порождают $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль $(A/F)^*$, т. е. $(A/F)^* = \langle a_1^\circ,\ldots,a_n^\circ\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$.*

Доказательство. Периодическая группа A/F раскладывается в прямую сумму $A/F = C_{\chi_1}\oplus\ldots\oplus C_{\chi_n}$ периодических локально циклических групп по теореме 5.3, где последовательность характеристик $\chi_1\leqslant\ldots\leqslant\chi_n$ является обобщённой характеристикой нашего объекта $(A; a_1,\ldots,a_n)$ категории $\mathcal{F}$. Конечно представимый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль $M = (A/F)^* = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(A/F, Q/Z)$ имеет вид $M\cong Z_{\chi_1}\oplus\ldots\oplus Z_{\chi_n}$ по теоремам 4.1 и 1.2.

Пусть $N = \langle a_1^\circ,\ldots,a_n^\circ\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}\subset M$ обозначает $\hat{\mathbf{Z}}$-подмодуль, порождённый коэффициентами $a_1^\circ,\ldots,a_n^\circ$ основного тождества (9). Как мы знаем [10], оба модуля N и M/N являются конечно представимыми $\hat{\mathbf{Z}}$-модулями. Композиция канонического гомоморфизма $M\to M/N$ и любого ненулевого гомоморфизма $M/N\to Q/Z$ является ненулевым гомоморфизмом $M\to Q/Z$. Таким образом, предполагая, что модуль M не совпадает с модулем N, т. е. $M/N\neq 0$, мы можем найти некоторый ненулевой $\hat{\mathbf{Z}}$-модульный гомоморфизм $f\colon M\to Q/Z$, удовлетворяющий условиям $f(a_1^\circ)=0,\ldots,\ f(a_n^\circ)=0$.

Так как гомоморфизм $\Phi_{A/F}\colon A/F\to (A/F)^{**} = M^*$ является изоморфизмом по теореме 4.7, то существует ненулевой элемент $0\neq\bar b = b+F\in A/F$, такой что $\Phi_{A/F}(\bar b) = f\in M^*$. Имеем

$$0 = f(a_i^\circ) = \Phi_{A/F}(\bar b)(a_i^\circ) = a_i^\circ(\bar b)$$

для всех $i = 1,\ldots,n$. Таким образом, мы получаем, что элемент $b\in A$ вида $b = \frac{m_1a_1+\ldots+m_na_n}{m}$ не принадлежит свободной подгруппе $F = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$, в то время как все рациональные числа $\frac{m_1}{m},\ldots,\frac{m_n}{m}$ являются целыми. Это противоречие показывает, что $M = N = \langle a_1^\circ,\ldots,a_n^\circ\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$. □

7. Основная двойственность

Рассмотрим категорию $\mathcal{S}$ конечных последовательностей элементов конечно представимых модулей над кольцом полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}}$.

Объектами категории $\mathcal{S}$ являются конечные последовательности вида $u_1, \ldots, u_n \in U$, где U — некоторый конечно представимый модуль над кольцом $\hat{\mathbf{Z}}$. В последовательности $u_1, \ldots, u_n$ возможны повторения; перестановка элементов в последовательности $u_1, \ldots, u_n$ даёт нам, вообще говоря, другой объект.

Пусть $u_1, \ldots, u_n \in U$ и $v_1, \ldots, v_k \in V$ — два объекта категории $\mathcal{S}$. Подмодули, порождённые этими элементами, $U_1 = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}} \subset U$ и $V_1 = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}} \subset V$ сами являются конечно представимыми $\hat{\mathbf{Z}}$-модулями согласно [10]. Морфизмы из объекта $u_1, \ldots, u_n$ в объект $v_1, \ldots, v_k$ определяются как пары (φ, M), где $\varphi\colon U_1 \to V_1$ является $\hat{\mathbf{Z}}$-модульным гомоморфизмом, $M \in \mathbf{Z}^{k\times n}$ является целочисленной матрицей размера $k \times n$ и при этом выполняется матричное равенство

$$(\varphi u_1, \ldots, \varphi u_n) = (v_1, \ldots, v_k)M.$$

Пусть даны два морфизма

$$u_1, \ldots, u_n \xrightarrow{(\varphi,M)} v_1, \ldots, v_k \xrightarrow{(\psi,N)} w_1, \ldots, w_m.$$

Композиция этих морфизмов определяется следующим образом: $(\psi, N)(\varphi, M) = (\psi\varphi, NM)$. Тождественный морфизм объекта состоит из тождественного гомоморфизма и единичной матрицы.

Пример 7.1. Последовательность $0, \ldots, 0$, состоящая из n нулей, является объектом категории $\mathcal{S}$. Морфизмы из этого объекта в себя отождествляются с целочисленными матрицами размера $n \times n$.

7.1. Контравариантный функтор $\Delta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{S}$

Пусть $(A; a_1, \ldots, a_n)$ — объект категории $\mathcal{F}$. Это означает, что A является группой без кручения ранга n и $a_1, \ldots, a_n$ является максимальным линейно независимым множеством элементов группы A. Как и раньше, обозначим через $F = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \subset A$ свободную подгруппу, порождённую базисом $a_1, \ldots, a_n$. Фактор-группа A/F раскладывается в прямую сумму локально циклических групп $A/F = C_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus C_{\chi_n}$, где $\chi_1 \leqslant \ldots \leqslant \chi_n$ — обобщённая характеристика этого объекта (теорема 5.3).

Пусть $z \in A$. Основное тождество (9)

$$\bar{z} = a_1^\circ(\bar{z})a_1 + \ldots + a_n^\circ(\bar{z})a_n$$

определяет n гомоморфизмов

$$a_1^\circ, \ldots, a_n^\circ \in (A/F)^* = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(A/F, Q/Z).$$

$\hat{\mathbf{Z}}$-модуль $(A/F)^*$ является конечно представимым и имеет вид $(A/F)^* \cong Z_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus Z_{\chi_n}$ по теореме 4.7. Элементы $a_1^\circ, \ldots, a_n^\circ$ порождают этот модуль по теореме 6.2, т. е. $(A/F)^* = \langle a_1^\circ, \ldots, a_n^\circ \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$. Таким образом, последовательность $a_1^\circ, \ldots, a_n^\circ$ является объектом категории $\mathcal{S}$.

Определение. Мы определяем $\Delta(A; a_1, \ldots, a_n) = (a_1^\circ, \ldots, a_n^\circ)$.

Рассмотрим в категории $\mathcal{F}$ какой-либо морфизм f из объекта $(A; a_1, \ldots, a_n)$ в объект $(B; b_1, \ldots, b_k)$. Это означает, что $f\colon A \to B$ является гомоморфизмом групп, а матрица M_f, определяемая матричным равенством $(fa_1, \ldots, fa_n) = (b_1, \ldots, b_k)M_f$, состоит из целых чисел.

Обозначая $G = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle \subset B$, мы получаем индуцированный гомоморфизм $\bar{f}\colon A/F \to B/G$ согласно предложению 5.1, где $\bar{f}(z + F) = f(z) + G$, $z \in A$. Групповой гомоморфизм $\bar{f}\colon A/F \to B/G$ является также $\hat{\mathbf{Z}}$-модульным гомоморфизмом, так как группы периодические, и мы можем применить к нему контравариантный функтор $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(-, Q/Z)$. Применяя этот функтор, мы получаем $\hat{\mathbf{Z}}$-модульный гомоморфизм $(\bar{f})^*\colon (B/G)^* \to (A/F)^*$.

Теперь мы применим гомоморфизм $f\colon A \to B$ к основному тождеству (9) нашего объекта $(A; a_1, \ldots, a_n)$, $z \in A$:

$$f(z) + f(F) = a_1^\circ(\bar{z})f(a_1) + \ldots + a_n^\circ(\bar{z})f(a_n) = \big(f(a_1), \ldots, f(a_n)\big)\begin{pmatrix} a_1^\circ(\bar{z}) \\ \ldots \\ a_1^\circ(\bar{z}) \end{pmatrix}.$$

Далее мы имеем

$$\bar{f}(\bar{z}) = \overline{f(z)} = \big((b_1, \ldots, b_k)M_f\big)\begin{pmatrix} a_1^\circ(\bar{z}) \\ \ldots \\ a_1^\circ(\bar{z}) \end{pmatrix} + G = (b_1, \ldots, b_k)\left(M_f \begin{pmatrix} a_1^\circ(\bar{z}) \\ \ldots \\ a_1^\circ(\bar{z}) \end{pmatrix}\right).$$

С другой стороны, основное тождество объекта $(B; b_1, \ldots, b_k)$ выглядит для элементов $\bar{f}(\bar{z})$ следующим образом:

$$\bar{f}(\bar{z}) = b_1^\circ\big(\bar{f}(\bar{z})\big)b_1 + \ldots + b_k^\circ\big(\bar{f}(\bar{z})\big)b_k = (b_1, \ldots, b_k)\begin{pmatrix} b_1^\circ\big(\bar{f}(\bar{z})\big) \\ \ldots \\ b_k^\circ\big(\bar{f}(\bar{z})\big) \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем заключить, что имеет место матричное равенство

$$\begin{pmatrix} b_1^\circ\big(\bar{f}(\bar{z})\big) \\ \ldots \\ b_k^\circ\big(\bar{f}(\bar{z})\big) \end{pmatrix} = M_f \begin{pmatrix} a_1^\circ(\bar{z}) \\ \ldots \\ a_1^\circ(\bar{z}) \end{pmatrix}$$

для всех $\bar{z} \in A/F$. По определению (1) дуального гомоморфизма

$$(\bar{f})^*\colon (B/G)^* \to (A/F)^*$$

мы имеем $\big((\bar{f})^*(b_i^\circ)\big)(\bar{z}) = b_i^\circ\big(\bar{f}(\bar{z})\big)$ для всех $\bar{z} \in A/F$ и для всех $i = 1, \ldots, k$.

Транспонируя последнее матричное равенство, мы окончательно получаем следующее матричное равенство:

$$\big((\bar{f})^*(b_1^\circ), \ldots, (\bar{f})^*(b_k^\circ)\big) = (a_1^\circ, \ldots, a_n^\circ)M_f^t,$$

где M_f^t — матрица, транспонированная к матрице M_f, которая тоже состоит из целых чисел. Таким образом, пара $\big((\bar{f})^*, M_f^t\big)$ является морфизмом категории $\mathcal{S}$ из объекта $\Delta(B; b_1, \ldots, b_k) = (b_1^\circ, \ldots, b_k^\circ)$ в объект $\Delta(A; a_1, \ldots, a_n) = (a_1^\circ, \ldots, a_n^\circ)$.

Определение. Пусть $f\colon (A; a_1, \dots, a_n) \to (B; b_1, \dots, b_k)$ — морфизм категории $\mathcal{F}$. Мы определяем морфизм $\Delta(f)$ категории $\mathcal{S}$ как пару

$$\Delta(f) = \big((\bar{f})^*, M_f^t\big)\colon (b_1^\circ, \dots, b_k^\circ) \to (a_1^\circ, \dots, a_n^\circ).$$

Предложение 7.1. *$\Delta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ является контравариантным функтором.*

Доказательство. Пусть даны два морфизма категории $\mathcal{F}$

$$(A; a_1, \dots, a_n) \xrightarrow{f} (B; b_1, \dots, b_k) \xrightarrow{g} (C; c_1, \dots, c_m).$$

Тогда $gf\colon (A; a_1, \dots, a_n) \to (C; c_1, \dots, c_m)$ является произведением этих морфизмов. По определению Δ мы имеем

$$\Delta(gf) = \big((\bar{gf})^*, (M_{gf})^t\big) = \big((\bar{g}\bar{f})^*, (M_g M_f)^t\big) =$$
$$= \big((\bar{f})^*(\bar{g})^*, M_f^t M_g^t\big) = \big((\bar{f})^*, M_f^t\big)\big((\bar{g})^*, M_g^t\big) = \Delta(f)\Delta(g).$$

Также легко заметить, что функтор Δ отображает тождественные морфизмы категории $\mathcal{F}$ в тождественные морфизмы категории $\mathcal{S}$. $\square$

7.2. Контравариантный функтор $\Theta\colon \mathcal{S} \to \mathcal{F}$

Пусть $u_1, \dots, u_n$ — объект категории $\mathcal{S}$. Это означает, что $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль $U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$ является конечно представимым. Следовательно, $U \cong Z_{\chi_1} \oplus \dots \oplus Z_{\chi_n}$ для некоторой последовательности характеристик $\chi_1 \leqslant \dots \leqslant \chi_n$.

$\hat{\mathbf{Z}}$-модуль $U^* = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(U, Q/Z)$ является конечной прямой суммой локально циклических групп по теореме 4.7. Более того, $U^* = C_{\chi_1} \oplus \dots \oplus C_{\chi_n}$ для той же самой последовательности характеристик $\chi_1 \leqslant \dots \leqslant \chi_n$ по теореме 4.4.

Рассмотрим гомоморфизм $\omega_U\colon U^* \to (Q/Z)^n$, определённый следующим образом:

$$\omega_U(\varphi) = \big(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)\big) \in (Q/Z)^n$$

для любого $\varphi \in U^*$. Заметим, что если $\varphi(u_1) = \dots = \varphi(u_n) = 0$, то $\varphi = 0$, потому что элементы $u_1, \dots, u_n$ порождают весь модуль U. Отсюда следует, что ω_U является вложением группы $U^* = C_{\chi_1} \oplus \dots \oplus C_{\chi_n}$ в группу $(Q/Z)^n$.

Определение. Мы определяем объект $\Theta(u_1, \dots, u_n)$ категории $\mathcal{F}$ как подгруппу группы Q^n, которая состоит из всех элементов $(r_1, \dots, r_n) \in Q^n$, таких что элементы $(r_1 + Z, \dots, r_n + Z) \in (Q/Z)^n$ принадлежат образу гомоморфизма ω_U, т. е.

$$\Theta(u_1, \dots, u_n) = \{(r_1, \dots, r_n) \in Q^n \mid (r_1 + Z, \dots, r_n + Z) \in \mathrm{Im}(\omega_U)\}.$$

Естественный базис $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ пространства Q^n является отмеченным базисом объекта $\Theta(u_1, \dots, u_n)$ категории $\mathcal{F}$.

Ясно, что обобщённая характеристика объекта $\Theta(u_1, \dots, u_n)$ совпадает с последовательностью характеристик $\chi_1 \leqslant \dots \leqslant \chi_n$, определённой конечно представимым модулем $U \cong Z_{\chi_1} \oplus \dots \oplus Z_{\chi_n}$.

Пусть $v_1, \dots, v_k$ — ещё один объект категории $\mathcal{S}$ и пара

$$(f, T)\colon (v_1, \dots, v_k) \to (u_1, \dots, u_n)$$

является морфизмом категории $\mathcal{S}$. Это означает, что $f\colon V \to U$ является $\hat{\mathbf{Z}}$-модульным гомоморфизмом, где $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$, $T \in Z^{n \times k}$ является целочисленной матрицей размера $n \times k$ и выполняется матричное равенство $(fv_1, \dots, fv_k) = (u_1, \dots, u_n)T$.

Применяя контравариантный функтор $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(-, Q/Z)$ к гомоморфизму $f\colon V \to U$, мы получаем дуальный гомоморфизм $f^*\colon U^* \to V^*$, при котором $f^*(\varphi)(v) = \varphi\big(f(v)\big)$ для любого гомоморфизма $\varphi\colon U \to Q/Z$, т. е. $\varphi \in U^*$, и для любого $v \in V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$.

Из равенства $(fv_1, \dots, fv_k) = (u_1, \dots, u_n)T$ следует, что

$$\big(\varphi(fv_1), \dots, \varphi(fv_k)\big) = (\varphi u_1, \dots, \varphi u_n)T$$

для любого гомоморфизма $\varphi\colon U \to Q/Z$. Отсюда мы получаем равенство $\big(f^*(\varphi)(v_1), \dots, f^*(\varphi)(v_k)\big) = (\varphi u_1, \dots, \varphi u_n)T$ для любого $\varphi \in U^*$, которое показывает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} U^* & \xrightarrow{\;f^*\;} & V^* \\ {\scriptstyle \omega_U}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \omega_V} \\ (Q/Z)^n & \xrightarrow[\;\bar{h}\;]{} & (Q/Z)^k \end{array}, \qquad (10)$$

где нижний гомоморфизм $\bar{h}\colon (Q/Z)^n \to (Q/Z)^k$ представляет собой умножение справа на матрицу T, т. е. $\bar{h}(r_1+Z, \dots, r_n+Z) = (r_1+Z, \dots, r_n+Z)T \in (Q/Z)^k$.

Предположим, что рациональный вектор $(r_1, \dots, r_n) \in Q^n$ принадлежит группе $\Theta(u_1, \dots, u_n)$, т. е. $(r_1 + Z, \dots, r_n + Z) \in \mathrm{Im}(\omega_U)$. Тогда рациональный вектор $(r_1, \dots, r_n)T \in Q^k$ принадлежит группе $\Theta(v_1, \dots, v_k)$, поскольку диаграмма (10) коммутативна. Следовательно, гомоморфизм

$$h\colon \Theta(u_1, \dots, u_n) \to \Theta(v_1, \dots, v_k),$$

где $h(r_1, \dots, r_n) = (r_1, \dots, r_n)T$, правильно определён. Более того, для отмеченных базисов имеет место равенство

$$\big(h(a_1), \dots, h(a_n)\big) = (b_1, \dots, b_k)T^t, \qquad (11)$$

где T^t — транспонированная матрица,

$$a_1 = (1, 0, \dots, 0), \ \dots, \ a_n = (0, \dots, 0, 1) \in \Theta(u_1, \dots, u_n)$$

и

$$b_1 = (1, 0, \dots, 0), \ \dots, \ b_k = (0, \dots, 0, 1) \in \Theta(v_1, \dots, v_k) \,—$$

отмеченные базисы. Таким образом, гомоморфизм h является морфизмом категории $\mathcal{F}$.

Определение. Мы определяем морфизм $\Theta(f, T) = h$ в категории $\mathcal{F}$. Он представляет собой умножение справа на матрицу T.

Предложение 7.2. $\Theta\colon \mathcal{S} \to \mathcal{F}$ *является контравариантным функтором.*

Доказательство. Предположим, что мы имеем два морфизма в категории $\mathcal{S}$:

$$(w_1, \ldots, w_m) \xrightarrow{(g,S)} (v_1, \ldots, v_k) \xrightarrow{(f,T)} (u_1, \ldots, u_n).$$

Тогда морфизм $(fg, TS)\colon (w_1, \ldots, w_m) \to (u_1, \ldots, u_n)$ является произведением $(f, T)(g, S)$ этих морфизмов. По определению образа этого морфизма мы получаем

$$\begin{aligned}\Theta\bigl((f,T)(g,S)\bigr)&(r_1, \ldots, r_n) = (r_1, \ldots, r_n)(TS) = \\ &= \bigl((r_1, \ldots, r_n)T\bigr)S = \bigl(\Theta(f,T)(r_1, \ldots, r_n)\bigr)S = \\ &= \Theta(g,S)\bigl(\Theta(f,T)(r_1, \ldots, r_n)\bigr) = \bigl(\Theta(g,S)\Theta(f,T)\bigr)(r_1, \ldots, r_n).\end{aligned}$$

Следовательно, $\Theta\bigl((f,T)(g,S)\bigr) = \Theta(g,S)\Theta(f,T)$.

Также легко убедиться, что функтор Θ отображает тождественные морфизмы категории $\mathcal{S}$ в тождественные морфизмы категории $\mathcal{F}$. $\square$

7.3. Основная двойственность

Теорема 7.3. *Контравариантные функторы $\Delta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ и $\Theta\colon \mathcal{S} \to \mathcal{F}$ являются взаимно-обратными двойственностями, т. е. категории $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}$ являются двойственными.*

Доказательство. Нам нужно только доказать, что композиции наших функторов $\Delta\Theta$ и $\Theta\Delta$ изоморфны тождественным функторам, а именно $\Delta\Theta \cong \mathrm{id}_S$ и $\Theta\Delta \cong \mathrm{id}_F$.

Сначала мы рассмотрим функтор $\Delta\Theta\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Пусть

$$(f, T)\colon (v_1, \ldots, v_k) \to (u_1, \ldots, u_n) —$$

морфизм категории $\mathcal{S}$. Отождествляя $\omega_U(\varphi) = \varphi$ вдоль мономорфизма $\omega_U\colon U^* \to (Q/Z)^n$, мы получаем, что основное тождество для объекта $\Theta(u_1, \ldots, u_n)$ выглядит следующим образом:

$$\varphi = (\varphi u_1)a_1 + \ldots + (\varphi u_n)a_n,$$

где $a_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, a_n = (0, \ldots, 0, 1)$ — базис нашего объекта и соответствующего рационального векторного пространства Q^n. Согласно равенству (2), которое определяет $\hat{\mathbf{Z}}$-модульный гомоморфизм $\Phi_U\colon U \to U^{**}$, мы имеем $\Phi_U(u_i)(\varphi) = \varphi u_i$ для любого $\varphi \in U^*$ и для любого $i = 1, \ldots, n$. Поэтому основное тождество может быть переписано в виде

$$\varphi = \Phi_U(u_1)(\varphi)a_1 + \ldots + \Phi_U(u_n)(\varphi)a_n.$$

По определению функтора Δ мы получаем, что

$$\Delta\bigl(\Theta(u_1, \ldots, u_n)\bigr) = \bigl(\Phi_U(u_1), \ldots, \Phi_U(u_n)\bigr),$$

где $\Phi_U(u_1),\ldots,\Phi_U(u_n)$ являются элементами конечно представимого $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля U^{**}, который изоморфен модулю U по теореме 4.6.

Аналогично для второго объекта

$$\Delta\bigl(\Theta(v_1,\ldots,v_k)\bigr)=\bigl(\Phi_V(v_1),\ldots,\Phi_V(v_k)\bigr).$$

Морфизм $h=\Theta(f,T)\colon \Theta(u_1,\ldots,u_n)\to\Theta(v_1,\ldots,v_k)$ является умножением справа на матрицу T. Диаграмма (10) показывает, что $\bar{h}=f^*$ при нашем отождествлении $\omega_U(\varphi)=\varphi$ и $\omega_V(\psi)=\psi$. Равенство (11) показывает, что $M_h=T^t$. Применяя функтор Δ к морфизму h, мы получаем $\Delta(h)=(f^{**},(T^t)^t)$. Таким образом,

$$\Delta\bigl(\Theta(f,T)\bigr)=(f^{**},T).$$

По теореме 1.4 диаграмма

$$\begin{tikzcd} V^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & U^{**} \\ V \arrow[u, "\Phi_V"] \arrow[r, "f"'] & U \arrow[u, "\Phi_U"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна. Пусть I_n и I_k обозначают единичные матрицы размера $n\times n$ и $k\times k$ соответственно. Из того что Φ_U и Φ_V являются $\hat{\mathbf{Z}}$-модульными изоморфизмами по теореме 4.6, следует, что морфизмы

$$(\Phi_U,I_n)\colon (u_1,\ldots,u_n)\to\bigl(\Phi_U(u_1),\ldots,\Phi_U(u_n)\bigr)$$

и

$$(\Phi_V,I_k)\colon (v_1,\ldots,v_k)\to\bigl(\Phi_V(v_1),\ldots,\Phi_V(v_k)\bigr)$$

являются также изоморфизмами категории $\mathcal{S}$. Мы получаем окончательно коммутативную диаграмму в категории $\mathcal{S}$

$$\begin{tikzcd} \Phi_V(v_1),\ldots,\Phi_V(v_k) \arrow[r, "(f^{**},T)"] & \Phi_U(u_1),\ldots,\Phi_U(u_n) \\ v_1,\ldots,v_k \arrow[u, "(\Phi_V,I_k)"] \arrow[r, "(f,T)"'] & u_1,\ldots,u_n \arrow[u, "(\Phi_U,I_n)"'] \end{tikzcd},$$

которая показывает, что $\Delta\Theta\cong\mathrm{id}_{\mathcal{S}}$.

Теперь мы рассмотрим функтор $\Theta\Delta\colon\mathcal{F}\to\mathcal{F}$. Пусть $(A;a_1,\ldots,a_n)$ — объект категории $\mathcal{F}$. Тогда

$$\Delta(A;a_1,\ldots,a_n)=a_1^\circ,\ldots,a_n^\circ\in\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{Z}}}(A/F,Q/Z)=(A/F)^*,$$

где F — свободная подгруппа, порождённая базисом $a_1,\ldots,a_n$, и $a_1^\circ,\ldots,a_n^\circ$ — коэффициенты основного тождества (9)

$$\bar{z}=a_1^\circ(\bar{z})a_1+\ldots+a_n^\circ(\bar{z})a_n.$$

По теореме 4.5 мы имеем изоморфизм $\Phi_{A/F}\colon A/F \to (A/F)^{**}$, где $\Phi_{A/F}(\bar z)(\varphi) = \varphi(\bar z)$ для любого $\varphi \in (A/F)^*$ и для любого $\bar z \in A/F$. По определению функтора Θ любой элемент вида $\Phi_{A/F}(\bar z)$ группы $(A/F)^{**}$ определяет элемент группы $(Q/F)^n$

$$\omega\bigl(\Phi_{A/F}(\bar z)\bigr) = \bigl(\Phi_{A/F}(\bar z)(a_1^\circ), \ldots, \Phi_{A/F}(\bar z)(a_n^\circ)\bigr) = \bigl(a_1^\circ(\bar z), \ldots, a_n^\circ(\bar z)\bigr).$$

Мы можем видеть, что композиция функторов $\Theta\Delta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ совпадает на объектах с функтором $\Lambda\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, определённым в предыдущем разделе.

Если матрица M_f соответствует морфизму f категории $\mathcal{F}$, то $\Delta(f) = \bigl((\bar f)^*, M_f^t\bigr)$ и морфизм $\Theta\bigl(\Delta(f)\bigr)$ является умножением справа на матрицу M_f^t. Мы можем видеть, что композиция функторов $\Theta\Delta$ совпадает с функтором Λ также и на морфизмах.

Таким образом, $\Theta\Delta = \Lambda$, и этот функтор изоморфен тождественному функтору $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ по предложению 6.1. Теорема полностью доказана. $\square$

Литература

[1] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[2] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

[3] Мальцев А. И. Абелевы группы конечного ранга без кручения // Матем. сб. — 1938. — Т. 4, № 1. — С. 45—68.

[4] Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. 1 // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 153—167.

[5] Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. 2 // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 5. — С. 157—196.

[6] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974, 1977.

[7] Baer R. Abelian groups without elements of finite order // Duke Math. J. — 1937. — Vol. 3. — P. 68—122.

[8] Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion Free Groups of Rank Two. — 1961. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 38).

[9] Derry D. Über eine Klasse von abelschen Gruppen // Proc. London Math. Soc. — 1938. — Vol. s2-43. — P. 490—506.

[10] Fomin A. A. Finitely presented modules over the ring of universal numbers // Abelian Group Theory and Related Topics. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 171). — P. 109—120.

[11] Fomin A. Invariants for Abelian groups and dual exact sequences // J. Algebra — 2009. — Vol. 322, no. 7. — P. 2544—2565.

[12] Fomin A. A., Wickless W. J. Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126, no. 1. — P. 45—52.

[13] Kurosh A. G. Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen von endlichen Range // Ann. Math. — 1937. — Vol. 38. — P. 175—203.

[14] Levi F. Abelsche Gruppen mit abzahlbaren Elementen. — Leipzig: Habilitationsschrift, 1917.

[15] Pontryagin L. S. The theory of topological commutative groups // Ann. Math. — 1934. — Vol. 13. — P. 361—388.