Почти изоморфизм для абелевых групп без кручения счётного ранга

Е. А. БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
e-mail: blagoveschenskaya@pgups.ru, kblag2002@yahoo.com

А. В. ФИЛИМОНОВ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
e-mail: filalex@inbox.ru

А. Е. ТРИФОНОВ
Филиал акционерного общества «Концерн радиостроения „Вега“» в г. Санкт-Петербурге
e-mail: algisothal@gmail.com

УДК 512.541

Ключевые слова: абелевы группы без кручения, кольца эндоморфизмов, прямые разложения, почти изоморфизм.

Аннотация

Обосновывается расширение понятия почти изоморфизма с абелевых групп без кручения конечного ранга на классы групп бесконечных рангов и доказывается эквивалентность его формулировок для определённого класса групп счётного ранга.

Abstract

E. A. Blagoveshchenskaya, A. V. Filimonov, A. E. Trifonov, Near isomorphism for countable rank torsion-free Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 17—28.

The notion of a near isomorphism is extended from finite-rank torsion-free Abelian groups to some classes of infinite-rank groups. The equivalence of different formulations of this notion for a certain class of countable-rank groups is proved.

1. Введение

Возможность классификации алгебраических структур с точностью до изоморфизма существует не всегда, и тогда оказывается необходимым изобретение

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 17—28.
© 2019 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

новых понятий эквивалентности, более слабых, чем изоморфизм. Это в полной мере относится к теории абелевых групп без кручения, в которой важными инструментами классификации оказались lk квазиизоморфизм» и «почти изоморфизм» (обозначение $\cong_{\mathrm{nr}}$). Последний имеет особую важность в ситуации наличия неизоморфных прямых разложений абелевых групп без кручения, так как, в отличие от квазиизоморфизма, сохраняет свойства этих разложений в следующем смысле.

Теорема 1.1 (Д. Арнольд [3, 12.9 (b), с. 144]). *Если X и Y — почти изоморфные абелевы группы без кручения конечного ранга и $X = X_1 \oplus X_2$, то $Y = Y_1 \oplus Y_2$ для некоторых групп $Y_1 \cong_{\mathrm{nr}} X_1$, $Y_2 \cong_{\mathrm{nr}} X_2$.*

Что касается самого понятия почти изоморфизма, то оно существует в различных эквивалентных формулировках.

Определение 1.2. Две абелевы группы без кручения конечного ранга G и H *почти изоморфны* (обозначение $G \cong_{\mathrm{nr}} H$), если для любого простого p существуют мономорфизмы $\Phi_p\colon G \to H$, $\Psi_p\colon H \to G$, для которых группы $G/H\Psi_p$ и $H/G\Phi_p$ конечны, и числа $[G : H\Psi_p]$ и p, а также $[H : G\Phi_p]$ и p являются взаимно простыми.

Почти изоморфизм является отношением эквивалентности на множестве абелевых групп без кручения конечного ранга, при этом это понятие допускает односторонние формулировки.

Определение 1.3. Пусть G и H — абелевы группы без кручения конечного ранга. Тогда G и H *почти изоморфны* тогда и только тогда, когда для каждого простого p существует мономорфизм $\Phi_p\colon G \to H$, для которого индекс $[H : G\Phi_p]$ конечен и p не делит $[H : G\Phi_p]$.

Наиболее полный перечень определений почти изоморфизма содержится в [11, теорема 9.1.4]. В классе вполне разложимых групп конечного ранга почти изоморфизм совпадает с обычным изоморфизмом, и естественное стремление расширить данное понятие на группы бесконечных рангов должно учитывать и не нарушать эту его характеристику. К тому же необходимо иметь возможность применения нового определения к группам конечного ранга таким образом, чтобы оно совпадало с почти изоморфизмом в прежнем смысле, так как прямые слагаемые групп бесконечных рангов могут иметь конечные ранги. Оказалось, что всем этим требованиям для групп изучаемых классов (см. [4,5,7,8]) удовлетворяет следующее определение (здесь и далее $(W)_p$ обозначает p-примарную компоненту периодической группы W).

Определение 1.4 [7]. Пусть G и H — абелевы группы без кручения. Тогда G и H называются *почти изоморфными* (обозначение $G \cong_{\mathrm{nr}} H$), если для любого простого p существуют мономорфизмы $\Phi_p\colon G \to H$ и $\Psi_p\colon H \to G$, такие что

1) группы $H/G\Phi_p$ и $G/H\Psi_p$ являются периодическими;
2) $(H/G\Phi_p)_p = 0 = (G/H\Psi_p)_p$;

3) для любых сервантных подгрупп конечного ранга $G' \subseteq G$ и $H' \subseteq H$ фактор-группы $(G'\Phi_p)_*^H/G'\Phi_p$ и $(H'\Psi_p)_*^G/H'\Psi_p$ являются конечными.

Здесь и далее

$$V_*^X = \{g \in X\colon \text{существует } n \in \mathbb{N}, \text{ для которого } ng \in V\}$$

обозначает сервантную оболочку подгруппы V в X; если $V_*^X = V$, пишем $V \subseteq_* X$.

Для некоторых рассматриваемых классов групп бесконечных рангов данная формулировка может быть упрощена, как будет показано далее. Однако из [7, пример 2.2] следует, что в случае произвольных абелевых групп без кручения бесконечного (не обязательно счётного) ранга все перечисленные в определении 1.4 условия являются необходимыми для соблюдения вышеперечисленных условий.

Здесь и далее под словом «группа» мы всегда понимаем абелеву группу без кручения.

2. Гомоморфные отображения в некотором классе абелевых групп без кручения счётного ранга

Пусть τ и σ обозначают произвольные типы согласно их классическому определению (см. [10, гл. 13]). Традиционно в абелевой группе без кручения X выделяются некоторые подгруппы в следующих специальных обозначениях: $X^*(\tau) = \sum\limits_{\sigma>\tau} X(\sigma)$ и $X^\sharp(\tau)$ — сервантная оболочка $X^*(\tau)$ в X, где $X(\sigma) = \{g \in X\colon \operatorname{tp}_X g \geqslant \sigma\}$ — вполне характеристическая подгруппа в X.

Группа X называется τ-однородной, если все её элементы принадлежат одному типу τ.

Тип τ называется *критическим* для абелевой группы без кручения X и является элементом множества критических типов $T_{\mathrm{cr}}(X)$, если $X(\tau)/X^\sharp(\tau) \neq 0$ (см. [11, с. 37, определение 2.4.6]). Группа X называется *блочно-жёсткой*, если множество $T_{\mathrm{cr}}(X)$ состоит из попарно несравнимых типов, как в нижеследующем определении.

Мы называем группу X группой *кольцевого* типа, если $T_{\mathrm{cr}}(X)$ состоит только из идемпотентных типов, т. е. тех, которые представляются характеристиками, состоящими из символов 0 и ∞ (см. [11, с. 13]).

Далее будут использоваться возможность погружения абелевой группы без кручения X в её делимую оболочку $\mathbb{Q}X = X \otimes \mathbb{Q}$ и обозначение $\frac{X}{q}$ для группы Y, если $qY = X$.

Рассмотрим следующий класс групп не более чем счётного ранга.

Определение 2.1 [1, определение 2.6]. Пусть T — счётное множество идемпотентных попарно несравнимых типов. Абелева группа без кручения X

принадлежит классу $\mathcal{C}'$, если она содержит вполне разложимую подгруппу

$$R(X) = C_X = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(C_X)} C_\tau,$$

для которой выполнены следующие условия:

1) $T_{\mathrm{cr}}(C_X) \subseteq T$;
2) C_τ — сервантная τ-однородная подгруппа конечного ранга в X для каждого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(C_X)$;
3) $X/C_X = \bigoplus\limits_{p \in P_X} T_p^X$ для некоторого множества простых чисел P_X и $p^{n_p(X)}$-ограниченных p-примарных групп T_p^X;
4) для каждого $p \in P_X$ множество

$$\{q \in P_X : [T_p^X] \cap [T_q^X] \neq \varnothing\}$$

конечно; здесь $[T_p^X]$ совпадает с наименьшим из подмножеств $\mathfrak{T}_p \subset \subset T_{\mathrm{cr}}(C_X)$, для которых

$$T_p^X \subseteq \left(\left(\bigoplus_{\tau \in \mathfrak{T}_p} C_\tau\right)_*^X + C_X\right)/C_X.$$

Лемма 2.2. *Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'$ и $R(X) \cong R(Y)$, и пусть $\Phi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Тогда $\Phi|_{R(X)} \in \mathrm{Hom}\big(R(X), R(Y)\big)$.*

Доказательство. Для любого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}\big(R(X)\big) = T_{\mathrm{cr}}\big(R(Y)\big)$ выполняется $R(X)_\tau \Phi \subset Y(\tau) = R(Y)_\tau$, следовательно, $R(X)\Phi \subset R(Y)$. □

Для удобства введём подкласс $\mathcal{C}'(A)$ групп из $\mathcal{C}'$, содержащих некоторую фиксированную вполне разложимую подгруппу

$$A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau$$

счётного ранга, для которой $T = T_{\mathrm{cr}}(A)$. Пусть

$$\mathcal{C}'(A) = \{X \in \mathcal{C}' : R(X) = A \subset X,\ X/A \text{ периодическая и } A_\tau \subseteq_* X \text{ для всех } \tau \in T\}. \quad (1)$$

По определениям 2.1 и (1) все однородные компоненты A_τ группы A сервантны в $X \in \mathcal{C}'(A)$, и мы называем вполне характеристическую подгруппу $A = R(X)$ *регулятором* группы X в соответствии с теорией блочно-жёстких почти вполне разложимых групп, т. е. конечных существенных расширений вполне разложимых групп конечного ранга (см. [11]). Заметим, что $A_\tau = = R(X)_\tau = R(X)(\tau) = X(\tau)$ — вполне характеристические подгруппы групп X и $R(X)$ для любого $\tau \in T$. Мы определяем гомоморфизмы Φ в классе $\mathcal{C}'$ их действием на A и полагаем, что Φ действует на всей делимой группе $\mathbb{Q}A = A \otimes \mathbb{Q}$.

Особую важность имеют мономорфизмы, т. е. элементы из $\mathrm{Mon}(X,Y)$, инъективно действующие на A, где $X,Y \in \mathcal{C}'(A)$.

Рассмотрим подкласс $\mathcal{C}'_e(A)$ класса $\mathcal{C}'(A)$, состоящий из групп X, таких что $eX \subset A$ для натурального числа e, допускается $e = p^{n_p}$ — степень простого числа p. Очевидно, $X \in \mathcal{C}'_e(A)$ означает, что $X \in \mathcal{C}'_{e'}(A)$, если $e \mid e'$. Имеется цепь

$$\mathcal{C}'_e(A) \subset \mathcal{C}'(A) \subset \mathcal{C}'.$$

Из $X \subset \mathbb{Q}A$ и определения 2.1 группы $X \in \mathcal{C}'(A)$ получается её так называемое примарно-факторное представление в виде суммы:

$$X = \sum_{p \in P_X} X_{(p)}, \quad \text{где} \quad X_{(p)} = X \cap \frac{A}{p^{n_p(X)}} \in \mathcal{C}'_{p^{n_p(X)}}(A) \quad \text{и} \quad X_{(p)}/A = T_p^X. \tag{2}$$

Мы естественно полагаем $X_{(p)} = A$ для простых p, не принадлежащих множеству P_X. Тогда группа записывается в виде $X = \sum\limits_{p \in \mathbb{P}} X_{(p)}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Очевидно, $X/A = \sum\limits_{p \in \mathbb{P}} X_{(p)}/A$.

Лемма 2.3. *Пусть $X \in \mathcal{C}'(A)$. Тогда*

1) *$X_{(p)}$ — вполне характеристические подгруппы в X для всех простых p;*
2) *$X_{(p)} \cap X_{(q)} = A$, если $p \neq q$.*

Доказательство. Пусть $p \in P_X$. Напомним, что A — вполне характеристическая подгруппа в X. Значит, для любого $\phi \in \mathrm{End}\, X$ имеем $\phi \in \mathrm{End}(A)$ и $\phi \in \mathrm{End}\big(\frac{A}{p^{n_p(X)}}\big)$. Отсюда получаем утверждения 1) и 2), так как $\frac{A}{p^{n_p(X)}} \cap \frac{A}{q^{n_q(X)}} = A$, если $p \neq q$. Если $p \notin P_X$, утверждения очевидны. □

Следствие 2.4. *Пусть $X,Y \in \mathcal{C}'(A)$ и $\Phi \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Тогда $\Phi|_{X_{(p)}} \in \mathrm{Hom}(X_{(p)}, Y_{(p)})$ для всех p.*

Доказательство. По лемме 2.2 $\Phi|_A \in \mathrm{End}(A)$ и, следовательно, $\Phi|_{\frac{A}{p^{n_p}}} \in \mathrm{End}\big(\frac{A}{p^{n_p}}\big)$, где $p^{n_p} = \max\big(p^{n_p(X)}, p^{n_p(Y)}\big)$. Тогда образ группы $X_{(p)} = X \cap \frac{A}{p^{n_p}}$ при отображении Φ входит в $Y_{(p)} = Y \cap \frac{A}{p^{n_p}}$, как и требовалось. □

Пусть $X,Y \in \mathcal{C}'(A)$. По лемме 2.2 $\Phi|_A \in \mathrm{End}(A)$ для всех $\Phi \in \mathrm{Mon}(X,Y)$, и, поскольку каждая τ-однородная компонента A_τ сервантна в X и в Y, мы получаем $A_\tau\Phi \subseteq A_\tau$. Значит, если $a = a'\Phi$, где $a \in A_\tau$, $a' \in X$, то $a' \in A_\tau$. Следовательно, если $X,Y \in \mathcal{C}'(A)$, то $A_\tau/A_\tau\Phi$ может рассматриваться как подгруппа группы $Y/X\Phi$ для каждого $\tau \in T = T_{\mathrm{cr}}(A)$, т. е.

$$A_\tau/A_\tau\Phi \subset Y/X\Phi, \quad \text{если} \quad \Phi \in \mathrm{Mon}(X,Y). \tag{3}$$

Нам понадобится следующее замечание.

Замечание 2.5. Если $X,Y \in \mathcal{C}'(A)$ и $\Phi \in \mathrm{Mon}(X,Y)$, причём $(Y/X\Phi)_p = 0$ для некоторого простого p, то

$$(A/A\Phi)_p = \bigoplus_{\tau \in T} (A_\tau/A_\tau\Phi)_p = 0.$$

Лемма 2.6. *Пусть* $X, Y \in \mathcal{C}'(A)$ *и* $\Phi \in \mathrm{Mon}(X, Y)$. *Если* $(A/A\Phi)_p = 0$, *то* $(Y/X\Phi)_p \cong (Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi)_p$.

Доказательство. Имеем

$$(Y/X\Phi)_p \cong (Y/A\Phi)_p/(X\Phi/A\Phi)_p$$

и

$$(Y/A)_p = Y_{(p)}/A \cong (Y_{(p)}/A\Phi)/(A/A\Phi).$$

Из $(A/A\Phi)_p = 0$ следует, что

$$Y_{(p)}/A = (Y_{(p)}/A)_p \cong (Y_{(p)}/A\Phi)_p.$$

По той же причине

$$Y_{(p)}/A \cong (Y/A)_p \cong (Y/A\Phi)_p/(A/A\Phi)_p \cong (Y/A\Phi)_p.$$

Значит, $(Y/A\Phi)_p \cong (Y_{(p)}/A\Phi)_p$.

Далее,

$$(X\Phi/A\Phi)_p \cong (X/A)_p \cong X_{(p)}/A \cong X_{(p)}\Phi/A\Phi = (X_{(p)}\Phi/A\Phi)_p,$$

так как отображение Φ инъективно. Отсюда получаем

$$(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi)_p \cong (Y_{(p)}/A\Phi)_p/(X_{(p)}\Phi/A\Phi)_p \cong (Y/A\Phi)_p/(X\Phi/A\Phi)_p \cong (Y/X\Phi)_p,$$

как и требовалось. □

Следствие 2.7. *Пусть* $X = \sum\limits_{p \in P_X} X_{(p)}$ *и* $Y = \sum\limits_{p \in P_Y} Y_{(p)}$ — *группы из класса* $\mathcal{C}'(A)$ *и* $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$. *Тогда* $P_X = P_Y$.

Доказательство. По определению 1.4 для любого простого p существуют $\Phi_p \in \mathrm{Mon}(X, Y)$ и $\Psi_p \in \mathrm{Mon}(Y, X)$, для которых $(Y/X\Phi_p)_p = (X/Y\Psi_p)_p = 0$, а значит, $(A/A\Phi_p)_p = (A/A\Psi_p)_p = 0$ по замечанию 2.5. Из леммы 2.6 следует, что $(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi_p)_p = 0$, в частности, если $X_{(p)} = A$, то $Y_{(p)} = A$. Значит $P_Y \subset P_X$. Аналогично $P_X \subset P_Y$, и мы имеем требуемое равенство $P_X = P_Y$. □

Лемма 2.8. *Пусть* X, Y — *группы из класса* $\mathcal{C}'(A)$ *и*

$$p^{n_p} = \max(p^{n_p(X)}, p^{n_p(Y)})$$

для любого простого p. *Тогда*

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \{\Phi \in \mathrm{End}\, A \colon (p^{n_p} X_{(p)})\Phi \subset p^{n_p} Y_{(p)} \text{ для каждого } p\}.$$

Доказательство. Пусть $\Phi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Из леммы 2.2 получаем $\Phi|_A \in \mathrm{End}\, A$ и, используя следствие 2.4, имеем $\Phi|_{X_{(p)}} \in \mathrm{Hom}(X_{(p)}, Y_{(p)})$, т. е. $\big(p^{n_p} X_{(p)}\big)\Phi \subset p^{n_p} Y_{(p)}$ для каждого p.

Обратно, если $\Phi \in \mathrm{End}\, A$, то Φ продолжается на $\mathbb{Q}A$, делимую оболочку группы A, и образ любого элемента из $X_{(p)} = X \cap \frac{A}{p^{n_p}}$ принадлежит группе $Y_{(p)}$ для любого простого p по условию. Тогда из (2) выводим, что $X\Phi \subseteq Y$, как и требовалось. □

Следствие 2.9. *Пусть* $X \in \mathcal{C}'(A)$ *и* $p^{n_p} = p^{n_p(X)}$ *для любого простого* p. *Тогда*

$$\mathrm{End}(X) = \{\Phi \in \mathrm{End}\, A\colon \big(p^{n_p} X_{(p)}\big)\Phi \subset p^{n_p} X_{(p)} \text{ для всех } p\}.$$

3. Почти изоморфизм для групп счётного ранга специального вида

Пусть $X \in \mathcal{C}'_e(A)$. Определим канонический эпиморфизм

$$\overline{}\colon A \mapsto A/eA = \bar{A} \tag{4}$$

и индуцированные гомоморфизмы

$$\overline{}\colon \mathrm{End}\, A \to \mathrm{End}\, \bar{A} \quad \text{и} \quad \overline{}\colon \mathrm{Aut}\, A \to \mathrm{Aut}\, \bar{A}. \tag{5}$$

Очевидно, $X/A \cong eX/eA = \overline{eX} \subset \bar{A}$, где $eX \subset A$.

Распространим подход из [11, определение 2.5.9] с групп конечного ранга на рассматриваемые здесь группы счётного ранга из класса $\mathcal{C}'(A)$.

Определение 3.1. Группа $\mathrm{TypAut}\, \bar{A}$ — это подгруппа всех автоморфизмов η группы $\bar{A}$, удовлетворяющих условию $\overline{A(\tau)}\eta \subseteq \overline{A(\tau)}$ для всех $\tau \in T$.

Кольцо $\mathrm{TypEnd}\, \bar{A}$ — это подкольцо всех эндоморфизмов η группы $\bar{A}$, удовлетворяющих условию $\overline{A(\tau)}\eta \subseteq \overline{A(\tau)}$ для всех $\tau \in T$.

Напомним, что $A(\tau) = A_\tau$ для любого $\tau \in T$ (см. определение 2.1 и (1)).

Очевидно,

$$\overline{\mathrm{End}\, A} \subseteq \mathrm{TypEnd}\, \bar{A} \quad \text{и} \quad \overline{\mathrm{Aut}\, A} \subseteq \mathrm{TypAut}\, \bar{A}. \tag{6}$$

Далее,

$$\mathrm{TypAut}\, \bar{A} = \prod_{\tau \in T}^{\otimes} \mathrm{Aut}\, \bar{A}_\tau$$

и также

$$\mathrm{TypEnd}\, \bar{A} = \prod_{\tau \in T}^{\otimes} \mathrm{End}\, \bar{A}_\tau.$$

Отсюда, применив [11, предложение 2.5.10] к группам A_τ, $\tau \in T$, конечного ранга, получаем $\overline{\mathrm{End}\, A_\tau} = \mathrm{End}\, \bar{A}_\tau$, и

$$\overline{\mathrm{End}\, A} = \mathrm{TypEnd}\, \bar{A}. \tag{7}$$

Обобщая подход [11, определение 8.1.14], мы вводим понятие слабого изоморфизма для рассматриваемых групп счётного ранга и показываем, что это отношение эквивалентности совпадает для них с почти изоморфизмом, но даёт новые возможности для исследования групп.

Определение 3.2. Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'_e(A)$. Тогда X и Y называются *слабо изоморфными* (type isomorphic) группами, обозначение $X \cong_{\mathrm{tp}} Y$, если существует отображение $\eta \in \mathrm{TypAut}\, \bar{A}$, такое что $\overline{eX}\eta = \overline{eY}$, где $\bar{A} = A/eA$.

Заметим, что, если $X', Y \in \mathcal{C}'_e(A)$, $X' \cong_{\mathrm{tp}} Y$ и $X' \cong X$ для некоторой группы X, то мы, естественно, будем говорить, что X и Y тоже слабо изоморфны, даже если $X \notin \mathcal{C}'_e(A)$.

Лемма 3.3. *Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'(A)$ и $\Phi \in \mathrm{Mon}(X, Y)$. Тогда $Y/X\Phi$ является периодической группой. При этом если U является сервантной подгруппой конечного ранга в X, то $(U\Phi)^Y_*/U\Phi$ — конечная группа.*

Доказательство. Напомним, что в каноническом разложении $A = \bigoplus\limits_{\tau \in T} A_\tau$ все однородные компоненты A_τ имеют конечный ранг, что влечёт конечность групп $A_\tau/A_\tau\Phi$.

Из изоморфизма $Y/A \cong (Y/A\Phi)/(A/A\Phi)$ следует, что $Y/A\Phi$ является периодической группой, так как этим свойством, очевидно, обладают группы Y/A и $A/A\Phi = \bigoplus\limits_{\tau \in T} A_\tau/A_\tau\Phi$. Группа $Y/X\Phi$ является периодической как подгруппа периодической группы $Y/A\Phi$.

По условию 4) определения 2.1 существует натуральное число k, такое что $kU \subset A$. Возьмём в A вполне разложимую подгруппу L, содержащую kU, так что $T_{\mathrm{cr}}(L) = T_{\mathrm{cr}}(U)$. Группы $L' = L^X_*$ и $L'' = (L\Phi)^Y_*$ являются почти вполне разложимыми с изоморфными регуляторами $R' = R(L')$ и $R'' = R(L'') = (R\Phi)^A_*$, и Φ индуцирует мономорфизм $L' \to L''$, а также мономорфизм $R' \to R''$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию $mL' \subset R'$. Очевидно, порядки элементов группы $L''/L'\Phi$ ограничены числом $m|R''/R'\Phi|$, и следовательно, она конечна в силу конечности её ранга. Поскольку $(U\Phi)^Y_*/U\Phi$ является подгруппой в $L'/L''\Phi$, она также конечна. $\square$

Специальный способ построения мономорфизмов для рассматриваемых групп даёт следующая лемма.

Лемма 3.4. *Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'(A)$, $T = T_{\mathrm{cr}}(A)$, $P = P_X = P_Y$ и $p^{n_p}T^X_p = p^{n_p}T^Y_p = 0$, $p \in P$. Кроме того, пусть*

$$m_\tau{}^X = \prod_{p\colon \tau \in [T^X_p]} p^{n_p}$$

($m_\tau{}^X = 1$, если $P_\tau = \varnothing$) и I_τ — тождественное отображение на соответствующем A_τ. Тогда

$$\phi = (m_\tau{}^X I_\tau)_{\tau \in T} \in \prod_{\tau \in T}^{\otimes} \mathrm{Mon}(A_\tau, A_\tau)$$

является мономорфизмом $X \to Y$ со свойством $(Y/X\phi)_q = 0$ для любого простого $q \notin P$.

Доказательство. Мономорфизм ϕ продолжается с A до делимой оболочки $\mathbb{Q}A$ и по лемме 2.8 индуцирует мономорфизм из X в Y, так как $X_{(p)}\phi \subset A \subset Y_{(p)}$, что означает $p^{n_p}X_{(p)}\phi \subset p^{n_p}Y_{(p)}$ для любого p.

Из $Y/A \cong (Y/A\phi)/(A/A\phi)$ получаем, что $(Y/A\phi)_q = 0$ для любого простого $q \notin P$, так как $(Y/A)_q = 0$ и $(A/A\phi)_q = 0$ по условию. Отсюда следует, что

$Y/X\phi \cong (Y/A\phi)/(X\phi/A\phi)$ также имеет нулевую q-примарную компоненту, как и требовалось. □

Лемма 3.5. *Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'_{p^n}(A)$ и $\bar{A} = A/p^nA$. Если $\Phi \in \mathrm{Mon}(X, Y)$ удовлетворяет условию $(Y/X\Phi)_p = 0$, то $\bar{\Phi} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ и $\overline{p^nX}\bar{\Phi} = \overline{p^nY}$. Обратно, если отображение $\bar{\Phi} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ удовлетворяет условию $\overline{p^nX}\bar{\Phi} = \overline{p^nY}$, то для него существует прообраз $\Phi\colon A \to A$, такой что $\Phi \in \mathrm{Mon}(X, Y)$, и выполняется условие $(Y/X\Phi)_p = 0$.*

Доказательство. Пусть $(Y/X\Phi)_p = 0$. Покажем, что $Y = X\Phi + A$. Достаточно проверить включение $Y \subset X\Phi + A$. Действительно, для любого $y \in Y$ существуют $x \in X$ и натуральное число l, такие что $ly = x\Phi$, причём l и p взаимно просты. Тогда существуют целые числа u, v, для которых $ul + vp^n = 1$. Имеем $y = (ly)u + (p^ny)v \in X\Phi + A$, поскольку $p^ny \in A$.

Из (3) следует, что $(A_\tau/A_\tau\Phi)_p = 0$, и если взять $y \in A_\tau$ для произвольного $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$, то $x \in A_\tau$, и мы получаем, что $A = A\Phi + p^nA$, т. е. $\bar{A} = \bar{A}\bar{\Phi}$ и $\bar{\Phi} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$.

Из $Y = X\Phi + A$ выводим, что $p^nY = p^nX\Phi + p^nA$, и значит, $\overline{p^nX}\bar{\Phi} = \overline{p^nY}$.

Обратно, пусть для отображения $\bar{\Phi} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ верно, что $\overline{p^nX}\bar{\Phi} = \overline{p^nY}$. Для него существует прообраз $\Phi \in \mathrm{End}(A)$ (см. (7)). Очевидно, что $\Phi \in \mathrm{Mon}(A, A)$, иначе $\mathrm{rk}(\bar{A}\bar{\Phi})$ был бы меньше, чем $\mathrm{rk}\,\bar{A}$. Мономорфизм Φ продолжается с A до делимой оболочки $\mathbb{Q}A$ и индуцирует гомоморфизм из X в $\mathbb{Q}A$. Для любого $x \in X$ имеем

$$(p^nx + p^nA)\bar{\Phi} = \overline{p^nx}\bar{\Phi} \in \overline{p^nY}.$$

Значит, $p^nx\Phi \in p^nY + p^nA = p^nY$, т. е. $x\Phi \in Y$. Таким образом, $\Phi \in \mathrm{Mon}(X, Y)$. По условию для любого $y \in Y$ существует $x \in X$, такой что $\overline{p^ny} = \overline{p^nx}\bar{\Phi}$, отсюда следует, что $p^ny = p^nx\Phi + p^na$ для некоторого $a \in A$, и $Y \subset X\Phi + A$.

Далее, $\bar{\Phi} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ означает, что $\bar{A} = \bar{A}\bar{\Phi}$ и $A = A\Phi + p^nA$. Отсюда следует, что

$$Y \subset X\Phi + A\Phi + p^nA = X\Phi + p^nA \subset X\Phi + p^nY,$$

и значит, $Y = X\Phi + p^nY$. Таким образом, периодическая по лемме 3.3 группа $Y/X\Phi$ является p-делимой, т. е. $(Y/X\Phi)_p = 0$, поскольку все её элементы делятся на p^n, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство завершено. □

Следующий результат обобщает выводы данной статьи.

Теорема 3.6. *Пусть $X = \sum\limits_{p\in\mathbb{P}} X_{(p)}$ и $Y = \sum\limits_{p\in\mathbb{P}} Y_{(p)}$ — группы из класса $\mathcal{C}'(A)$ и $X_{(p)} \in \mathcal{C}'_{p^{n_p}}(A)$, $Y_{(p)} \in \mathcal{C}'_{p^{n_p}}(A)$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$;
2) $X_{(p)} \cong_{\mathrm{tp}} Y_{(p)}$, $p \in \mathbb{P}$;
3) $X_{(p)} \cong_{\mathrm{nr}} Y_{(p)}$, $p \in \mathbb{P}$.

Доказательство. Из леммы 3.3 немедленно следует, что при обосновании почти изоморфизма групп достаточно доказать лишь одно условие 2) определения 1.4 при наличии соответствующих мономорфизмов.

Докажем импликацию 1) $\to$ 2). По следствию 2.7 положим $P = P_X = P_Y$, и пусть $p \in P$. Поскольку $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, для него существует отображение $\Phi_p \in \mathrm{Mon}(X, Y)$, удовлетворяющее условию $(Y/X\Phi_p)_p = 0$.

Из замечания 2.5 получаем, что $\Phi_p \in \mathrm{Mon}(X_{(p)}, Y_{(p)})$ и $(A/A\Phi_p)_p = 0$, что позволяет применить лемму 2.6. Таким образом, $(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi_p)_p = 0$.

Из леммы 3.5 следует, что $\bar{\Phi}_p \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ и $\overline{p^{n_p}X_{(p)}}\bar{\Phi}_p = \overline{p^{n_p}Y_{(p)}}$, где $p^{n_p}X_{(p)} \subset A$, $p^{n_p}Y_{(p)} \subset A$ и $\bar{A} = A/p^{n_p}A$. По определению 3.2 группы $X_{(p)}$ и $Y_{(p)}$ слабо изоморфны.

Докажем импликацию 2) $\to$ 3). Пусть $p \in P$ и $\bar{A} = A/p^{n_p}A$. По условию существует $\bar{\Phi}_p \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ и $\overline{p^{n_p}X_{(p)}}\,\bar{\Phi}_{(p)} = \overline{p^{n_p}Y_{(p)}}$. Из лемм 3.3 и 3.4 следует, что достаточно построить мономорфизмы $\Phi_p\colon X_{(p)} \to Y_{(p)}$ и $\Psi_p\colon Y_{(p)} \to X_{(p)}$, для которых $(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi_p)_p = (X_{(p)}/Y_{(p)}\Psi_{(p)})_p = 0$. По лемме 3.5 прообразы отображений $\bar{\Phi}_p, \overline{\Phi_p^{-1}} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ существуют в $\mathrm{Mon}(X, Y)$ и обладают указанными свойствами.

Докажем импликацию 3) $\to$ 1). По условию существуют мономорфизмы $\Phi_p\colon X_{(p)} \to Y_{(p)}$ и $\Psi_p\colon Y_{(p)} \to X_{(p)}$, для которых $(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi_p)_p = (X_{(p)}/Y_{(p)}\Psi_p)_p = 0$. Напомним, что $T_p^X \cong X_{(p)}/A$, $T_p^Y \cong Y_{(p)}/A$ и $p^{n_p}T_p^X = p^{n_p}T_p^Y = 0$ для всех простых p.

Зафиксируем p и построим мономорфизмы $\Phi\colon X \to Y$ и $\Psi\colon Y \to X$, удовлетворяющие условию $(Y/X\Phi)_p = (X/Y\Psi)_p = 0$. Как и раньше, для каждого $\tau \in T$ обозначим $P_\tau = \{q \in P_X\colon \tau \in [T_q^X]\}$. По условию 4) определения 2.1 мы можем определить число

$$m_0 = \prod_{q\colon q \neq p,\ [T_q^X] \cap [T_p^X] \neq \varnothing} q^{n_q},$$

которое не делится на p. Для него существует $v \in \mathbb{N}$, такое что $m_0 v \equiv 1 \bmod p^{n_p}$. Обозначим $m = m_0 v$. Кроме того, введём числа

$$m_\tau = \prod_{q \in P_\tau} q^{n_q}$$

для $\tau \in T \setminus [T_p^X]$.

Мы рассматриваем мономорфизмы на A как элементы прямого произведения, т. е.

$$\Phi_p = (\phi_\tau)_{\tau \in T} \in \prod_{\tau \in T}^{\otimes} \mathrm{Mon}(A_\tau, A_\tau).$$

Заметим, что $(A_\tau/A_\tau\phi_\tau)_p = 0$ по лемме 2.5. Определим $\Phi = (\phi'_\tau)_{\tau \in T}$ следующим образом: $\phi'_\tau = m\phi_\tau$, если $\tau \in [T_p^X]$; $\phi'_\tau = m_\tau I_\tau$, если $\tau \notin [T_p^X]$, где I_τ — тождественное отображение на соответствующем A_τ. Из того что $X_{(p)}\Phi \subset Y_{(p)}$ и $X_{(q)}\Phi \subset A \subset Y_{(q)}$ для всех $q \neq p$, следует, что $\Phi \in \mathrm{Mon}(X, Y)$ по лемме 2.8.

Покажем, что Φ является одним из двух искомых мономорфизмов. Для этого рассмотрим его как элемент из $\mathrm{Mon}(X_{(p)}, Y_{(p)})$.

Ввиду того что m_τ не делятся на p, условие $(A_\tau/A_\tau\Phi)_p = 0$ выполняется для всех $\tau \notin [T_p^X]$, и $\overline{m\phi_\tau} = \bar{\phi}_\tau \colon \bar{A}_\tau \to \bar{A}_\tau$ являются автоморфизмами для всех $\tau \in [T_p^X]$, где $\bar{A}_\tau = A_\tau/p^{n_p}A_\tau$. Отсюда следует, что $\bar{\Phi} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A} = A/p^{n_p}A$.

Из определения множества $[T_p^X]$ получаем

$$\overline{p^{n_p}X_{(p)}} = p^{n_p}X_{(p)}/p^{n_p}A \cong X_{(p)}/A = T_p^X \cong \Big(\bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\Big)^X_{*(p)} \Big/ \Big(\bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\Big). \quad (8)$$

Отсюда по построению, в котором $m \equiv 1 \bmod p^{n_p}$, и лемме 3.5, применённой к Φ_p, имеем

$$\overline{p^{n_p}X_{(p)}}\,\bar{\Phi} = \overline{p^{n_p}X_{(p)}}\,\overline{\Phi^1} = \overline{p^{n_p}X_{(p)}}\,\bar{\Phi}_p = \overline{p^{n_p}Y_{(p)}}, \quad (9)$$

где $\Phi^1 = \Phi|_{\bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau}$ и $\overline{p^{n_p}Y_{(p)}} \cong T_p^X$. Из той же леммы, отнесённой теперь к Φ, следует, что $(Y_{(p)}/X_{(p)}\Phi)_p = 0$, и, применив лемму 2.6, получаем выполнение условия $(Y/X\Phi)_p = 0$, как и требовалось.

Построение $\Psi \in \mathrm{Mon}(Y, X)$ проводится аналогично. Поскольку p выбиралось произвольно, на основании лемм 3.3 и 3.4 заключаем, что X и Y почти изоморфны. □

Поскольку в доказательстве импликации 1) $\to$ 2) использовалось существование только односторонних отображений $\Phi_p \in \mathrm{Mon}(X, Y)$ со свойствами $(Y/X\Phi_p)_p = 0$, в качестве определения почти изоморфизма для групп рассматриваемого класса может служить следующее.

Следствие 3.7. *Пусть X и Y — группы из класса $\mathcal{C}'(A)$. Тогда $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$ тогда и только тогда, когда для каждого простого p существует отображение $\Phi_p \in \mathrm{Mon}(X, Y)$, удовлетворяющее условию $(Y/X\Phi_p)_p = 0$.*

Из (8) и (9) также получаем следующее утверждение.

Следствие 3.8. *Пусть $X, Y \in \mathcal{C}'(A)$. Если $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, то $T_p^X \cong T_p^Y$ и $[T_p^X] = [T_p^Y]$ для любого простого p.*

Важным выводом работы является то, что установление почти изоморфизма двух групп X и Y рассматриваемого класса сводится к независимым проверкам того, что $X_{(p)} \cong_{\mathrm{nr}} Y_{(p)}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. В приложениях это приводит к распараллеливанию алгоритмов распознавания данных групп с точностью до почти изоморфизма, используемых в случае конечности множеств $[T_p^X]$ и $[T_p^Y]$ и предполагающих определённую нумерацию элементов счётного множества T.

Это характерно для ряда приложений классификационных результатов абелевых групп без кручения, связанных с графической интерпретацией их различных прямых разложений в виде графов ярусно-параллельной формы, имеющих прямое отношение к алгоритмам параллельных вычислений, возникающих при обучении нейронных сетей определённой архитектуры, при изучении новых

функциональных наноматериалов специальными методами, в первую очередь методом рассеяния когерентного рентгеновского (синхротронного) излучения, а также в решении многих других прикладных задач физического материаловедения (см. [9, 12]).

Работа первого автора поддержана Немецкой службой академических обменов ДААД, 2018, второго автора — госзаданием Минобрнауки РФ, проект № 11.5861.2017/БЧ.

Литература

[1] Благовещенская Е. Прямые разложения локально почти вполне разложимых групп счётного ранга // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, № 4. — С. 24—47.

[2] Благовещенская Е. Почти вполне разложимые абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — СПб. Изд. Политех. унив., 2009. — (Математика в Политехническом университете).

[3] Arnold D. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Berlin: Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[4] Blagoveshchenskaya E., Göbel R. Classification and direct decompositions of some Butler groups of countable rank // Commun. Algebra. — 2002. — Vol. 30, no. 7. — P. 3403—3427.

[5] Blagoveshchenskaya E., Göbel R., Strüngmann L. Classification of some Butler groups of infinite rank // Commun. Algebra. — 2013. — Vol. 380. — P. 1—17.

[6] Blagoveshchenskaya E., Kunetz D. Direct decomposition theory of torsion-free Abelian groups of finite rank: graph method // Lobachevskii J. Math. — 2018. — Vol. 39, no. 1. — P. 29—34.

[7] Blagoveshchenskaya E., Strüngmann L. Near-isomorphism for a class of infinite rank torsion-free Abelian groups // Commun. Algebra. — 2007. — Vol. 35. — P. 1—18.

[8] Blagoveshchenskaya E., Strüngmann L. H. Direct decomposition theory under near-isomorphism for a class of infinite rank torsion-free Abelian groups // J. Group Theory. — 2017. — Vol. 20, no. 2. — P. 325—346.

[9] Burkovsky R. G., Bronwald Yu., Andronikova D., Wehinger B., Krisch M., Jacobs J., Gambetti D., Roleder K., Majchrowski A., Filimonov A. V., Rudskoy A. I., Vakhrushev S. B., Tagantsev A. K. Critical scattering and incommensurate phase transition in antiferroelectric $PbZrO_3$ under pressure // Sci. Reports. — 2017. — Vol. 7. — P. 41512.

[10] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vols. 1, 2. — London: Academic Press, 1970, 1973.

[11] Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian Groups. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. — (Algebra, Logic Appl.; Vol. 13).

[12] Naberezhnov A. A., Porechnaya N., Nizhankovskii V., Filimonov A., Nacke B. Morphology and magnetic properties of ferriferous two-phase sodium borosilicate glasses // Sci. World J. — 2014. — Vol. 2014. — ID 320451.