О выпуклых направленных подгруппах псевдо решёточно упорядоченных групп

Е. Е. ШИРШОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

УДК 512.545

Ключевые слова: частично упорядоченная группа, интерполяционная группа, направленная группа, выпуклая подгруппа, почти ортогональные элементы.

Аннотация

Доказывается, что множество всех выпуклых направленных подгрупп pl-группы образует дистрибутивную решётку относительно включения, которая является брауэровой решёткой. Удалось распространить ряд результатов теории l-групп, касающихся спрямляющих и регулярных подгрупп, на класс $\mathcal{AO}$-групп. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых элемент pl-группы имеет единственное значение. Для этого понадобилось исследовать свойства лексикографических расширений $\mathcal{AO}$-групп и pl-групп.

Abstract

E. E. Shirshova, On convex directed subgroups of pseudo lattice-ordered groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 239—252.

We show that all convex directed subgroups of a pl-group form a distributive lattice under inclusions that is a Brouwer lattice. We succeeded in extending some l-group results concerning rectifying and regular subgroups to the class of $\mathcal{AO}$-groups. Necessary and sufficient conditions are given for an element of a pl-group to be an element with a unique value. In order to prove this, some properties of lexicographic extensions of $\mathcal{AO}$-groups and pl-groups are investigated.

Памяти Альфреда Львовича Шмелькина

1. Введение

Пусть G — частично упорядоченная группа, e — единица группы G и $G^+ = \{g \in G \mid e \leqslant g\}$.

Частично упорядоченная группа G называется *направленной*, если любые два элемента группы имеют в группе верхнюю грань.

Подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для любых элементов $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ всегда следует $g \in M$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 4, с. 239—252.

Выпуклая направленная подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *значением элемента* $g \in G$ (*регулярной подгруппой*), если M является максимальной среди выпуклых направленный подгрупп группы G, не содержащих элемент g. Каждая выпуклая направленная подгруппа частично упорядоченной группы является пересечением регулярных подгрупп (см., например, [4, теорема 1.1]).

Подмножество S решётки L называется *корневой системой*, если для каждого $a \in L$ множество $U_a = \{u \in L \mid a \leqslant u\}$ линейно упорядоченно и лежит в S.

Будем обозначать через $\mathcal{L}(G)$ множество всех выпуклых направленных подгрупп частично упорядоченной группы G.

Подгруппа $M \in \mathcal{L}(G)$ в частично упорядоченной группе G называется *простой*, если для любых $H_1, H_2 \in \mathcal{L}(G)$ из равенства $M = H_1 \cap H_2$ всегда следует $M = H_1$ или $M = H_2$ [16].

П. Конрад в [14] показал, что в решёточно упорядоченной группе (l-группе) G множество $\mathcal{T}$ всех регулярных подгрупп группы G является в точности множеством простых элементов в решётке $\mathcal{L}(G)$, образует корневую систему и порождает решётку $\mathcal{L}(G)$, т. е. всякий элемент из $\mathcal{L}(G)$ является пересечением дуального идеала из $\mathcal{T}$. В частности, там доказано, что $\mathcal{T}$ свободно порождает $\mathcal{L}(G)$ в том и только в том случае, когда каждый элемент $g \in G$ имеет самое большее конечное число значений в $\mathcal{T}$.

В данной работе исследуются свойства множества всех выпуклых направленных подгрупп в группах из классов $\mathcal{AO}$-групп и pl-групп. Целью работы является распространение ряда теорем из теории l-групп, касающихся регулярных подгрупп, на указанные классы групп.

В статье используются терминология и обозначения, общепринятые в теории частично упорядоченных групп (см. [1—3]).

Во втором разделе рассматриваются свойства множества всех выпуклых направленных подгрупп интерполяционной группы.

Частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $u_1, u_2, v_1, v_2 \in G$ из неравенств $u_1, u_2 \leqslant v_1, v_2$ следует наличие элемента $w \in G$, для которого верны неравенства $u_1, u_2 \leqslant w \leqslant v_1, v_2$. В интерполяционной группе G подгруппа, порождённая множеством подгрупп из $\mathcal{L}(G)$, принадлежит $\mathcal{L}(G)$ (см. [11, теорема 2; 12, лемма 9]).

Пусть G — интерполяционная группа. Если A и B — выпуклые направленные подгруппы группы G, то положим $A \wedge B = A \cap B$ и обозначим $A \vee B$ подгруппу, порождённую объединением $A \cup B$.

Если $\{M_i \mid i \in I\}$ — семейство выпуклых направленных подгрупп группы G, то обозначим $\bigvee\limits_{i \in I} M_i$ подгруппу, порождённую объединением $\bigcup\limits_{i \in I} M_i$.

Теорема 1. *Пусть G — интерполяционная группа. Тогда $L = (\mathcal{L}(G), \vee, \wedge)$ — подрешётка с нулём в решётке всех подгрупп группы G, являющаяся полной подрешёткой сверху. В решётке L операция объединения вполне дистрибутивна относительно пересечения, т. е.*

$$M \wedge \left(\bigvee_{i \in I} H_i \right) = \bigvee_{i \in I} (M \wedge H_i)$$

для всех выпуклых направленных подгрупп M и H_i в группе G.

Первоначально утверждения теоремы 1 были анонсированы А. М. В. Глассом [17].

Элементы a и b из G^+ частично упорядоченной группы G называются *почти ортогональными* или *$\mathcal{AO}$-элементами* в G, если из неравенств $g \leqslant a, b$ следует верность неравенств $g^n \leqslant a, b$ для всех элементов $g \in G$ и всех целых чисел $n > 0$. Частично упорядоченная группа G называется *$\mathcal{AO}$-группой*, если любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = ab^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b группы G. Интерполяционная $\mathcal{AO}$-группа называется *псевдо решёточно упорядоченной группой* (*pl-группой*).

Теорема 2. *Если G — pl-группа, то $(\mathcal{L}(G), \vee, \wedge)$ — полная дистрибутивная подрешётка с единицей и нулём в решётке всех подгрупп группы G, являющаяся брауэровой решёткой.*

Решётку L называют *брауэровой решёткой*, если для любых элементов a и b из L множество $\{x \in L \mid a \wedge x \leqslant b\}$ содержит наибольший элемент.

Если G — частично упорядоченная группа и M — выпуклая подгруппа группы G, то, положив $M \leqslant Ma$ $(M \leqslant aM)$, если $e \leqslant a'$ для некоторого элемента $a' \in Ma$ $(a' \in aM)$, определяют отношение частичного порядка на множестве всех правых (левых) смежных классов группы G по подгруппе M. Если M является выпуклой нормальной подгруппой группы G, то фактор-группа G/M — частично упорядоченная группа [2, гл. II, § 3, предложение 4]. В этом случае группа G называется *расширением частично упорядоченной группы M с помощью частично упорядоченной группы G/M*. Группа G называется *лексикографическим расширением частично упорядоченной группы M с помощью частично упорядоченной группы G/M*, если каждый строго положительный смежный класс в G/M состоит только из положительных элементов группы G.

В третьем разделе речь идёт о свойствах лексикографических расширений.

Напомним, что выпуклую направленную нормальную подгруппу частично упорядоченной группы называют *o-идеалом*.

Теорема 3. *Пусть частично упорядоченная группа G является лексикографическим расширением o-идеала M с помощью частично упорядоченной группы G/M. Если H — выпуклая направленная подгруппа группы G, не являющаяся подмножеством M, то $M \subset H$.*

Теорема 4. *Пусть G — $\mathcal{AO}$-группа, являющаяся лексикографическим расширением o-идеала M с помощью частично упорядоченной группы G/M, $\{H_i \mid i \in I\}$ — множество всех выпуклых направленных подгрупп группы G, для которых $M \subset H_i$, и $H = \bigcap_{i \in I} H_i$. Тогда H — выпуклая направленная подгруппа группы G. Если $h \in H \setminus M$, то $h = ab^{-1}$ для некоторых $a, b \in H^+$, почти ортогональных в группе G. Кроме того, существует целое число $k > 0$,* *для которого $a \leqslant b^k$, или существует целое число $l > 0$, для которого $b \leqslant a^l$, или a и b архимедово эквивалентны.*

Положительные элементы x и y частично упорядоченной группы G называют *архимедово эквивалентными*, если существуют целые числа $m > 0$ и $n > 0$, для которых верны неравенства $a \leqslant b^m$ и $b \leqslant a^n$.

Теорема 5. *Пусть G — pl-группа, являющаяся лексикографическим расширением выпуклой нормальной подгруппы M с помощью частично упорядоченной группы G/M. Если H — выпуклая направленная подгруппа, о которой идёт речь в условии теоремы 4, то справедливы следующие утверждения:*

1) *H — o-идеал группы G;*
2) *G — лексикографическое расширение H с помощью частично упорядоченной группы G/H;*
3) *если $H \neq M$, то множество $H \setminus M$ линейно упорядоченно.*

Некоторые свойства лексикографических расширений $\mathcal{AO}$-групп и pl-групп рассматривались ранее в [13].

В четвёртом разделе работы рассматриваются спрямляющие подгруппы частично упорядоченных групп. Выпуклая подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *спрямляющей*, если множество правых смежных классов группы G по подгруппе M линейно упорядоченно. В решёточно упорядоченной группе любая регулярная подгруппа (если она значение ненулевого элемента) является спрямляющей (см. [18; 2, гл. III, § 3, теорема 3]).

В [4] приводится пример регулярных подгрупп псевдо решёточно упорядоченной группы, которые не являются спрямляющими.

Теорема 6. *В $\mathcal{AO}$-группе спрямляющие направленные подгруппы образуют корневую систему в решётке всех выпуклых направленных подгрупп этой группы.*

Говорят, что подгруппа $M \in \mathcal{L}(G)$ частично упорядоченной группы G *неразложима в пересечение*, если для любых $N_i \in \mathcal{L}(G)$ из равенства $M = \bigcap\limits_{i \in I} N_i$ следует существование индекса $j \in I$, для которого $M = N_j$.

Теорема 7. *Пусть G — $\mathcal{AO}$-группа, M — выпуклая направленная подгруппа группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *M — регулярная подгруппа;*
2) *M неразложима в пересечение.*

Выпуклую направленную подгруппу M частично упорядоченной группы G будем называть *особой*, если существует элемент $g \in G$, для которого M является единственным значением в группе G. В этом случае элемент g также назовём особым.

В пятом разделе рассматриваются свойства особых элементов положительного конуса.

Для каждого элемента $a > e$ в частично упорядоченной группе G существует выпуклая направленная подгруппа $[a]$, для которой

$$[a]^+ = \{g \in G^+ \mid g \leqslant a^k \text{ для некоторых целых чисел } k > 0\}$$

(подробнее см. [7, 15]).

Теорема 8. *Пусть G — pl-группа и $a \in G^+ \setminus \{e\}$. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *a — особый элемент в группе $[a]$*;
2) *$[a]$ является лексикорасширением собственной спрямляющей нормальной подгруппы.*

Свойства значений положительных элементов pl-групп рассматривались ранее в [13].

2. Решётка подгрупп интерполяционной группы

Начнём с некоторых известных утверждений.

Лемма 9. *Если G — частично упорядоченная группа, то следующие условия равносильны*:

1) *G является направленной группой*;
2) *для элемента e и каждого элемента $a \in G$ существует верхняя грань*;
3) *любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = ab^{-1}$, где $a, b \in G^+$.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти, например, в [3, ч. I, гл. II, § 1, предложение 1]. □

Лемма 10. *Пусть G — интерполяционная группа, A и B — её выпуклые направленные подгруппы. Если $C = A \cap B$, то C является выпуклой направленной подгруппой группы G.*

Доказательство. Так как пересечение выпуклых подгрупп частично упорядоченной группы выпукло, то C — выпуклая подгруппа группы G.

Пусть далее $x \in C$, тогда $x \in A$ и $x \in B$. Так как A и B — направленные группы, то по условию 2) леммы 9 существуют элементы $a \in A^+$ и $b \in B^+$, для которых $x \leqslant a$ и $x \leqslant b$. Таким образом, в интерполяционной группе G справедливы неравенства $e, x \leqslant a, b$. Тогда должен найтись элемент $u \in G$, для которого $e, x \leqslant u \leqslant a, b$. Так как A и B являются выпуклыми подгруппами группы G, то $u \in A$ и $u \in B$. Значит, $u \in C$ и u является верхней гранью элементов e и x в группе C. Следовательно, по условию 2) леммы 9 C — направленная группа. □

Лемма 11. *Пусть G — интерполяционная группа и $x, a_1, a_2, \ldots, a_s \in G^+$. Если $x \leqslant a_1 a_2 \ldots a_s$, то найдутся элементы $b_1, b_2, \ldots, b_s \in G^+$, для которых $x = b_1 b_2 \ldots b_s$ и верно неравенство $b_i \leqslant a_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [11, следствие 2; 12]. $\square$

Лемма 12. *Пусть G — интерполяционная группа, $\{M_i \mid i \in I\}$ — семейство выпуклых направленных подгрупп группы G, M — подгруппа, порождённая теоретико-множественным объединением $\bigcup\limits_{i\in I} M_i$ в группе G. Если $m \in M^+$, то $m = m_{i_1} m_{i_2} \ldots m_{i_s}$, где $m_{i_j} \in M_j^+$ для всех $j = 1, 2, \ldots, s$.*

Доказательство. Из определения подгруппы M следует, что

$$m = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s},$$

где $x_{i_j} \in M_j$ для некоторых индексов $j = 1, 2, \ldots, s$. Так как каждая подгруппа M_j является направленной для любого $j = 1, 2, \ldots, s$, то по условию 2) леммы 9 существует элемент $y_{i_j} \in M_j$, для которого $e, x_{i_j} \leqslant y_{i_j}$ для каждого $j = 1, 2, \ldots, s$. Тогда справедливо неравенство $m \leqslant y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_s}$. В силу леммы 11 в группе G найдутся элементы m_{i_j}, для которых $m = m_{i_1} m_{i_2} \ldots m_{i_s}$, удовлетворяющие неравенствам $e \leqslant m_{i_j} \leqslant y_{i_j}$ для каждого $j = 1, 2, \ldots, s$. Так как каждая M_j — выпуклая подгруппа группы G, то $m_{i_j} \in M_j$ для любого $j = 1, 2, \ldots, s$. $\square$

Лемма 13. *Пусть G — интерполяционная группа, $\{H_i \mid i \in I\}$ — семейство выпуклых направленных подгрупп группы G, H — подгруппа, порождённая теоретико-множественным объединением подгрупп H_i. Тогда H — выпуклая направленная подгруппа группы G.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [11, теорема 2] или в [12, лемма 9]. $\square$

Доказательство теоремы 1. С учётом лемм 10 и 13 остаётся доказать второе утверждение.

Положим

$$K = \bigvee_{i\in I} (M \wedge H_i), \quad H = \bigvee_{i\in I} H_i.$$

В силу леммы 13 K и H — выпуклые направленные подгруппы в группе G. Если $k \in K$, то $k = k_{i_1} k_{i_2} \ldots k_{i_s}$, где $k_{i_j} \in M \wedge H_j$ для некоторых индексов $j = 1, 2, \ldots, s$. Тогда $k_{i_j} \in M$ и $k_{i_j} \in H_j$ для $j = 1, 2, \ldots, s$. Отсюда следует, что $k \in M$ и $k \in H$. Значит, $k \in M \wedge H$, т. е. $K \subseteq M \wedge H$.

Докажем обратное включение. По лемме 10 подгруппа $M \wedge H$ выпукла и направленна в группе G. Рассмотрим элемент $x \in (M \wedge H)^+$. В этом случае $x \in M^+$ и $x \in H^+$. Из леммы 12 следует, что $x = h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_s}$, где $h_{i_j} \in H_j{}^+$ для некоторых индексов $j = 1, 2, \ldots, s$. Тогда верны неравенства $e \leqslant h_{i_j} \leqslant x$ для всех $j = 1, 2, \ldots, s$. Так как подгруппа M выпукла в группе G, то $h_{i_j} \in M$ для всех $j = 1, 2, \ldots, s$. Таким образом, $h_{i_j} \in M \wedge H_j$ для каждого $j = 1, 2, \ldots, s$. Значит, $x \in K$, т. е. $(M \wedge H)^+ \subseteq K$. Так как $M \wedge H$ — направленная группа, то по условию 3) леммы 9 $M \wedge H \subseteq K$. Следовательно, $M \wedge H = K$. Теорема 1 доказана полностью. $\square$

Лемма 14. *Полная решётка является брауэровой тогда и только тогда, когда операция объединения в ней вполне дистрибутивна относительно пересечения.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [1, гл. V, § 10, теорема 24]. $\square$

Лемма 15. *Пусть G — $\mathcal{AO}$-группа, $\{H_i \mid i \in I\}$ — семейство выпуклых направленных подгрупп группы G, $H = \bigcap\limits_{i \in I} H_i$. Тогда H — выпуклая направленная подгруппа группы G.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [21, теорема 1]. $\square$

Доказательство теоремы 2. Так как pl-группа G является интерполяционной группой, то по теореме 1 $\mathcal{L}(G)$ является полной решёткой сверху. Так как pl-группа G является $\mathcal{AO}$-группой, то по лемме 15 $\mathcal{L}(G)$ — полная решётка снизу. Ввиду леммы 14 из теоремы 1 следует брауэровость решётки $\mathcal{L}(G)$. Таким образом, теорема 2 доказана. $\square$

3. Лексикографические расширения групп

Лемма 16. *Пусть G — частично упорядоченная группа. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) *G — лексикографическое расширение выпуклой нормальной подгруппы M с помощью частично упорядоченной группы G/M;*
2) *для любых элементов $a \in G^+ \setminus M$ и $m \in M$ справедливо неравенство $m < a$.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [19, лемма 2.2] или в [6, лемма 1.4]. $\square$

Доказательство теоремы 3. По условию теоремы существует элемент $h \in H \setminus M$. Так как H — направленная группа, то из условия 3) леммы 9 следует, что $h = ab^{-1}$ для некоторых элементов $a, b \in H^+$. Так как $h \notin M$, то $a \notin M$ или $b \notin M$. Значит, можно считать, не теряя общности, что $h \in H^+ \setminus M$. Рассмотрим элемент $m \in M^+$. Так как $h \neq e$, то по лемме 16 имеют место неравенства $e \leqslant m < h$. Значит, $m \in H$, так как подгруппа H выпукла в группе G. Таким образом, $M^+ \subset H$. Так как M — направленная группа, то по условию 3) леммы 9 $M \subset H$. Теорема 3 доказана. $\square$

Лемма 17. *Пусть G — частично упорядоченная группа, M — выпуклая направленная подгруппа группы G, $m \in M$. Если $m = ab^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b группы G, то $a, b \in M$.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [21, лемма 2]. $\square$

Лемма 18. *Пусть G — частично упорядоченная группа, $e \neq a \in G^+$ и M — выпуклая подгруппа группы G. Если $a \in M$, то $[a] \subseteq M$.*

Доказательство. Пусть $x \in [a]^+$. Тогда $x \leqslant a^k$ для некоторого целого числа $k > 0$. Значит, $x \in M$, так как подгруппа M выпукла в группе G. Таким образом, $[a]^+ \subset M$. Так как $[a]$ — направленная группа, то по условию 3) леммы 9 $[a] \subseteq M$. □

Лемма 19. *Пусть G — частично упорядоченная группа. Если $a, b \in G^+ \setminus \{e\}$, то следующие условия эквивалентны:*

1) $[a] = [b]$;
2) *элементы a и b архимедово эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [7, теорема 2.6]. □

Доказательство теоремы 4. По лемме 15 H — выпуклая направленная подгруппа группы G. Пусть $h \in H \setminus M$. Так как G — $\mathcal{AO}$-группа, то $h = ab^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b группы G. Из леммы 17 следует, что a и b являются элементами подгруппы H. Из выпуклости этой подгруппы по лемме 18 следует, что $[a] \subseteq H$ и $[b] \subseteq H$. Если $a \in M$, то $b \notin M$ (иначе $h \in M$). Из теоремы 3 следует, что $M \subset [b]$. Значит, $a \in [b]$, т. е. $a \leqslant b^k$ для некоторого целого числа $k > 0$. Если $b \in M$, то $a \notin M$. Значит, $M \subset [a]$, т. е. $b \leqslant a^l$ для некоторого целого числа $l > 0$. Если $a \notin M$ и $b \notin M$, то по теореме 3 $M \subset [a]$ и $M \subset [b]$. Тогда $H \subseteq [a]$ и $H \subseteq [b]$. Следовательно, $[a] = H = [b]$. Остаётся применить лемму 19. Теорема 4 доказана. □

Лемма 20. *Пусть G — pl-группа, являющаяся лексикографическим расширением выпуклой нормальной подгруппы M с помощью частично упорядоченной группы G/M. Тогда M — направленная группа.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [10, лемма 33]. □

Лемма 21. *Пусть G — частично упорядоченная группа. Если элементы $a \neq e$ и $b \neq e$ почти ортогональны в группе G, то эти элементы несравнимы.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения можно найти в [9, лемма 4]. □

Лемма 22. *Пусть G — интерполяционная группа, элементы a и b почти ортогональны в группе G. Тогда элементы a^k и b^l почти ортогональны в группе G для любых целых чисел $k > 0$ и $l > 0$.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [11, следствие 3]. □

Доказательство теоремы 5. Из леммы 20 следует, что группа M является направленной, т. е. M — o-идеал группы G.

Так как pl-группа является $\mathcal{AO}$-группой, то из теоремы 4 следует, что H — выпуклая направленная подгруппа группы G.

Обоснуем нормальность подгруппы H в группе G. Если $H \neq M$, то существует элемент $h \in H \setminus M$. Из теоремы 4 следует, что $h = ab^{-1}$ для некоторых элементов $a, b \in H^{+}$. Так как $h \notin M$, то $a \notin M$ или $b \notin M$. Пусть $a \notin M$ и $g \in G$. Рассмотрим элемент $u = gag^{-1}$ из G. Это означает, что $u \notin M$ (иначе $a \in M$). В этом случае из теоремы 3 следует, что $M \subset [u]$. Значит, $H \subseteq [u]$, т. е. $a \in [u]^{+}$. Тогда $a \leqslant u^{k}$ для некоторого целого числа $k > 0$. Таким образом, $a \leqslant ga^{k}g^{-1}$, и справедливы неравенства $e \leqslant g^{-1}ag \leqslant a^{k}$. Из выпуклости подгруппы H в группе G следует, что $g^{-1}ag \in H$ для любого элемента $g \in G$. Аналогично доказывается, что $g^{-1}bg \in H$ для любого элемента $g \in G$. Так как $g^{-1}hg = (g^{-1}ag)(g^{-1}bg)$, то $g^{-1}hg \in H$ для любого элемента $g \in G$. Следовательно, H — нормальная подгруппа группы G. Таким образом, справедливо утверждение 1).

Пусть далее $a \in G^{+} \setminus H$ и $h \in H$. Если $h \in M$, то по условию теоремы из леммы 16 следует, что $h < a$. Пусть $h \in H^{+} \setminus M$. Тогда $ah^{-1} = uv^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов u и v группы G. Отсюда следует справедливость неравенств $a^{-1}u = h^{-1}v \leqslant u, v$. Так как u и v почти ортогональны, то $(h^{-1}v)^{2} \leqslant v$, т. е. $v^{2} \leqslant h$. Значит, $v \in H$, так как подгруппа H выпукла в группе G. Тогда $u \notin H$ (иначе $a \in H$). Это означает, что $u \notin M$. Из теоремы 3 следует, что $M \subset [u]$, и $H \subseteq [u]$. В этом случае $v \in [u]$, т. е. $v \leqslant u^{k}$ для некоторого целого числа $k > 0$. Из леммы 22 следует, что элементы v и u^{k} почти ортогональны в группе G. Отсюда по лемме 21 получаем, что $v = e$. Таким образом, $ah^{-1} = u > e$, т. е. $a > h$. Следовательно, в силу леммы 16 G — лексикографическое расширение H. Значит, справедливо утверждение 2).

Рассмотрим элемент $h \in H \setminus M$. Из теоремы 4 следует, что $h = ab^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b, для которых $a \leqslant b^{k}$ для целого числа $k > 0$, или $b \leqslant a^{l}$ для целого числа $l > 0$, или элементы a и b архимедово эквивалентны. В первом случае, учитывая леммы 21 и 22, заключаем, что $a = e$, т. е. $h = b^{-1} \leqslant e$. Во втором случае из лемм 21 и 22 следует, что $b = e$, т. е. $h = a \geqslant e$. В третьем случае по лемме 19 получим равенство подгрупп $[a] = [b]$. Применение лемм 21 и 22 позволяет заключить, что $a = e = b$. Это означает, что утверждение 3) справедливо. Теорема 5 доказана полностью. □

4. Спрямляющие подгруппы

Лемма 23. *Пусть G — частично упорядоченная группа, M — спрямляющая направленная подгруппа группы G, a и b — почти ортогональные элементы группы G. Тогда $a \in M$ или $b \in M$.*

Доказательство. Допустим, что $a \notin M$ и $b \notin M$. По определению подгруппы M либо $Ma \leqslant Mb$, либо $Mb \leqslant Ma$.

Если $Ma \leqslant Mb$, то по определению частичного порядка на множестве правых смежных классов существует элемент $m \in M$, для которого $a \leqslant mb$. Так как подгруппа M является направленной, то по условию 2) леммы 9, существует элемент $n \in M$, для которого $e, m \leqslant n$. В этом случае $a \leqslant nb$, откуда следует, что $n^{-1}a \leqslant a, b$. Ввиду почти ортогональности элементов a и b заключаем, что $(n^{-1}a)^2 \leqslant a$, т. е. $a \leqslant n^2$. Так как M является выпуклой подгруппой в группе G, то $a \in M$, что противоречит выбору элемента a.

Если $Mb \leqslant Ma$, то $b \in M$, что противоречит выбору элемента b. □

Лемма 24. *Пусть G — частично упорядоченная группа, M — выпуклая направленная подгруппа группы G и $g \in G \setminus M$. Тогда существует выпуклая направленная подгруппа N, являющаяся значением элемента g в группе G, для которой $M \subseteq N$.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [4, теорема 1.1]. □

Лемма 25. *Пусть G — частично упорядоченная группа, M — спрямляющая направленная подгруппа в группе G, $M \subset H$ и $M \subset K$ для выпуклых направленных подгрупп H и K группы G. Тогда $H \subseteq K$ или $K \subseteq H$.*

Доказательство. Пусть $H \parallel K$. Тогда найдутся элементы $h \in H \setminus K$ и $k \in K \setminus H$. Так как H и K — направленные группы, то согласно утверждению 2) леммы 9 можно считать, что $e < h$ и $e < k$. Так как подгруппа M является спрямляющей, то $Mh \leqslant Mk$ или $Mk \leqslant Mh$. В первом случае $h \leqslant mk$ для некоторого элемента $m \in M$. Значит, $h \in K$, так как подгруппа K выпукла, но это противоречит выбору элемента h. Во втором случае придём к противоречию с выбором элемента k. □

Лемма 26. *Пусть G — частично упорядоченная группа, M — спрямляющая направленная подгруппа группы G. Если $a \in G^+ \setminus M$, то существует единственное значение A элемента a, для которого $M \subseteq A$.*

Доказательство. Так как $a \notin M$, то в силу леммы 24 существует выпуклая направленная подгруппа A, являющаяся значением элемента a, для которой $M \subseteq A$. Пусть выпуклая направленная подгруппа B является значением элемента a и $M \subseteq B$. Так как M — спрямляющая направленная подгруппа, то в силу леммы 25 $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$. Но различные значения элемента a несравнимы. Таким образом, $B = A$. □

Теорема 27. *Пусть G — $\mathcal{AO}$-группа, M — подгруппа группы G. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *M — спрямляющая направленная подгруппа;*
2) *M содержит хотя бы один элемент из каждой пары почти ортогональных элементов группы.*

Доказательство. По лемме 23 условие 2) является следствием условия 1).

Пусть выполняется условие 2). Рассмотрим правые смежные классы Mx и My для некоторых элементов $x, y \in G$. По условию теоремы $xy^{-1} = ab^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b группы G. По условию 2) $a \in M$ или $b \in M$.

Если $a \in M$, то

$$Mxy^{-1} = Mab^{-1} = Mb^{-1} \leqslant M.$$

Значит, $Mx \leqslant My$.

Если $b \in M$, то

$$Mxy^{-1} = Mb^{-1}c = Mc \geqslant M,$$

так как $e \leqslant c = bab^{-1}$. В этом случае $My \leqslant Mx$.

Таким образом, условие 1) справедливо. □

Соответствующее утверждение для pl-групп было доказано в [5].

Доказательство теоремы 6. Пусть G — $\mathcal{AO}$-группа. Тогда по [21, теорема 4] множество $L = \mathcal{L}(G)$ — полная решётка.

Обозначим через S множество всех спрямляющих направленных подгрупп группы G. Тогда $S \subset L$.

Пусть $M \in S$. Рассмотрим множество $U_M = \{H \in L \mid M \subseteq H\}$. По лемме 25 множество U_M является линейно упорядоченным относительно включения. Если $K \in U_M$, то $K \in L$ и $M \subseteq K$. Из теоремы 27 следует, что M содержит хотя бы один элемент из каждой пары почти ортогональных элементов группы G. Значит, подгруппа K обладает таким же свойством в группе G. По теореме 27 K является спрямляющей направленной подгруппой группы G, т. е. $K \in S$. Следовательно, $U_M \subset S$. Теорема 6 доказана. □

Доказательство теоремы 7. По лемме 15 пересечение множества подгрупп из $\mathcal{L}(G)$ принадлежит $\mathcal{L}(G)$. Пусть M — регулярная подгруппа и $M = \bigcap\limits_{i \in I} M_i$ для некоторых подгрупп $M_i \in \mathcal{L}(G)$. Тогда существует такой элемент $g \in G$, что M является значением элемента g в группе G. Если $M \subset M_i$ для всех $i \in I$, то $g \in M$, что противоречит выбору элемента g. Значит, найдётся индекс $j \in I$, для которого $M = M_j$. Таким образом, подгруппа M неразложима в пересечение.

Пусть далее M удовлетворяет условию 2). По [4, теорема 1.1] $M = \bigcap\limits_{i \in I} M_i$, где M_i — регулярные подгруппы для всех $i \in I$. По условию 2) найдётся индекс $j \in I$, для которого $M = M_j$. Следовательно, подгруппа M является регулярной подгруппой. Таким образом, теорема 7 доказана. □

5. Значения элементов частично упорядоченных групп

Пусть до конца раздела G — pl-группа и $a \in G^+ \setminus \{e\}$.

Лемма 28. *Если M — выпуклая направленная подгруппа pl-группы G, то M — pl-группа.*

Доказательство. Так как G является $\mathcal{AO}$-группой, то по [20, следствие 3.5] M — $\mathcal{AO}$-группа. Поскольку G является интерполяционной группой, по [12, лемма 1] заключаем, что M — интерполяционная группа. □

Следующее утверждение вытекает из леммы 28.

Следствие 29. *Выпуклая направленная подгруппа $[a]$ является pl-группой.*

Исследуем свойства выпуклых направленных подгрупп pl-группы $[a]$.

Лемма 30. *Если M — собственная спрямляющая направленная подгруппа группы $[a]$, то существует единственная выпуклая направленная подгруппа A, являющаяся значением элемента a в группе $[a]$, для которой $M \subseteq A$.*

Доказательство. Так как $a \notin M$ (иначе $[a] = M$), то справедливость утверждения следует из леммы 26. □

Лемма 31. *Если M — максимальная выпуклая направленная подгруппа в группе $[a]$ и элементы u и v почти ортогональны в группе $[a]$, то $u \in M$ или $v \in M$.*

Доказательство. Если $u \notin M$, то по лемме 24 существует выпуклая направленная подгруппа U в группе $[a]$, являющаяся значением элемента u, для которой имеют место включения $M \subseteq U \subset [a]$. Из максимальности подгруппы M следует равенство подгрупп $M = U$, поэтому $v \in M$. Если $v \notin M$, то, рассуждая аналогично, найдём, что $u \in M$. □

Лемма 32. *Для подгруппы M группы $[a]$ следующие условия эквивалентны:*

1) *M — максимальная выпуклая направленная подгруппа группы $[a]$;*
2) *M — значение элемента a.*

Доказательство. Принимая во внимание определение значений элементов, заключаем, что условие 2) является следствием условия 1).

Пусть M — значение элемента a и имеют место включения $M \subset N \subseteq [a]$ для некоторой выпуклой направленной подгруппы N группы $[a]$. Тогда $a \in N$, и по лемме 18 $[a] \subseteq N$, т. е. $N = [a]$. Следовательно, M — максимальная выпуклая направленная подгруппа в группе $[a]$. □

Лемма 33. *Если M — значение элемента a в группе $[a]$, то M — спрямляющая подгруппа в группе $[a]$.*

Доказательство. В силу леммы 32 M — максимальная выпуклая направленная подгруппа группы $[a]$. По лемме 31 M содержит хотя бы один элемент из каждой пары почти ортогональных элементов в группе $[a]$. Так как pl-группа $[a]$ является $\mathcal{AO}$-группой, то по теореме 27 M — спрямляющая подгруппа в группе $[a]$. □

Лемма 34. *Если M — выпуклая направленная подгруппа частично упорядоченной группы G, то подгруппа $x^{-1}Mx$ также является выпуклой и направленной в группе G для любого элемента $x \in G$.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [5, лемма 2.3]. □

Доказательство теоремы 8. Пусть a — особый элемент в группе $[a]$. Тогда существует единственная выпуклая направленная подгруппа M, являющаяся значением элемента a в группе $[a]$. В силу леммы 33 M — спрямляющаяся направленная подгруппа в группе $[a]$. Из леммы 32 следует, что M — единственная максимальная выпуклая направленная подгруппа в группе $[a]$.

Пусть K — собственная выпуклая направленная подгруппа в группе $[a]$. Тогда $a \notin K$ (иначе $K = [a]$). Из леммы 24 следует, что подгруппа K включена в некоторое значение элемента a. Значит, $K \subseteq M$.

Пусть $x \in [a]$. Тогда, по лемме 34 $x^{-1}Mx$ — выпуклая направленная подгруппа в группе $[a]$. Отсюда по доказанному следует, что $x^{-1}Mx \subseteq M$ для любого элемента $x \in [a]$. Значит, M — нормальная подгруппа группы $[a]$, т. е. M — o-идеал группы $[a]$.

Пусть $e \leqslant b \in [a] \setminus M$ и $m \in M$. Рассмотрим элемент $c = bm^{-1}$. Если $c < e$, то $b < m$. Значит, $b \in M$, так как M — выпуклая подгруппа группы $[a]$, что противоречит выбору элемента b.

Пусть $c \parallel e$. Тогда $c = xy^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов x и y из $\mathcal{AO}$-группы $[a]$. В силу леммы 31 $x \in M$ или $y \in M$. Если $x \in M$, то из неравенств $m^{-1} \leqslant c \leqslant x$ следует, что $c \in M$, так как подгруппа M выпукла в группе $[a]$. Но тогда $b \in M$, что противоречит выбору элемента b. Таким образом, $x \notin M$ и $y \in M$.

Из леммы 18 следует, что подгруппа $[x]$ не включена в идеал M. Из доказанного выше в силу максимальности подгруппы M выводится равенство подгрупп $[x] = [a]$. Таким образом, $y \in [x]$. Тогда, учитывая леммы 21 и 22, заключаем, что $y = e$, но это противоречит выбору элемента c. Таким образом, $c > e$, т. е. $m < b$.

В силу леммы 16 подгруппа $[a]$ является лексикографическим расширением подгруппы M.

Обратно, пусть $[a]$ — лексикографическое расширение спрямляющей нормальной подгруппы M. Из леммы 20 следует, что M — направленная группа. По лемме 30 существует единственная выпуклая направленная подгруппа A, являющаяся значением элемента a в группе $[a]$, для которой $M \subseteq A$. Пусть B — некоторое значение элемента a в группе $[a]$. Так как $a \notin M$, то B не является подмножеством подгруппы M. По теореме 3 справедливо включение $M \subset B$. По доказанному $A = B$. Следовательно, a — особый элемент в группе $[a]$. Теорема 8 доказана полностью. □

Литература

[1] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[2] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[3] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[4] Ширшова Е. Е. О псевдо структурно упорядоченных группах // Группы и модули. Теория игр.: Сб. тр. МОПИ им. Н. К. Крупской. — М., 1973. — С. 10—18.

[5] Ширшова Е. Е. Ассоциированные подгруппы псевдо-решёточно упорядоченных групп // Алгебраические системы.: Сб. тр. Ив. гос. унив. — Иваново, 1991. — С. 78—85.

[6] Ширшова Е. Е. Лексикографические расширения и pl-группы // Фундамент. и прикл. матем. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 1133—1138.

[7] Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах pl-групп // Фундамент. и прикл. матем. — 1997. — Т. 3, вып. 1. — С. 303—314.

[8] Ширшова Е. Е. Гомоморфизмы, сохраняющие p-ортогональность // Фундамент. и прикл. матем. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 939—952.

[9] Ширшова Е. Е. Об обобщении понятия ортогональности и группах Рисса // Матем. заметки. — 2001. — Т. 69, № 1. — С. 122—132.

[10] Ширшова Е. Е. О первичных радикалах и сплетениях частично упорядоченных групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 8. — С. 245—261.

[11] Ширшова Е. Е. О выпуклых подгруппах групп с интерполяционным условием // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 187—199.

[12] Ширшова Е. Е. О свойствах интерполяционных групп // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93, № 2. — С. 295—304.

[13] Ширшова Е. Е. О значениях элементов частично упорядоченных групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 3. — С. 199—212.

[14] Conrad P. The lattice of all convex l-subgroups of lattice-ordered group // Czech. Math. J. — 1965. — Vol. 15. — P. 101—123.

[15] Conrad P. Representation of partially ordered Abelian groups as groups of real valued functions // Acta Math. — 1966. — Vol. 116. — P. 199—221.

[16] Glass A. M. W. Polars and their application in directed interpolation groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 166. — P. 1—25.

[17] Glass A. M. W. The lattice convex directed subgroups of a directed interpolation group // Notices Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 19, 72T-A94. — P. A-430.

[18] Holland W. Ch. The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set // Michigan Math. J. — 1963. — Vol. 10, no. 4. — P. 399—408.

[19] Shirshova E. E. On extensions of po-groups // Contemporary Math. — 1992. — Vol. 131. — P. 345—353.

[20] Shirshova E. E. On Archimedean extensions of AO-groups // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 102, no. 6. — P. 4662—4666.

[21] Shirshova E. E. On groups with the almost orthogonality condition // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 10. — P. 4803—4818.