# Группы Malt абелевых групп

**А. А. АГАФОНОВ**
*Нижегородский государственный педагогический университет*
e-mail: agafkaaa@mail.ru

**Н. Ф. КАМАРА**
*Конакрийский государственный университет, Гвинея*
e-mail: amseb@mail.ru

**А. М. СЕБЕЛЬДИН**
*Нижегородский государственный педагогический университет*
e-mail: sebeldinam@rambler.ru

**Д. А. СЕБЕЛЬДИН**
*Донской государственный технический университет*
e-mail: amseb@mail.ru

**С. Л. ФОФАНА**
*Конакрийский государственный университет, Гвинея*
e-mail: amseb@mail.ru

УДК 512.541

**Ключевые слова:** абелева группа, группа Malt, определяемость.

**Аннотация**

В статье рассматривается вопрос об определяемости абелевой группы своей группой Malt.

**Abstract**

*A. A. Agafonov, N. F. Kamara, A. M. Sebeldin, D. A. Sebeldin, S. L. Fofana,* **Malt** *groups of Abelian groups*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 11—15.

We consider the question about determination of Abelian group by its Malt group.

Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ принадлежат классу $\mathbf{B}(\mathbf{CD}1)$ абелевых групп без кручения ранга 1 и

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n,$$

то говорят, что $A$ принадлежит классу $\mathbf{B}(\mathbf{CD}n)$ вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга $n$. Через $\tau(A_i)$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ будем обозначать тип группы $A_i$. Имеются следующие известные результаты.

**Результат 1.** $\mathrm{Hom}(A_1, A_2) \neq 0$, если и только если $\tau(A_1) \leqslant \tau(A_2)$, и в этом случае

$$\mathrm{Hom}(A_1, A_2) \cong A^*,$$

где $A^*$ — группа класса $\mathbf{B}(\mathbf{CD}1)$, такая что

$$\tau(A_1) + \tau(A_2) = \tau(A^*).$$

**Результат 2.** Если $G$, $G_1$, $G_2$, $H$, $H_1$, $H_2$ принадлежат классу $\mathbf{B}(\mathbf{CD}1)$, то

$$\mathrm{Hom}(G, H_1 \oplus H_2) \cong \mathrm{Hom}(G, H_1) \oplus \mathrm{Hom}(G, H_2)$$

и

$$\mathrm{Hom}(G_1 \oplus G_2, H) \cong \mathrm{Hom}(G_1, H) \oplus \mathrm{Hom}(G_2, H).$$

Для $A$ из класса $\mathbf{B}(\mathbf{CD}n)$ мы примем следующие обозначения:

$$\mathrm{Malt}\, A = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A, A), A),$$

$$A_{ij} = \mathrm{Hom}(A_i, A_j), \quad A_{ijk} = \mathrm{Hom}(A_{ij}, A_k) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A_i, A_j), A_k).$$

Согласно результату 2 сразу получаем, например, для $A = A_1 \oplus A_2$, что

$$\begin{aligned}\mathrm{Malt}\, A = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A, A), A) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A_1 \oplus A_2, A_1 \oplus A_2), A_1 \oplus A_2) \cong \\ \cong \mathrm{Hom}(A_{11} \oplus A_{12} \oplus A_{21} \oplus A_{22}, A_1 \oplus A_2) \cong \\ \cong A_{111} \oplus A_{112} \oplus A_{121} \oplus A_{122} \oplus A_{211} \oplus A_{212} \oplus A_{221} \oplus A_{222} = \bigoplus A_{ijk},\end{aligned}$$

где $i$, $j$, $k$ принимают значения 1 или 2.

Рассмотрим следующие вопросы для $A, B \in \mathbf{B}(\mathbf{CD}n)$.

1. Когда $\mathrm{Malt}\, A = 0$?
2. В каком случае $\mathrm{Malt}\, A \cong A$?
3. Когда $\mathrm{Malt}\, A \cong \mathrm{Malt}\, B$ влечёт $A \cong B$?
4. В каком случае $A$ является прямым слагаемым $\mathrm{Malt}\, A$?

**Определение 1.** Если $A$ является группой без кручения ранга 1, то говорят, что $A$ имеет идемпотентный тип $\tau(A)$, если $\tau(A)$ обладает характеристикой, которая содержит только 0 и $\infty$.

**Предложение 1.** *Если $A_i$ — абелева группа без кручения ранга 1, то*

*$\mathrm{Hom}(A_i, A_i) \cong A_i$, если и только если $\tau(A_i)$ идемпотентен.*

**Доказательство.** Если $\tau(A_i)$ идемпотентен, то $\tau(A_i) - \tau(A_i) = \tau(A_i)$ или

$$\tau\big(\mathrm{Hom}(A_i, A_i)\big) = \tau(A_i) - \tau(A_i) = \tau(A_i).$$

Поэтому

$$\mathrm{Hom}(A_i, A_i) = A_{ii} \cong A_i.$$

И наоборот, если $\mathrm{Hom}(A_i, A_i) \cong A_i$, то

$$\tau(\mathrm{Hom}(A_i, A_i)) = \tau(A_i),$$

и следовательно, $\tau(A_i) - \tau(A_i) = \tau(A_i)$. Поэтому тип $\tau(A_i)$ идемпотентен. □

**Предложение 2.** *Для любой абелевой группы $A_i$ без кручения ранга 1 верно равенство*

$$\mathrm{Malt}\, A_i = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A_i, A_i), A_i) \cong A_i.$$

**Доказательство.** Из формулы
$$\mathrm{Malt}\, A_i = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A_i, A_i), A_i) = \mathrm{Hom}(A_{ii}, A_i) = A_{iii}$$
следует, что
$$\tau(A_{ii}) = \tau(A_i) - \tau(A_i)$$
и
$$\tau(A_{iii}) = \tau(A_i) - \tau(A_{ii}) = \tau(A_i) - \tau(A_i) + \tau(A_i) = \tau(A_i).$$ □

**Предложение 3.** *Для любой группы $A \in \mathbf{B}(\mathbf{CD}n)$*
$$\mathrm{Malt}\, A \neq 0.$$

**Доказательство.** Чтобы доказать предложение, достаточно рассмотреть
$$A_{111} = \mathrm{Malt}\, A_1 \cong A_1 \neq 0.$$
Поэтому $\mathrm{Malt}\, A \neq 0$. □

**Предложение 4.** *Пусть $A \in \mathbf{B}(\mathbf{CD}n)$ и все типы $\tau(A_i)$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ попарно несравнимы, $\tau(A_i) \parallel \tau(A_j)$ $(i \neq j)$, и идемпотентны. Тогда*
$$\mathrm{Malt}\, A \cong A.$$

**Доказательство.** Заметим, что
$$A_{iii} \cong A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$
Покажем, что
$$A_{ijk} = 0,$$
если есть хотя бы одна пара равных индексов. Ясно, что при $i \neq j$ $A_{ij} = 0$, и следовательно, $A_{ijk} = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$.

Для всех $i \neq k$ справедливо $\tau(A_{ii}) = \tau(A_i) \neq \tau(A_k)$. Поэтому $A_{iik} = 0$ для всех $i \neq k$, и $\mathrm{Malt}\, A \cong A$. □

Пусть $A$ — абелева группа без кручения ранга 1. Положим
$$P[\tau(A)] = P(A) = \{p \in P \colon pA = A\}.$$

**Определение 2.** Пусть $A_1, A_2 \in \mathbf{B}(\mathbf{CD}n)$. Назовём типы $\tau(A_1)$, $\tau(A_2)$ несравнимыми по бесконечности, если
$$P[\tau(A_1)] \neq \varnothing, \quad P[\tau(A_2)] \neq \varnothing \quad \text{и} \quad P[\tau(A_1)] \cap P[\tau(A_2)] = \varnothing,$$
и тогда будем писать
$$\tau(A_1) \parallel_\infty \tau(A_2).$$

**Предложение 5.** *Пусть $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n \in \mathbf{B}(\mathbf{CD}n)$. Тогда $\mathrm{Malt}\, A \cong A$ тогда и только тогда, когда типы $\tau(A_1), \tau(A_2), \ldots,$ $\tau(A_n)$ попарно несравнимыми по бесконечности: $\mathrm{Malt}\, A \cong A$ тогда и только тогда, когда $\tau(A_i) \parallel_\infty \tau(A_j)$ для $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.*

**Доказательство.** Здесь $\mathrm{rk}(A) = n$ и $\mathrm{Malt}\,A$ имеет $n^3$ прямых слагаемых. Предположим, что $\tau(A_i) \parallel_\infty \tau(A_j)$ при $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Имеем (см. предложение 2)

$$A_{iii} \cong A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим все случаи: $i \neq j$, или $i \neq k$, или $k \neq j$.

a) Слагаемые $A_{iik}$ с $i \neq k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

b) Слагаемые $A_{ikk}$ с $i \neq k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

c) Слагаемые $A_{iki}$ с $i \neq k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

d) Слагаемые $A_{ijk}$ с $i \neq j \neq k$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$.

a) Для

$$A_{iik} = \mathrm{Hom}(A_{ii}, A_k) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A_i, A_i), A_k)$$

имеем

$$P(A_{ii}) = P[\tau(A_{ii})] = P[\tau(A_i)] = P(A_i),$$

и поэтому

$$\tau(A_{ii}) \parallel_\infty \tau(A_k)$$

влечёт $A_{iik} = 0$.

b) Для

$$A_{ikk} = \mathrm{Hom}(A_{ik}, A_k) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A_i, A_k), A_k)$$

имеем

$$\tau(A_i) \parallel_\infty \tau(A_k),$$

и поэтому $A_{ik} = 0$ и $A_{ikk} = 0$.

c) Для

$$A_{iki} = \mathrm{Hom}(A_{ik}, A_i) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A_i, A_k), A_i)$$

имеем

$$\tau(A_i) \parallel_\infty \tau(A_k),$$

поэтому $A_{ik} = 0$ и $A_{iki} = 0$.

d) Для

$$A_{ijk} = \mathrm{Hom}(A_{ij}, A_k) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A_i, A_j), A_k)$$

имеем $A_{ij} = 0$, так как $\tau(A_i) \parallel_\infty \tau(A_j)$, и поэтому $A_{ijk} = 0$.

Таким образом,

$$\mathrm{Malt}\,A \cong A_{111} \oplus A_{222} \oplus \ldots \oplus A_{nnn} \cong A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n \cong A.$$

Обратно, предположим, что

$$\mathrm{Malt}\,A \cong A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n.$$

Из предложения 2 получаем, что

$$A_{iii} \cong A_i$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, поэтому

$$\mathrm{Malt}\,A \cong A_{111} \oplus A_{222} \oplus \ldots \oplus A_{nnn}.$$

Рассмотрим $A_{iik}$ ($i \neq k$). Имеем, что $A_{iik} = 0$ влечёт $\tau(A_{ii}) > \tau(A_k)$ или $\tau(A_{ii}) \parallel \tau(A_k)$. Однако $A_{kki} = 0$ влечёт $\tau(A_{kk}) > \tau(A_i)$ или $\tau(A_{kk}) \parallel \tau(A_i)$. Так как

$$P(A_k) = P(A_{kk}) \quad (k = 1, 2, 3),$$

имеем, что $\tau(A_{ii})//\tau(A_k)$ тогда и только тогда, когда $\tau(A_i) \parallel_\infty \tau(A_k)$, и $\tau(A_{kk})//\tau(A_i)$ тогда и только тогда, когда $\tau(A_k) \parallel_\infty \tau(A_i)$.

Предположим, что

$$\tau(A_{ii}) > \tau(A_k), \quad \tau(A_{kk}) > \tau(A_i).$$

Тогда

$$P(A_k) = P(A_{kk}) \supset P(A_i), \quad P(A_k) \neq P(A_i)$$

и

$$P(A_i) = P(A_{ii}) \supset P(A_k), P(A_k) \neq P(A_i).$$

Противоречие. Таким образом, для $i \neq k$ имеем

$$\tau(A_k) \parallel_\infty \tau(A_i).$$

□

**Предложение 6.** *Пусть* $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n \in \mathbf{B}(\mathbf{CD}n)$. *Тогда* $A$ *изоморфна прямому слагаемому группы* $\mathrm{Malt}\, A$.

**Доказательство.** Из предложения 2 получаем, что $A_{iii} \cong A_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). □

**Предложение 7.** *Если* $A$ *и* $B$ *принадлежат классу* $\mathbf{B}(\mathbf{CD}1)$, *то* $\mathrm{Malt}\, A \cong \mathrm{Malt}\, B$ *влечёт* $A \cong B$.

**Доказательство.** Применяя предложение 2, получаем сразу, что $\mathrm{Malt}\, A \cong A$, $\mathrm{Malt}\, B \cong B$. Следовательно, $A \cong B$. □

**Предложение 8.** *Пусть* $A$ *и* $B$ *принадлежат классу вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга:*

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n, \quad B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_m,$$

*причём*

$$\tau(A_i) \parallel_\infty \tau(A_j), \quad \tau(B_k) \parallel_\infty \tau(B_s) \quad (i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad k, s \in \{1, 2, \ldots, m\}).$$

*Тогда* $\mathrm{Malt}\, A \cong \mathrm{Malt}\, B$ *влечёт* $A \cong B$.

**Доказательство.** Из предложения 5 имеем, что $\mathrm{Malt}\, A \cong A$, $\mathrm{Malt}\, B \cong B$. Поэтому $A \cong \mathrm{Malt}\, A \cong \mathrm{Malt}\, B \cong B$. □