Об элементарной и геометрической эквивалентности эквациональных кообластей

А. Н. ШЕВЛЯКОВ
Институт математики им. С. Л. Соболева
e-mail: a_shevl@mail.ru

УДК 510.67

Ключевые слова: универсальная алгебраическая геометрия, q_ω-компактность, эквациональные кообласти.

Аннотация

Доказывается, что класс эквациональных кообластей не замкнут относительно элементарной и геометрической эквивалентности. Будут построены решающие эту проблему примеры алгебраических систем в предикатных и функциональных языках.

Abstract

A. N. Shevlyakov, On elementary and geometric equivalence of equational co-domains, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 229—238.

We prove that the class of equational co-domains is not closed under elementary and geometric equivalence. We find corresponding counter-examples in predicate and functional languages.

1. Введение

Наша работа посвящена решению следующей проблемы, поставленной в работе Э. Ю. Данияровой, А. Г. Мясникова, В. Н. Ремесленникова [1]: верно ли, что в некотором языке $\mathcal{L}$ класс эквациональных кообластей не является замкнутым относительно элементарной эквивалентности.

Иными словами, ниже будет построена пара элементарно эквивалентных друг другу алгебраических систем (алгебр) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ некоторого языка $\mathcal{L}$, таких что $\mathcal{A}$ не является эквациональной кообластью, а алгебра $\mathcal{B}$ — эквациональная кообласть (в окончательном виде этот результат сформулирован в следствии 3.6). Наиболее простым языком, в котором указанная выше проблема имеет положительное решение, является язык $\mathcal{L}_p$, состоящий из счётного числа унарных предикатных символов (см. раздел 3). Как будет показано в работе, существование указанной выше пары алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ будет следовать из положительного решения более общей проблемы.

Проблема. Существует ли алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_p$, такая что $\mathbf{ucl}(A) = \mathbf{qvar}(A)$, но $\mathcal{A}$ не является эквациональной кообластью.

Наши результаты можно усилить: с использованием следствия 3.6 и леммы 3.7 в [1] будет доказано, что класс эквациональных кообластей не замкнут относительно суммы элементарной и геометрической эквивалентности. Иными словами, указанные выше алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ элементарно и геометрически эквивалентны, но ровно одна из них является эквациональной кообластью (см. следствие 3.8).

Все упомянутые выше проблемы универсальной алгебраической геометрии могут быть решены и для алгебраических систем функциональных языков. В разделе 4 мы для каждой алгебры $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_p$ построим алгебру $F(\mathcal{A})$ функционального языка $\mathcal{L}_f$, состоящего из счётного числа унарных функциональных символов (алгебраические системы таких языков называются унарами или уноидами). Определения унарных функций на $F(\mathcal{A})$ будут моделировать области истинности предикатов на алгебре $\mathcal{A}$, и поэтому алгебры $\mathcal{A}$ и $F(\mathcal{A})$ будут обладать схожими алгебраическими геометриями. Соответствие $\mathcal{A} \to F(\mathcal{A})$ позволяет для функциональных языков решить многие проблемы универсальной алгебраической геометрии, которые допускают простое решение в предикатном языке $\mathcal{L}_p$. Например, в нашей работе все результаты об эквациональных кообластях языка $\mathcal{L}_p$ будут продублированы в разделе 4 для алгебр функциональных языков.

2. Основные определения

Следуя [2], дадим основные определения универсальной алгебраической геометрии. Пусть $\mathcal{L}$ — язык и $\mathcal{A}$ — алгебраическая система языка $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-алгебра). В данной работе мы будем рассматривать алгебры следующих двух языков:

$$\mathcal{L}_p = \{P_i^{(1)} \mid i \in I\}, \quad \mathcal{L}_f = \{f_i^{(1)} \mid i \in I\} \cup \{0\};$$

язык $\mathcal{L}_p$ состоит из одноместных (унарных) предикатных символов, а язык $\mathcal{L}_f$ состоит из унарных функциональных символов и константного символа 0.

Согласно теории моделей *термом языка* $\mathcal{L}$ от переменных

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

является любая суперпозиция переменных из множества X, константных и функциональных символов языка $\mathcal{L}$. Например, термом в языке $\mathcal{L}_p$ от переменных X являются лишь сами переменные x_i. Примерами термов языка $\mathcal{L}_f$ могут служить следующие выражения: 0, x_i, $f_i(x_j)$, $f_i(f_j(x_k))$.

Уравнением языка $\mathcal{L}$ называется произвольная атомарная формула языка $\mathcal{L}$ (далее понятия «уравнение» и «атомарная формула» употребляются как синонимы). Например, уравнениями над языком $\mathcal{L}_p$ являются выражения вида $x_i = x_j$, $P_k(x_j)$ ($x_i, x_j \in X$, $k \in I$). Уравнениями в языке $\mathcal{L}_f$ являются только равенства двух термов.

Произвольная совокупность уравнений над $\mathcal{L}$ называется *системой уравнений*. Естественным образом для системы уравнений $\mathbf{S}$ определяется её множество решений $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S})$ в алгебре $\mathcal{A}$. Множество $Y \subseteq \mathcal{A}^n$ называется *алгебраическим над* $\mathcal{A}$, если существует система уравнений над $\mathcal{L}$ с множеством решений Y. Непустое алгебраическое множество Y называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде конечного объединения его собственных алгебраических подмножеств. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *эквациональной кообластью*, если над ней все непустые алгебраические множества неприводимы.

Универсальной формулой называется формула языка $\mathcal{L}$, эквивалентная выражению

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \ \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где φ — бескванторная формула. Универсальная формула называется *квазитождеством*, если подформула φ эквивалентна выражению

$$\mathbf{S}(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \mathbf{eq}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $\mathbf{eq}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — атомарная формула (уравнение) и $\mathbf{S}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — конъюнкция атомарных формул (система уравнений).

Квазимногообразие $\mathbf{qvar}(\mathcal{A})$ *(универсальное замыкание* $\mathbf{ucl}(\mathcal{A})$*), порождённое алгебраической системой* $\mathcal{A}$ *языка* $\mathcal{L}$ — это класс всех алгебр $\mathcal{B}$ языка $\mathcal{L}$, таких что на $\mathcal{B}$ истинно любое квазитождество (универсальная формула), истинное на алгебре $\mathcal{A}$.

Поскольку любое квазитождество является универсальной формулой, то имеем включение классов $\mathbf{ucl}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{qvar}(\mathcal{A})$.

Кроме того, нам понадобятся определения следующих классов алгебраических систем языка $\mathcal{L}$, введённые в [2].

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ называется $\mathbf{q}_\omega$*-компактной*, если для любой системы $\mathbf{S}$ и уравнения $\mathbf{eq}(X)$, такого что

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}\big(\mathbf{eq}(X)\big), \tag{1}$$

существует конечная подсистема $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ со свойством

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}') \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}\big(\mathbf{eq}(X)\big). \tag{2}$$

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ называется $\mathbf{u}_\omega$*-компактной*, если для любой системы $\mathbf{S}$ и уравнений $\{\mathbf{eq}_i(X) \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$, таких что

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}\big(\mathbf{eq}_i(X)\big),$$

существует конечная подсистема $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ со свойством

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}') \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}\big(\mathbf{eq}_i(X)\big).$$

Как следует из определений, любая $\mathbf{u}_\omega$-компактная алгебраическая система является $\mathbf{q}_\omega$-компактной.

Две $\mathcal{L}$-алгебры называются *геометрически эквивалентными*, если для любой системы $\mathbf{S}$ и уравнения $\mathbf{eq}(X)$ выполнено

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}\big(\mathbf{eq}(X)\big) \Longleftrightarrow \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{B}}\big(\mathbf{eq}(X)\big).$$

3. Предикатный язык

Напомним, что ниже будет построен пример алгебраической системы $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_p$ со свойствами

1) $\mathbf{ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{qvar}(\mathcal{A})$;
2) $\mathcal{A}$ не является кообластью.

Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — множество натуральных чисел. Обозначим через $\mathbb{N}'$ пополнение множества $\mathbb{N}$ двумя элементами ω_1, ω_2. Рассмотрим множество

$$A = \{a_{ij} \mid i \in \mathbb{N}',\ j \in \mathbb{N}\}.$$

Рассмотрим язык

$$\mathcal{L}_p = \{P_k \mid k \in \mathbb{N}^+\} \cup \{R_1, R_2\},$$

состоящий из счётного числа одноместных предикатных символов, и определим алгебраическую систему $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_p$ с основным множеством A, на котором предикаты P_k, R_1, R_2 определены следующим образом:

$$P_k(x) = \{a_{ij} \mid i \geqslant k,\ j \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{\omega_1 j} \mid j \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{\omega_2 j} \mid j \in \mathbb{N}\},$$
$$R_1(x) = \{a_{\omega_1 j} \mid j \in \mathbb{N}\}, \quad R_2(x) = \{a_{\omega_2 j} \mid j \in \mathbb{N}\}.$$

В частности, P_0 является тождественно истинным предикатом на $\mathcal{A}$.

Замечание 3.1. Из выбора множества A и определения предикатов следует, что любая система уравнений над $\mathcal{A}$ имеет бесконечное множество решений.

С помощью $P \subseteq Q$ мы будем обозначать, что область истинности предиката P в алгебраической системе $\mathcal{A}$ содержится в области истинности предиката Q. Из определения предикатов в алгебре $\mathcal{A}$ следует, что $P_i \supset P_{i+1}$, $P_i \supset R_k$ для всех $i \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2\}$.

Помимо систем уравнений над $\mathcal{A}$ мы будем рассматривать *дизъюнкции уравнений* $\mathbf{D}(X)$, решение которых определяется как объединение множеств решений всех уравнений, входящих в $\mathbf{D}(X)$.

Лемма 3.2. *Алгебра $\mathcal{A}$ не является эквациональной кообластью.*

Доказательство. Рассмотрим систему $\mathbf{S} = \{P_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$ с решением

$$\Omega = \{a_{ij} \mid i \in \{\omega_1, \omega_2\},\ j \in \mathbb{N}\}.$$

Множество Ω, очевидно, является приводимым, так как $\Omega = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}\big(R_1(x)\big) \cup \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}\big(R_2(x)\big)$. □

Лемма 3.3. *Любая универсальная формула*

$$\phi\colon \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \ \big(\mathbf{S}(X) \to \mathbf{D}(X)\big) \tag{3}$$

($\mathbf{S}$ — *система уравнений,* $\mathbf{D}$ — *дизъюнкция уравнений над* $\mathcal{A}$) *эквивалентна над* $\mathcal{A}$ *квазитождеству*

$$\psi\colon \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \ \big(\mathbf{S}(X) \to \mathbf{eq}(X)\big), \tag{4}$$

где уравнение $\mathbf{eq}(X)$ *принадлежит дизъюнкции* $\mathbf{D}$.

Доказательство. В силу тождеств логики предикатов истинность квазитождества ψ на $\mathcal{A}$ влечёт $\mathcal{A} \models \phi$, поскольку $\mathbf{eq}(X) \in \mathbf{D}$. Таким образом, достаточно доказать импликацию $\mathcal{A} \models \phi \Longrightarrow \mathcal{A} \models \psi$.

Рассмотрим конечную систему уравнений $\mathbf{S}$, входящую в запись универсальной формулы ϕ. Без ограничения общности можно предполагать, что $\mathbf{S}$ не содержит равенств переменных $x_i = x_j$ (в противном случае можно все вхождения переменной x_j заменить на x_i и получить эквивалентную универсальную формулу). Из определения предикатов на $\mathcal{A}$ следует, что если система $\mathbf{S}$ содержит два уравнения $P(x_i)$, $Q(x_i)$ и $P \subseteq Q$, то формула ϕ эквивалентна над $\mathcal{A}$ универсальной формуле вида

$$\phi'\colon \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \ \big(\mathbf{S}'(X) \to \mathbf{D}(X)\big),$$

где $\mathbf{S}' = \mathbf{S} \setminus Q(x_i)$.

Если же $\mathbf{S}$ одновременно содержит уравнения $R_1(x_i)$, $R_2(x_i)$, то она является несовместной над $\mathcal{A}$. В этом случае формула ϕ истинна на $\mathcal{A}$ и в качестве уравнения $\mathbf{eq}(X)$ можно взять произвольное уравнение из $\mathbf{D}$.

Таким образом, мы можем изначально предполагать, что каждая переменная x_i входит не более чем в одно уравнение системы $\mathbf{S}$. Более того, можно считать, что *каждая переменная* x_i *входит ровно в одно уравнение системы* $\mathbf{S}$ (если система $\mathbf{S}$ изначально не содержит вхождений переменной x_i, то в $\mathbf{S}$ можно добавить тождественно истинное уравнение $P_0(x_i)$).

Дизъюнкцию уравнений $\mathbf{D}$ можно представить в виде $\mathbf{D} = \mathbf{D}_p \vee \mathbf{D}_=$, где дизъюнкция уравнений $\mathbf{D}_p$ состоит из уравнений вида $Q(x_i)$ (где Q — предикат), а дизъюнкция уравнений $\mathbf{D}_=$ состоит из равенств переменных $x_i = x_j$. Если $\mathbf{D}_p$ содержит два уравнения вида $P(x_i)$, $Q(x_i)$ и $P \subseteq Q$, то предикат P можно удалить из дизъюнкции $\mathbf{D}_p$ и получить эквивалентную ϕ формулу. Таким образом, мы можем изначально предполагать, что *каждая переменная* x_i *входит не более чем в одно уравнение дизъюнкции уравнений* $\mathbf{D}_p$ *либо* $\mathbf{D}_p$ *содержит выражение* $R_1(x_i) \vee R_2(x_i)$.

Если существует переменная x_i, такая что $P(x_i) \in \mathbf{S}$, $Q(x_i) \in \mathbf{D}_p$ и $P \subseteq Q$, то $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}\big(Q(x_i)\big)$, и поэтому универсальная формула ϕ эквивалентна над $\mathcal{A}$ квазитождеству

$$\psi\colon \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \ \big(\mathbf{S}(X) \to Q(x_i)\big).$$

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда для каждой переменной x_i выполнено

$$\text{если переменная } x_i \text{ входит в уравнение } P(x_i) \in \mathbf{S} \text{ и в } Q(x_i) \in \mathbf{D}_p, \text{ то } P \nsubseteq Q. \tag{5}$$

Определим точку $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathcal{A}^n$ следующим образом. Если переменная x_i входит в уравнение $P_k(x_i) \in \mathbf{S}$, то полагаем $p_i = a_{ki}$ (в случае $R_k(x_i) \in \mathbf{S}$ полагаем $p_i = a_{\omega_k i}$).

Из построения точки $\bar{p}$ сразу следует, что $\bar{p} \in \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S})$. Кроме того, из определения точки $\bar{p}$ и предположения (5) следует, что точка $\bar{p}$ не удовлетворяет никакому уравнению из дизъюнкции $\mathbf{D}_p$. Поскольку все координаты точки $\bar{p}$ различны, то $\bar{p}$ не удовлетворяет никакому уравнению из $\mathbf{D}_=$. Таким образом, мы получили $\bar{p} \in \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) \setminus \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{D})$, и поэтому формула ϕ ложна в $\mathcal{A}$ — противоречие. □

Лемма 3.4. *Алгебраическая система $\mathcal{B}$ языка $\mathcal{L}_p$ принадлежит универсальному замыканию $\mathbf{ucl}(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ удовлетворяет всем формулам вида* (3)*, которые истинны в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Используя основные эквивалентности логики предикатов, можно показать, что произвольная универсальная формула эквивалентна конъюнкции формул вида (3) (полное доказательство можно найти, например, в [3]). Таким образом, принадлежность классу $\mathbf{ucl}(\mathcal{A})$ определяется формулами вида (3). □

Лемма 3.5. *Для алгебраической системы $\mathcal{A}$ выполнено равенство $\mathbf{ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{qvar}(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любой алгебраической системы $\mathcal{B} \in \mathbf{qvar}(\mathcal{A})$ выполнено $\mathcal{B} \in \mathbf{ucl}(\mathcal{A})$.

Пусть ϕ — произвольная универсальная формула, истинная на алгебраической системе $\mathcal{A}$. Согласно лемме 3.4 можно предполагать, что формула ϕ имеет вид (3). Тогда по лемме 3.3 на алгебре $\mathcal{A}$ истинно квазитождество ψ (4). Поскольку $\mathcal{B} \in \mathbf{qvar}(\mathcal{A})$, то $\mathcal{B} \models \psi$. Поскольку $\mathbf{eq}(X) \in \mathbf{D}$, то и $\mathcal{B} \models \phi$. □

Следствие 3.6. *Класс эквациональных кообластей языка $\mathcal{L}_p$ не замкнут относительно элементарной эквивалентности.*

Доказательство. Согласно [2] для любой алгебраической системы существует её элементарное $\mathbf{u}_\omega$-компактное расширение (для определённой выше алгебры $\mathcal{A}$ данное расширение обозначим через $\mathcal{B}$). С помощью несложных теоретико-модельных рассуждений можно показать, что для элементарно эквивалентных алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ выполнено равенство классов

$$\mathbf{qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{qvar}(\mathcal{B}), \quad \mathbf{ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{ucl}(\mathcal{B}).$$

Поскольку $\mathbf{qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{ucl}(\mathcal{A})$, то и $\mathbf{qvar}(\mathcal{B}) = \mathbf{ucl}(\mathcal{B})$. Однако для $\mathbf{u}_\omega$-компактных алгебраических систем последнее равенство означает, что алгебра $\mathcal{B}$ является эквациональной кообластью (см. [2]).

Таким образом, алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_p$ элементарно эквивалентна эквациональной кообласти $\mathcal{B}$, но сама алгебра $\mathcal{A}$ не является эквациональной кообластью (лемма 3.2). $\square$

Усилим результат следствия 3.6.

Лемма 3.7. *Определённая выше алгебраическая система* $\mathcal{A}$ $\mathbf{q}_\omega$*-компактна.*

Доказательство. Рассмотрим бесконечную систему уравнений $\mathbf{S}$ и уравнение $\mathbf{eq}(X)$, для которых выполнено включение (1). Возможны следующие случаи.

1. Уравнение $\mathbf{eq}(X)$ имеет вид равенства $x = y$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что система уравнений $\mathbf{S}$ зависит только от переменных x, y и представима в виде $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1(x) \cup \mathbf{S}_2(y)$. Из замечания 3.1 следует, что системы $\mathbf{S}_1(x)$, $\mathbf{S}_2(y)$ имеют бесконечно много решений, и поэтому системе $\mathbf{S}$ удовлетворяют не только точки вида (x, x). Таким образом, включение (1) невозможно.

2. Уравнение $\mathbf{eq}(X)$ имеет вид $Q(x)$, где Q — один из предикатов, определённых на $\mathcal{A}$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что система уравнений $\mathbf{S}$ зависит только от переменной x. Поскольку система $\mathbf{S}$ бесконечна, то она содержит бесконечно много уравнений вида $P_i(x)$. Следовательно, если $Q = P_j$, то в системе $\mathbf{S}$ существует уравнение $P_i(x)$, $i > j$, и тогда для подсистемы $\mathbf{S}' = \{P_i(x)\}$ выполнено включение (2).

Если же $Q = R_j$, то из определения предикатов на $\mathcal{A}$ следует, что включение (1) возможно, лишь когда $R_j(x) \in \mathbf{S}$. Но тогда для подсистемы $\mathbf{S}' = \{R_j(x)\}$ выполнено включение (2). $\square$

Лемма 3.7 существенно используется при доказательстве следующего результата.

Следствие 3.8 [1, утверждение 23]. *Класс эквациональных кообластей не инвариантен относительно суммы элементарной и геометрической эквивалентностей.*

Доказательство. В [1] доказано, что определённая выше алгебра $\mathcal{A}$ и её элементарное $\mathbf{u}_\omega$-компактное расширение $\mathcal{B}$ (см. следствие 3.6) геометрически эквивалентны, но $\mathcal{B}$ (в отличие от $\mathcal{A}$) является эквациональной кообластью. $\square$

4. Функциональный язык

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебраическая система языка

$$\mathcal{L}_p = \{P_i^{(1)} \mid i \in I\}$$

с основным множеством A. Поставим ей в соответствие $\mathcal{L}_f$-алгебру $\mathcal{B} = F(\mathcal{A})$ языка

$$\mathcal{L}_f = \{f_i^{(1)} \mid i \in I\} \cup \{0\}$$

с основным множеством

$$B = A \cup \Pi,$$

где ненулевые элементы π_i множества

$$\Pi = \{\pi_i \mid i \in I\} \cup \{0\}$$

соответствуют предикатным символам языка $\mathcal{L}_p$. Функции на алгебраической системе $\mathcal{B}$ языка $\mathcal{L}_f$ определяются следующим образом (ниже выражение $a \in P_i$ обозначает, что элемент a принадлежит области истинности предиката P_i):

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Pi \cup \{a \in A \mid a \in \mathcal{A} \models P_i(a)\}, \\ \pi_i, & \text{если } x \in \{a \in A \mid \mathcal{A} \models \neg P_i(a)\}. \end{cases}$$

Доказательство леммы ниже непосредственно следует из определения функций f_i на $\mathcal{B}$.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебраическая система языка $\mathcal{L}_p$. Для функций f_i, f_j, определённых на $\mathcal{L}_f$-алгебре $\mathcal{B} = F(\mathcal{A})$, выполнено следующее:*

1) $f_i\big(f_j(x)\big) = 0$;
2) $f_i(x) = f_j(y)$ *тогда и только тогда, когда* $f_i(x) = f_j(y) = 0$ (где f_i, f_j — *различные функции на* $\mathcal{B}$);
3) $f_i(x) = f_i(y)$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$ *или* $f_i(x) = f_i(y) = 0$.

Из леммы 4.1 следует, что любое уравнение над алгебраической системой $\mathcal{B}$ языка $\mathcal{L}_f$ эквивалентно одному из следующих выражений:

1) системе уравнений вида $f_i(x) = 0$;
2) уравнению $f_i(x) = f_i(y)$;
3) равенствам $x = y$ или $x = 0$.

Кроме того, из определения функций f_i возникает естественное соответствие между уравнениями над $\mathcal{L}_p$-алгеброй $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}_f$-алгеброй $F(\mathcal{A})$:

$$P_i(x) \Longleftrightarrow f_i(x) = 0. \tag{6}$$

Иными словами, область истинности предиката P_i на алгебраической системе $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_p$ моделируется множеством нулей функции f_i на $\mathcal{L}_f$-алгебре $F(\mathcal{A})$.

Ниже на конкретном примере будет продемонстрировано, что алгебраическая система $\mathcal{B} = F(\mathcal{A})$ языка $\mathcal{L}_f$ наследует многие алгебро-геометрические свойства $\mathcal{L}_p$-алгебры $\mathcal{A}$.

Пусть далее $\mathcal{A}$ — алгебраическая система языка $\mathcal{L}_p$, определённая в разделе 3, и $\mathcal{B} = F(\mathcal{A})$. На $\mathcal{L}_f$-алгебре $\mathcal{B}$ определены функции p_i, r_j, которые соответствуют предикатам P_i, R_j на $\mathcal{A}$. Покажем, что $\mathcal{L}_f$-алгебра $\mathcal{B}$ также решает проблему, сформулированную во введении, и поэтому класс эквациональных кообластей функционального языка $\mathcal{L}_f$ не замкнут относительно элементарной эквивалентности.

Лемма 4.2. *Алгебра $\mathcal{B}$ не является эквациональной кообластью.*

Доказательство. Благодаря соответствию (6) данное утверждение доказывается аналогично лемме 3.2. □

Докажем для алгебраической системы $\mathcal{B}$ аналог леммы 3.3.

Лемма 4.3. *Любая универсальная формула*

$$\phi\colon \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \ \big(\mathbf{S}(X) \to \mathbf{D}(X)\big) \tag{7}$$

($\mathbf{S}$ — *система уравнений,* $\mathbf{D}$ — *дизъюнкция уравнений над* $\mathcal{B}$) *эквивалентна над* $\mathcal{B}$ *квазитождеству*

$$\psi\colon \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \ \big(\mathbf{S}(X) \to \mathbf{eq}(X)\big), \tag{8}$$

где $\mathbf{eq}(X) \in \mathbf{D}$.

Доказательство. Вначале покажем, что формулу ϕ можно эквивалентным образом преобразовать к виду, где система $\mathbf{S}$ и дизъюнкция уравнений $\mathbf{D}$ будут состоять только из уравнений следующих типов: $f_i(x_j) = 0$, $x_i = x_j$, $x_i = 0$. Действительно, из леммы 4.1 следует, что любое $\mathcal{L}_f$-уравнение над $\mathcal{B}$ эквивалентно

1) либо равенству переменных $x_i = x_j$;
2) либо равенству $x_i = 0$;
3) либо системе из не более чем двух уравнений вида $f(x_i) = 0$ ($f \in \mathcal{L}_f$);
4) либо уравнению вида $f(x) = f(y)$.

Первые два случая удовлетворяют требованиям выше. Если некоторое уравнение $\mathbf{eq}' \in \mathbf{D}$ эквивалентно системе уравнений вида $f(x) = g(y) = 0$, то по закону дистрибутивности дизъюнкция $\mathbf{D}$ эквивалентна конъюнкции двух дизъюнкций $\mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{D}_2$, где

$$\mathbf{D}_1 = (\mathbf{D} \setminus \{\mathbf{eq}'\}) \cup \{f(x) = 0\}, \quad \mathbf{D}_2 = (\mathbf{D} \setminus \{\mathbf{eq}'\}) \cup \{g(y) = 0\}.$$

Тогда формула ϕ эквивалентна конъюнкции двух формул

$$\phi \sim \phi_1 \wedge \phi_2 \sim \Big(\forall x_1 \forall x_2 \ \ldots \forall x_n \ \big(\mathbf{S}(X) \to \mathbf{D}_1(X)\big)\Big) \wedge \\ \wedge \Big(\forall x_1 \forall x_2 \ \ldots \forall x_n \ \big(\mathbf{S}(X) \to \mathbf{D}_2(X)\big)\Big), \tag{9}$$

и тогда вместо формулы ϕ утверждение леммы можно доказывать для более простых формул ϕ_1, ϕ_2.

Если дизъюнкции $\mathbf{D}$ принадлежит уравнение вида $f(x) = f(y)$, то по лемме 4.1 мы заменяем её на дизъюнкцию $x = y \vee (f(x) = 0 \wedge f(y) = 0)$. По закону дистрибутивности дизъюнкция $\mathbf{D}$ эквивалентна конъюнкции двух дизъюнкций $\mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{D}_2$, где

$$\mathbf{D}_1 = (\mathbf{D} \setminus \{f(x) = f(y)\}) \cup \{f(x) = 0\} \cup \{x = y\},$$
$$\mathbf{D}_2 = (\mathbf{D} \setminus \{f(x) = f(y)\}) \cup \{g(y) = 0\} \cup \{x = y\}.$$

Тогда формула ϕ эквивалентна конъюнкции двух формул ϕ_1, ϕ_2 (9), и тогда вместо формулы ϕ утверждение леммы можно доказывать для более простых формул ϕ_1, ϕ_2.

Если же уравнение вида $f(x) = f(y)$ принадлежит системе уравнений $\mathbf{S}$, то мы поступаем аналогично: по лемме 4.1 мы заменяем уравнение на дизъюнкцию $x = y \vee (f(x) = 0 \wedge f(y) = 0)$, и по закону дистрибутивности система уравнений $\mathbf{S}$ эквивалентна дизъюнкции двух систем уравнений $\mathbf{S}_1 \vee \mathbf{S}_2$. Тогда формула ϕ эквивалентна конъюнкции двух формул

$$\phi \sim \phi_1 \wedge \phi_2 \sim \Big(\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \ \big(\mathbf{S}_1(X) \to \mathbf{D}(X)\big)\Big) \wedge \\ \wedge \Big(\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \ \big(\mathbf{S}_2(X) \to \mathbf{D}(X)\big)\Big),$$

где

$$\mathbf{S}_1 = (\mathbf{S} \setminus \{f(x) = f(y)\}) \cup \{x = y\},$$
$$\mathbf{S}_2 = (\mathbf{S} \setminus \{f(x) = f(y)\}) \cup \{f(x) = 0,\ f(y) = 0\},$$

и тогда вместо формулы ϕ утверждение леммы можно доказывать для более простых формул ϕ_1, ϕ_2.

Таким образом, далее предполагаем, что все атомарные формулы в ϕ имеют вид $f(x_j) = 0$ ($f \in \mathcal{L}_f$) или $x_i = x_j$, $x_i = 0$, и благодаря соответствию (6) дальнейшее доказательство полностью аналогично рассуждениям из леммы 3.3. $\square$

Поскольку лемма 3.4 верна для произвольного языка $\mathcal{L}$, то для алгебраической системы $\mathcal{B}$ получаем равенство $\mathbf{qvar}(\mathcal{B}) = \mathbf{ucl}(\mathcal{B})$. Следовательно, алгебра $\mathcal{B}$ также решает проблему, указанную во введении, и поэтому класс эквациональных кообластей функционального языка $\mathcal{L}_f$ не замкнут относительно элементарной эквивалентности. Кроме того, аналог следствия 3.8 также верен для алгебр языка $\mathcal{L}_f$.

Литература

[1] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. VIII. Геометрические эквивалентности и особые классы алгебраических систем // Фундамент. и прикл. матем. — 2019. — Т. 22, вып. 4. — С. 75—100.

[2] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.

[3] Shevlyakov A. N. Lectures notes in universal algebraic geometry. — `arXiv:1601.02743`.