Абелевы группы, изоморфные собственной вполне характеристической подгруппе

С. Я. ГРИНШПОН
Томский государственный университет
e-mail: grinshpon@math.tsu.ru

М. М. НИКОЛЬСКАЯ
Томский государственный архитектурно-строительный университет
e-mail: mary_s83@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: вполне характеристическая подгруппа, IF-группа, инварианты Ульма—Капланского, периодически полная p-группа, сепарабельная p-группа, вполне транзитивная группа, однородная χ-группа.

Аннотация

Настоящая статья носит обзорный характер, в ней изложены результаты авторов, относящиеся к исследованию групп, содержащих собственную вполне характеристическую подгруппу, изоморфную самой группе.

Abstract

S. Ya. Grinshpon, M. M. Nikolskaya, Abelian groups isomorphic to a proper fully invariant subgroup, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 5, pp. 29—53.

The present paper is a survey of the authors' results related to studying groups containing a proper fully invariant subgroup isomorphic to the group.

Введение

В теории абелевых групп одним из направлений исследований является изучение групп, содержащих собственную подгруппу, изоморфную самой группе.

Такие группы изучал Р. А. Бьюмонт в [18], он называл их I-группами. В [18] установлено, что всякая примарная абелева группа, разложимая в бесконечную прямую сумму коциклических групп, является I-группой. I-модули исследовались в [19] Р. А. Бьюмонтом и Р. С. Пирсом. В частности, в [19] установлено, что R-модуль без кручения M, не являющийся делимым, является I-модулем, и никакой периодический модуль M конечного ранга не является I-модулем. В [20], кроме I-групп, рассматривались IP-группы (группы, изоморфные собственной сервантной подгруппе) и ID-группы (группы, изоморфные собственному прямому слагаемому).

Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, № 5, с. 29—53.

В [22] П. Кроули строит пример бесконечной примарной абелевой группы без элементов бесконечной высоты, которая не изоморфна никакой собственной подгруппе.

В [26] П. Хилл и Ч. Меджиббен предлагают более общую и простую конструкцию примарных групп без собственных изоморфных подгрупп, чем П. Кроули. В своей работе они также показывают, что для того чтобы бесконечная редуцированная примарная группа была группой без собственных изоморфных подгрупп, необходимо, чтобы она была неограниченной, несчётной и имела конечные инварианты Ульма—Капланского.

В [28] Г. С. Монк исследует абелевы p-группы, не содержащие собственных сервантных плотных подгрупп, изоморфных самой группе.

В последнее время интерес к группам, содержащим собственную, изоморфную им подгруппу, не угасает. В частности, в [23] Б. Голдсмит, С. Охогейн и С. Валлутис изучают квазиминимальные группы (группы, изоморфные всем своим подгруппам такой же мощности, как сами группы), сервантно квазиминимальные группы (группы, изоморфные всем своим сервантным подгруппам такой же мощности, как сами группы), прямо квазиминимальные группы (группы, изоморфные всем своим прямым слагаемым такой же мощности, как сами группы).

Настоящая статья носит обзорный характер, в ней изложены результаты авторов, относящиеся к исследованию групп, содержащих собственную вполне характеристическую подгруппу, изоморфную самой группе.

Все группы, рассматриваемые в статье, являются абелевыми.

1. Основные определения и известные результаты

В этом разделе приводятся основные определения и известные результаты, используемые в дальнейшем.

Пусть A — периодическая группа. Через A_p будем обозначать подгруппу группы A, состоящую из всех элементов $a \in A$, порядок которых равен степени простого числа p. Подгруппа A_p называется *p-компонентой* группы A.

Теорема 1.1 [15, с. 55]. *Периодическая группа A является прямой суммой p-групп A_p, принадлежащих различным простым числам p. Группы A_p однозначно определяются группой A.*

Если группа A не периодическая, то её *p-компонентой* называют p-компоненту её периодической части $T(A)$.

Группа D называется *делимой*, если $nD = D$ для любого натурального числа n. Отметим некоторые свойства делимых групп.

Теорема 1.2 [15, с. 118].

1. *Если D_i $(i \in I)$ — делимые подгруппы группы A, то и $\sum D_i$ — делимая подгруппа группы A.*

2. *Прямая сумма и прямое произведение являются делимыми группами тогда и только тогда, когда каждая компонента является делимой группой.*

Теорема 1.3 [15, с. 124]. *Всякая делимая группа D является прямой суммой квазициклических групп и групп, изоморфных полной рациональной группе. Мощности множеств компонент $\mathbb{Z}(p^\infty)$ (для каждого p) и $\mathbb{Q}$ составляют полную и независимую систему инвариантов группы D.*

Группа C называется *редуцированной*, если она не содержит ненулевых делимых подгрупп.

Теорема 1.4 [15, с. 121]. *Всякая группа A является прямой суммой делимой группы D и редуцированной группы C, $A = D \oplus C$. Подгруппа D группы A здесь определена однозначно, подгруппа C — однозначно с точностью до изоморфизма.*

Рассмотрим прямые суммы циклических групп. Критерием, позволяющим установить, когда заданная p-группа разложима в прямую сумму циклических p-групп, является следующий результат Л. Я. Куликова.

Теорема 1.5 [10]. *p-группа A является прямой суммой циклических групп тогда и только тогда, когда A есть объединение возрастающей последовательности подгрупп*

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A,$$

где высоты отличных от нуля элементов, входящих в A_n, меньше фиксированного числа k_n.

Из данной теоремы следуют два важных результата.

Теорема 1.6 [15, с. 107]. *Ограниченная группа является прямой суммой циклических групп.*

Теорема 1.7 [15, с. 107]. *Счётная p-группа является прямой суммой циклических групп тогда и только тогда, когда она не содержит отличных от нуля элементов бесконечной высоты.*

Если группа A разложима в прямую сумму циклических групп, то она может обладать многими такими прямыми разложениями. Но если рассматривать только порядки компонент, то имеет место единственность.

Теорема 1.8 [15, с. 108]. *Любые два разложения группы в прямую сумму циклических групп бесконечного порядка и порядков, равных степеням простых чисел, изоморфны.*

Подгруппа B группы A, которая отображается в себя при всяком эндоморфизме группы A, называется *вполне характеристической*. Рассмотрим вполне характеристические подгруппы прямой суммы групп.

Теорема 1.9. *Если*

$$A = \bigoplus_{i \in I} A_i$$

и S — вполне характеристическая подгруппа группы A, то

$$S = \bigoplus_{i \in I} (S \cap A_i),$$

где $S \cap A_i$ — вполне характеристическая подгруппа группы A_i для каждого $i \in I$.

Эту теорему можно доказать, обобщая рассуждения, проведённые в [15] при доказательстве леммы 9.3.

Следующий результат описывает вполне характеристические подгруппы прямых сумм циклических p-групп.

Теорема 1.10 [21]. *Пусть*

$$B = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} B_k,$$

где

$$B_k = \bigoplus \mathbb{Z}(p^k).$$

L — вполне характеристическая подгруппа группы B тогда и только тогда, когда

$$L = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} p^{n_k} B_k,$$

где

1) $n_k \leqslant k$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$;
2) $n_k \leqslant n_{k+r} \leqslant n_k + r$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$.

При изучении p-групп важную роль играют базисные подгруппы, введённые Л. Я. Куликовым. Подгруппа B p-группы A называется *базисной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) B — прямая сумма циклических p-групп;
2) B — сервантная подгруппа группы A;
3) A/B — делимая группа.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.11 [15, с. 162, 174].

1. *Всякая p-группа содержит базисные подгруппы.*
2. *Любые две базисные подгруппы данной p-группы изоморфны.*

Иногда бывает удобно говорить о базисной подгруппе периодической группы A, под которой подразумевается прямая сумма $\bigoplus\limits_p B_p$ подгрупп B_p, являющихся базисными в p-компонентах группы A.

Вполне характеристическая подгруппа L p-группы A называется *широкой*, если $L + B = A$ для любой базисной подгруппы B группы A [29]. Справедливы следующие утверждения для широких подгрупп:

1) 0 является широкой подгруппой группы A тогда и только тогда, когда A — ограниченная группа;
2) всякая вполне характеристическая подгруппа ограниченной группы является широкой;
3) если L — широкая подгруппа группы A, то $p^n L$ при любом n также широкая подгруппа.

Следующий интересный результат связан с фактор-группой группы по её широкой подгруппе.

Теорема 1.12 [16, с. 20]. *Если L — широкая подгруппа p-группы A, то A/L — прямая сумма циклических групп.*

Приведём результат, показывающий взаимосвязь делимых и редуцированных частей абелевой группы и её вполне характеристической подгруппы. Пусть A — p-группа. Через $A[p^k]$, где k — целое неотрицательное число, обозначим, как обычно [15, с. 15], следующую подгруппу группы A: $\{a \in A \mid p^k a = 0\}$; если же $k = \infty$, то полагаем $A[p^\infty] = A$. Если a — элемент порядка p^k группы A, то через $e(a)$ обозначим его экспоненту, т. е. $e(a) = k$.

Теорема 1.13 [2]. *Пусть A — группа,*

$$A = R \oplus D_0 \oplus \Big(\bigoplus_p D_p\Big),$$

где R — редуцированная группа, D_0 — делимая группа без кручения, D_p — делимые p-группы. Подгруппа S группы A вполне характеристична в A тогда и только тогда, когда она имеет один из следующих двух видов:

1) *$S = R' \oplus \Big(\bigoplus_p D_p[p^{k_p}]\Big)$, где $R' = \bigoplus_p R'_p$ — периодическая вполне характеристическая подгруппа группы R (R'_p — p-компонента группы R') и $k_p \geqslant \sup\{e(r) \mid r \in R'_p\}$ (k_p — целое неотрицательное число или символ ∞);*
2) *$S = R' \oplus D_0 \oplus \Big(\bigoplus_p D_p\Big)$, где R' — вполне характеристическая подгруппа группы R.*

Для элемента a группы A и данного простого числа p наибольшее неотрицательное целое число r, для которого уравнение $p^r x = a$ разрешимо в A, называется *p-высотой* $h_p(a)$ элемента a. Если уравнение $p^r x = a$ имеет решение при любом r, то a называется *элементом бесконечной p-высоты*, $h_p(a) = \infty$. Нуль имеет бесконечную высоту по любому простому числу. Если A — p-группа, то $h_p(a)$, где $a \in A$, называют просто *высотой элемента* a и пишут $h(a)$.

Характеристикой называется последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞. Обозначим через $\mathfrak{X}$ множество таких последовательностей. Если $\chi_1 = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ и $\chi_2 = (l_1, \ldots, l_n, \ldots)$, то полагают $\chi_1 \leqslant \chi_2$ тогда и только тогда, когда $k_n \leqslant l_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Пусть A — группа без кручения, $a \in A$. Последовательность p-высот

$$\chi(a) = (h_{p_1}(a), \ldots, h_{p_n}(a), \ldots),$$

где $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность всех простых чисел, упорядоченных по возрастанию, называется *характеристикой* или *высотной последовательностью* элемента a. Так как характеристика зависит от группы A, иногда пишут $\chi_A(a)$, чтобы подчеркнуть роль A.

Если $\chi_1 = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ и $\chi_2 = (l_1, \ldots, l_n, \ldots)$ — характеристики, то их *сумма* определяется как характеристика

$$\chi_1 + \chi_2 = (k_1 + l_1, \ldots, k_n + l_n, \ldots),$$

где, естественно, ∞ плюс нечто есть ∞. *Разность* $\chi_1 - \chi_2$ двух характеристик $\chi_1 \geqslant \chi_2$ определяется как характеристика

$$\chi_1 - \chi_2 = (k_1 - l_1, \ldots, k_n - l_n, \ldots),$$

причём полагаем $\infty - k = \infty$ для всякого k. Характеристика χ называется *идемпотентной*, если $\chi + \chi = \chi$. Заметим, что для указанных операций над характеристиками в [16] используется мультипликативная запись; для наших исследований удобнее аддитивная запись этих операций.

Две характеристики $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ и $(l_1, \ldots, l_n, \ldots)$ считаются *эквивалентными*, если неравенство $k_n \neq l_n$ имеет место лишь для конечного числа номеров n и только тогда, когда k_n и l_n конечны. Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом*. Если $\chi(a)$ принадлежит типу $\mathbf{t}$, то говорят, что элемент a имеет тип $\mathbf{t}$, и пишут $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}$ или $\mathbf{t}_A(a) = \mathbf{t}$, если необходимо указать, что тип элемента a рассматривается в группе A.

Тип обычно представляется характеристикой, принадлежащей этому типу. Другими словами, пишут

$$\mathbf{t} = (k_1, \ldots, k_n, \ldots),$$

понимая, что характеристику $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ можно заменить на эквивалентную. Для двух типов $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ полагают $\mathbf{t}_1 \leqslant \mathbf{t}_2$, если существуют две такие характеристики χ_1 и χ_2, принадлежащие типам $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ соответственно, что $\chi_1 \leqslant \chi_2$.

Так как сложение характеристик согласовано с отношением эквивалентности в множестве характеристик, то в множестве типов можно ввести естественным образом сумму и разность типов, а также понятие идемпотентного типа $\mathbf{t}$ ($\mathbf{t} = \mathbf{t} + \mathbf{t}$). Отметим, что для любого гомоморфизма $\varphi\colon A \to B$ и элемента $a \in A$ имеет место неравенство $\mathbf{t}(a) \leqslant \mathbf{t}\big(\varphi(a)\big)$.

Группа без кручения A, в которой все ненулевые элементы имеют один и тот же тип $\mathbf{t}$, называется *однородной* группой (типа $\mathbf{t}$). Если однородная группа имеет тип $\mathbf{t}$, то пишут $\mathbf{t}(A) = \mathbf{t}$. Понятно, что всякая группа без кручения ранга 1 является однородной.

Тип $\mathbf{t}$ называется *p_k-делимым* ($p_k \in \Pi$, где Π — множество всех простых чисел, занумерованных в порядке возрастания), если для всякой характеристики

$v = \big(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}, \ldots\big)$, принадлежащей типу $\mathbf{t}$, имеем $v^{(k)} = \infty$. Если A — однородная группа типа $\mathbf{t}$ и тип $\mathbf{t}$ p_k-делим, то $p_k A = A$.

Пусть A — произвольная группа. Конечная система $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ненулевых элементов группы A называется *линейно независимой* или просто *независимой*, если из равенства

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots + n_k a_k = 0 \quad (n_i \in \mathbb{Z})$$

вытекает, что

$$n_1 a_1 = n_2 a_2 = \ldots = n_k a_k = 0.$$

Данное условие означает, что если порядок элемента a_i бесконечен, то $n_i = 0$; если порядок элемента a_i конечен, то n_i делится на порядок элемента a_i.

Система элементов называется *зависимой*, если она не является независимой.

Бесконечная система элементов $L = \{a_i\}_{i \in I}$ называется *независимой*, если любая конечная подсистема элементов из L является независимой.

Независимая система M элементов группы A называется *максимальной*, если в A не существует независимой системы элементов, строго содержащей M. По лемме Цорна всякую независимую систему элементов группы A можно расширить до максимальной.

Рангом $r(A)$ группы A называется мощность её максимальной независимой системы элементов, содержащей только элементы бесконечного порядка и элементы, порядки которых есть степени простого числа. Если ограничиться только элементами бесконечного порядка группы A, т. е. выбрать независимую систему, состоящую только из элементов бесконечного порядка и максимальную по отношению к этому свойству, то мощность такой системы называется *рангом без кручения* $r_0(A)$ группы A. Если выбрать независимую систему, состоящую только из элементов, порядки которых есть степени фиксированного простого числа p, и максимальную по отношению к этому свойству, то мощность такой системы называется *p-рангом* $r_p(A)$ группы A. Из этих определений следует, что

$$r(A) = r_0(A) + \sum_p r_p(A).$$

Имеет место следующая теорема

Теорема 1.14 [15, с. 103]. *Ранги $r(A)$, $r_0(A)$, $r_p(A)$ группы A являются инвариантами этой группы.*

Группа A называется *сепарабельной*, если любое конечное подмножество её элементов можно вложить в прямое слагаемое группы A, являющееся прямой суммой групп ранга 1. По своему строению все делимые группы сепарабельны, и легко установить, что группа сепарабельна тогда и только тогда, когда её редуцированная часть сепарабельна. Справедлив следующий результат.

Теорема 1.15 [16, с. 8]. *Редуцированная p-группа сепарабельна тогда и только тогда, когда она не содержит отличных от нуля элементов бесконечной высоты.*

Пусть A — редуцированная p-группа, σ — порядковое число. Через $p^\sigma A$ обозначается подгруппа группы A, определяемая по индукции: $p^0 A = A$, $p^{\sigma+1}A = p(p^\sigma A)$ и

$$p^\sigma A = \bigcap_{\rho<\sigma} p^\rho A,$$

если σ — предельное порядковое число. Наименьшее порядковое число $\boldsymbol{\tau}$, для которого $p^\tau A = 0$, называется *длиной* $\lambda(A)$ *группы* A; σ*-м инвариантом Ульма—Капланского* $f_A(\sigma)$ *группы* A называется кардинальное число, равное рангу фактор-группы $(p^\sigma A)[p]/(p^{\sigma+1}A)[p]$ [15, с. 181, 182].

2. α-копии сепарабельных p-групп

В этом разделе, мы, используя описание И. Капланского вполне характеристических подгрупп одного класса p-групп в терминах последовательностей порядковых чисел и символов ∞, исследуем связи между некоторыми свойствами возрастающей последовательности α неотрицательных целых чисел и свойствами редуцированной сепарабельной p-группы A при условии изоморфизма группы A на её вполне характеристическую подгруппу S, задаваемую последовательностью α.

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ — возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞ (для любой пары индексов (i, j), где $i < j$, $\alpha_i < \alpha_j$, если $\alpha_i \neq \infty$, и $\alpha_i = \alpha_j$, если $\alpha_i = \infty$). Если $\alpha_i + 1 < \alpha_{i+1}$, то говорят, что *последовательность* α *имеет скачок в* α_{i+1}. Обозначим через $\mathbb{N}_0$ множество всех неотрицательных целых чисел. *Длиной* $\lambda(\alpha)$ *последовательности* α называется наименьшее число $i \in \mathbb{N}_0$, такое что $\alpha_i = \infty$, причём полагаем $\lambda(\alpha) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i < \infty$ для всех $i \in \mathbb{N}_0$.

Возрастающая последовательность $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ неотрицательных целых чисел и символов ∞ называется U*-последовательностью* для редуцированной сепарабельной p-группы A, если для любого $\alpha_i \neq \infty$ имеем $\alpha_i < \lambda(A)$ и всякий раз, когда существует скачок в α_n, α_{n-1}-й инвариант Ульма—Капланского группы A отличен от нуля [27]. Обозначим через $A(\alpha)$ следующую подгруппу группы A:

$$A(\alpha) = \{a \in A \mid h(p^n a) \geqslant \alpha_n \text{ для всякого } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Понятно, что $A(\alpha)$ — вполне характеристическая подгруппа группы A. Из результатов И. Капланского [27, с. 56, 66] следует, что всякая вполне характеристическая подгруппа S редуцированной сепарабельной p-группы A имеет вид $A(\alpha)$ для некоторой U-последовательности α, причём подгруппа S представляется в указанном виде единственным образом. Нам понадобится следующий результат.

Теорема 2.1 [17]. *Пусть* $S = A(\alpha)$ *— неограниченная вполне характеристическая подгруппа редуцированной сепарабельной* p*-группы* A*, где*

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) -$$

U-последовательность для группы A. Тогда для всех $i \in \mathbb{N}_0$

$$f_S(i) = \sum_{j=0}^{k_i} f_A(\alpha_i + j), \quad k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i. \tag{1}$$

Определение 2.2. Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ — возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞. Будем говорить, что редуцированная сепарабельная p-группа A *имеет α-копию*, если α — U-последовательность для группы A и $A \cong A(\alpha)$.

Рассмотрим α-копии неограниченных редуцированных сепарабельных p-групп. Заметим, что если A — неограниченная редуцированная сепарабельная p-группа и A имеет α-копию, то $\lambda(\alpha) = \infty$, т. е. в последовательности α нет символов ∞. Обозначим через W множество всех возрастающих последовательностей неотрицательных целых чисел.

Теорема 2.3. *Пусть $\alpha \in W$ и A — неограниченная редуцированная сепарабельная p-группа, имеющая α-копию. Тогда*

1) *если последовательность α для некоторого $i \in \mathbb{N}_0$ имеет скачок в α_{i+1}, то $f_A(i) \neq 0$ и $f_A(i) \geqslant f_A(\alpha_i)$;*
2) *если в α_{i+1} скачка нет, то $f_A(i) = f_A(\alpha_i)$.*

Доказательство. Так как группа A имеет α-копию, то $A \cong A(\alpha)$, и поэтому $f_A(i) = f_{A(\alpha)}(i)$ для всякого $i \in \mathbb{N}_0$. Используя теорему 2.1, получаем, что для всякого $i \in \mathbb{N}_0$

$$f_A(i) = \sum_{j=0}^{k_i} f_A(\alpha_i + j), \quad \text{где} \quad k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i. \tag{2}$$

Рассмотрим два случая.

1. Если последовательность α для некоторого $i \in \mathbb{N}_0$ имеет скачок в α_{i+1}, то $\alpha_i + 1 < \alpha_{i+1}$, и по определению U-последовательности имеем $f_A(\alpha_i) \neq 0$. Значит, $f_A(i) \neq 0$, и правая часть равенства (2) содержит не менее двух слагаемых (первое слагаемое — $f_A(\alpha_i)$, последнее слагаемое — $f_A(\alpha_{i+1} - 1)$). Следовательно, $f_A(i) \geqslant f_A(\alpha_i)$.

2. Если в α_{i+1} скачка нет, то $\alpha_i + 1 = \alpha_{i+1}$, и из (2) получаем

$$f_A(i) = f_A(\alpha_i). \qquad \square$$

Обозначим через W_0 множество всех возрастающих последовательностей неотрицательных целых чисел, начинающихся с нуля.

Теорема 2.4. *Пусть $\alpha \in W_0$ и A — неограниченная редуцированная сепарабельная p-группа, все инварианты Ульма—Капланского которой конечны. Тогда если α имеет хотя бы один скачок, то группа A не имеет α-копии.*

Доказательство. Предположим, что группа A имеет α-копию. Пусть α имеет первый скачок в α_{t+1}. Тогда

$$\alpha = (0, 1, \ldots, t, t+2+n_1, t+3+n_2, \ldots, t+m+1+n_m, \ldots),$$

где $0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots$.

Используя теорему 2.1, получаем, что для всякого $i \in \mathbb{N}_0$

$$f_A(i) = \sum_{j=0}^{k_i} f_A(\alpha_i + j), \quad \text{где} \quad k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i. \tag{3}$$

Используя (3), найдём $f_A(t)$. Имеем $\alpha_t = t$, $\alpha_{t+1} = t+2+n_1$, $k_t = \alpha_{t+1} - 1 - \alpha_t = t + 2 + n_1 - 1 - t = n_1 + 1$. Значит,

$$f_A(t) = f_A(t) + f_A(t+1) + \ldots + f_A(t+1+n_1). \tag{4}$$

Аналогично для всякого $j \in \mathbb{N}$ получим

$$f_A(t+j) = f_A(t+j+1+n_j) + f_A(t+j+2+n_j) + \ldots + \\ + f_A(t+j+1+n_{j+1}). \tag{5}$$

Из (4) с учётом конечности инвариантов Ульма—Капланского группы A имеем

$$f_A(t+1) + \ldots + f_A(t+1+n_1) = 0,$$

и значит,

$$f_A(t+1) = 0.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $m \geqslant 2$. Предположим, что для всех $i < m$ $(i \in \mathbb{N})$ $f_A(t+i) = 0$. Покажем, что $f_A(t+m) = 0$. Рассматривая равенства (5) при всех j, изменяющихся от 1 до $m-1$, получаем следующую систему равенств:

$$\left.\begin{aligned} &0 = f_A(t+2+n_1) + \ldots + f_A(t+2+n_2), \\ &\ldots \\ &0 = f_A(t+m+n_{m-1}) + \ldots + f_A(t+m+n_m). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$f_A(t+m)$ входит в правую часть некоторого из равенств системы (6), имеющего нулевую левую часть, следовательно, $f_A(t+m) = 0$. Таким образом, $f_A(t+i) = 0$ для каждого $i \in \mathbb{N}$, а это противоречит тому, что группа A неограниченная. $\square$

3. Некоторые свойства IF-групп

Исследуем группы, содержащие собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе.

Определение 3.1. Группу назовём *IF-группой*, если она изоморфна некоторой собственной вполне характеристической подгруппе.

Рассмотрим вначале случай ограниченных групп.

Теорема 3.2. *Всякая ограниченная p-группа не является IF-группой.*

Доказательство. Пусть B — ограниченная p-группа и p^m — наибольший из порядков элементов группы B. Тогда $B = \bigoplus\limits_{k=1}^{m} B_k$, где $B_k = \bigoplus \mathbb{Z}(p^k)$ [15]. Пусть L — вполне характеристическая подгруппа группы B. Тогда по теореме 1.10

$$L = p^{n_1}B_1 \oplus p^{n_2}B_2 \oplus \ldots \oplus p^{n_m}B_m,$$

где n_k удовлетворяют неравенствам 1) и 2) этой теоремы. Если $n_m = 0$, то из того, что $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_m = 0$, получаем, что $L = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_m = B$, а следовательно, L не является собственной подгруппой группы B. Значит, $n_m \geqslant 1$. Имеем $p^{n_m}B_m = \bigoplus \mathbb{Z}(p^{m-n_m})$, откуда следует, что в группе L нет циклических прямых слагаемых порядка p^m, и поэтому L не изоморфна B. $\square$

Следующая лемма понадобится нам при изучении IF-групп, являющихся прямыми суммами.

Лемма 3.3. *Пусть $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, и пусть $C = \bigoplus\limits_{i\in I} C_i = \bigoplus\limits_{i\in I} C'_i$, где C_i и C'_i — подгруппы группы A_i для каждого $i \in I$. Тогда $C_i = C'_i$ для каждого $i \in I$.*

Доказательство. Покажем, что $C_i \subset C'_i$. Пусть $c_i \in C_i$. Тогда $c_i \in C$ и, следовательно, $c_i \in \bigoplus\limits_{i\in I} C'_i$. Имеем $c_i = c'_{i_1} + c'_{i_2} + \ldots + c'_{i_k}$, где $c'_{i_j} \in C'_{i_j}$, $i_j \in I$, $j = \overline{1,k}$. Так как C_i и C'_i — подгруппы группы A_i для каждого $i \in I$, то $c_i \in A_i$, $c'_{i_j} \in A_{i_j}$. Учитывая, что A — прямая сумма групп A_i $(i \in I)$, получаем, что для некоторого j $(j = \overline{1,k})$ $i_j = i$ и $c'_{i_j} = c_i$, а для всех остальных j $c'_{i_j} = 0$. Значит, $c_i \in C'_i$. Аналогично $C'_i \subset C_i$ для каждого $i \in I$. Следовательно, $C_i = C'_i$ для каждого $i \in I$. $\square$

Теорема 3.4. *Пусть $B = \bigoplus\limits_{i\in I} B_i$, где B_i — вполне характеристическая подгруппа группы B для каждого $i \in I$. B является IF-группой тогда и только тогда, когда существует хотя бы один индекс $i \in I$, для которого группа B_i является IF-группой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть S — собственная вполне характеристическая подгруппа группы B, такая что $B \cong S$. Имеем $S = \bigoplus\limits_{i\in I} S_i$, где $S_i = S \cap B_i$ — вполне характеристическая подгруппа группы B_i для каждого $i \in I$. Пусть φ — изоморфное отображение группы B на S. φ можно рассматривать как эндоморфизм группы B. Обозначим через φ_i $(i \in I)$ ограничение эндоморфизма φ на подгруппе B_i. Так как B_i — вполне характеристическая подгруппа группы B, то φ_i — эндоморфизм группы B_i для каждого $i \in I$. Пусть $b \in B$, $b = b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}$, где $b_{i_j} \in B_{i_j}$, $i_j \in I$, $j = \overline{1,k}$. Имеем

$$\varphi b = \varphi(b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}) = \varphi b_{i_1} + \varphi b_{i_2} + \ldots + \varphi b_{i_k} = \varphi_{i_1} b_{i_1} + \varphi_{i_2} b_{i_2} + \ldots + \varphi_{i_k} b_{i_k}.$$

Следовательно, $\varphi B = \sum\limits_{i\in I} \varphi_i B_i$. Так как $\varphi_i B_i \subset B_i$, то по [15]

$$\sum_{i\in I} \varphi_i B_i = \bigoplus_{i\in I} \varphi_i B_i.$$

Итак, $S = \varphi B = \bigoplus_{i\in I} \varphi_i B_i$ и $S = \bigoplus_{i\in I} S_i$, где $\varphi_i B_i$ и S_i — подгруппы группы B_i для каждого $i \in I$. По лемме 3.3 $\varphi_i B_i = S_i$. Так как φ — изоморфизм, то $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, и следовательно, $\operatorname{Ker}\varphi_i = 0$ для каждого $i \in I$. Значит, φ_i — изоморфное отображение B_i на S_i. Учитывая, что $S \neq B$, получаем, что существует хотя бы один индекс $i_0 \in I$, такой что $B_{i_0} \cong S_{i_0}$ и $B_{i_0} \neq S_{i_0}$, т. е. группа B_{i_0} является IF-группой.

Достаточность. Пусть $B = \bigoplus_{i\in I} B_i$, где B_i является вполне характеристической подгруппой группы B для каждого $i \in I$. Пусть для некоторого $i_0 \in I$ B_{i_0} является IF-группой. Докажем, что B является IF-группой. Так как B_{i_0} — IF-группа, то существует собственная вполне характеристическая подгруппа S_{i_0} группы B_{i_0}, такая что $S_{i_0} \cong B_{i_0}$. Пусть

$$S = S_{i_0} + \Bigl(\bigoplus_{\substack{j\in I\\ j\neq i_0}} B_j\Bigr).$$

По свойствам прямых сумм [15] получаем, что

$$S = S_{i_0} \oplus \Bigl(\bigoplus_{\substack{j\in I\\ j\neq i_0}} B_j\Bigr).$$

Так как $S_{i_0} \neq B_{i_0}$, то S — собственная подгруппа группы B. Из того, что $S_{i_0} \cong B_{i_0}$, получаем, что

$$S = S_{i_0} \oplus \Bigl(\bigoplus_{\substack{j\in I\\ j\neq i_0}} B_j\Bigr). \cong B_{i_0} \oplus \Bigl(\bigoplus_{\substack{j\in I\\ j\neq i_0}} B_j\Bigr) = \bigoplus_{i\in I} B_i = B,$$

т. е. $S \cong B$. Пусть η — произвольный эндоморфизм группы B и $s \in S$. Тогда $s = s_{i_0} + b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}$, где $b_{i_j} \in B_{i_j}$, $i_j \in I$, $j = \overline{1,k}$, $s_{i_0} \in S_{i_0}$. Имеем

$$\eta s = \eta(s_{i_0} + b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}) = \eta s_{i_0} + \eta b_{i_1} + \eta b_{i_2} + \ldots + \eta b_{i_k}.$$

Так как B_{i_j} — вполне характеристические подгруппы группы B для каждого $j = \overline{1,k}$, то $\eta b_{i_j} \in B_{i_j}$. S_{i_0} является вполне характеристической подгруппой группы B_{i_0}, а B_{i_0} является вполне характеристической подгруппой группы B. Значит, S_{i_0} — вполне характеристическая подгруппа группы B, и поэтому $\eta s_{i_0} \in S_{i_0}$. Получили, что $\eta s_{i_0} \in S_{i_0}$ для произвольного элемента $s \in S$, и следовательно, S — вполне характеристическая подгруппа группы B. Таким образом, B содержит собственную вполне характеристическую подгруппу S, такую что $S \cong B$, т. е. B — IF-группа. □

Следствие 3.5. *Периодическая группа является IF-группой тогда и только тогда, когда некоторая её p-компонента является IF-группой.*

Доказательство. Действительно, пусть A — периодическая группа. Тогда по теореме 1.1 $A = \bigoplus_{p} A_p$, где A_p — p-компоненты группы A. A_p являются вполне характеристическими подгруппами группы A. По теореме 3.4 получаем утверждение следствия. $\square$

Теорема 3.6. *Никакая ограниченная группа не является IF-группой.*

Доказательство. Пусть B — ограниченная группа. Тогда B — периодическая группа. Понятно, что любая p-компонента группы B также ограниченная p-группа. Поскольку по теореме 3.2 ограниченные p-группы не являются IF-группами, то согласно следствию 3.5 группа B не является IF-группой. $\square$

4. Нередуцированные периодические IF-группы

В этом разделе найдены условия, эквивалентные тому, что нередуцированная периодическая группа является IF-группой. Показано также, что делимая периодическая группа не является IF-группой.

Теорема 4.1. *Нередуцированная p-группа A является IF-группой тогда и только тогда, когда её редуцированная часть является IF-группой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A — нередуцированная p-группа. Тогда она имеет вид $A = R \oplus D_p$, где D_p — делимая p-группа, R — редуцированная p-группа. Пусть A — IF-группа. Тогда существует такая вполне характеристическая подгруппа S группы A, что $S \cong A$ и $S \neq A$. По теореме 1.13 S имеет один из следующих двух видов:

1) $S = R' \oplus D_p[p^{k_p}]$, где $k_p \geqslant \sup\{e(r) \mid r \in R'\}$, R' — вполне характеристическая подгруппа группы R;
2) $S = R' \oplus D_p$, где R' — вполне характеристическая подгруппа группы R.

Рассмотрим первый случай. Пусть $k_p \neq \infty$. Тогда

$$D_p[p^{k_p}] = \{d \in D_p \mid p^{k_p} d = 0\} —$$

ограниченная группа, а значит, она не содержит делимых подгрупп. Следовательно, S — редуцированная группа. Так как A — нередуцированная группа и $S \cong A$, то получаем противоречие.

Если $k_p = \infty$, то первый случай совпадёт со вторым.

Рассмотрим второй случай. Пусть $S = R' \oplus D_p$, где R' — вполне характеристическая подгруппа группы R. Так как $A = R \oplus D_p$ и $S \cong A$, то получаем, что $R' \cong R$ и R' — собственная подгруппа группы R. Значит, R — IF-группа.

Достаточность. Пусть A — нередуцированная p-группа вида $A = R \oplus D_p$. Пусть R — IF-группа. Тогда существует вполне характеристическая подгруппа R' группы R, такая что $R' \cong R$ и $R' \neq R$. Рассмотрим группу $S = R' \oplus D_p$. S — собственная вполне характеристическая подгруппа группы A и $S \cong A$. Следовательно, A — IF-группа. $\square$

Теорема 4.2. *Делимая p-группа не является IF-группой.*

Доказательство. Пусть A — делимая p-группа. Тогда $A = D_p$. Предположим противное, пусть A — IF-группа. Тогда существует такая вполне характеристическая подгруппа S группы A, что $S \cong A$ и $S \neq A$. Тогда по теореме 1.13 имеют место следующие случаи:

1) $S = D_p[p^{k_p}]$, где k_p — любое целое неотрицательное число или ∞;
2) $S = D_p$.

Рассмотрим первый случай. Если $k_p \neq \infty$, то

$$S = D_p[p^{k_p}] = \{d \in D_p \mid p^{k_p} d = 0\} -$$

ограниченная группа, а, значит, она не является делимой группой. Так как A — делимая p-группа и $S \cong A$, то получаем противоречие.

Если $k_p = \infty$, то $S = D_p$, и первый случай совпадёт со вторым.

Рассмотрим второй случай. Пусть $S = D_p$. Так как $A = D_p$, то S не является собственной подгруппой группы A. Значит, A не является IF-группой. □

Теорема 4.3. *Делимая периодическая группа не является IF-группой.*

Доказательство. Пусть A — делимая периодическая группа. Тогда $A = \bigoplus\limits_p A_p$, где A_p — делимые p-группы. Применяя теорему 4.2 и следствие 3.5, получаем, что A не является IF-группой. □

Теорема 4.4. *Для нередуцированной периодической группы A следующие условия эквивалентны:*

1) *A является IF-группой;*
2) *некоторая p-компонента группы A не является делимой группой и имеет редуцированную часть, которая является IF-группой;*
3) *редуцированная часть группы A является IF-группой.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть A — нередуцированная периодическая группа, являющаяся IF-группой. Тогда по следствию 3.5 некоторая её p-компонента является IF-группой, причём по теореме 4.2 эта p-компонента не является делимой группой. Применяя теорему 4.1, получаем, что в этой p-компоненте её редуцированная часть является IF-группой.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Каждую из p-компонент A_p группы A можно записать в виде $A_p = R_p \oplus D_p$, где R_p — редуцированная p-группа, а D_p — делимая p-группа. Тогда редуцированная часть R группы A может быть записана в виде $R = \bigoplus\limits_p R_p$. Так как хотя бы одна из групп R_p в силу условия 2) является IF-группой, то по следствию 3.5 группа R является IF-группой.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть R_p и D_p соответственно редуцированная и делимая части p-компоненты A_p группы A, т. е. $A_p = R_p \oplus D_p$. Тогда

$$A = \Bigl(\bigoplus_p R_p\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_p D_p\Bigr).$$

Понятно, что $\bigoplus\limits_p R_p$ — редуцированная часть группы A. В силу следствия 3.5 для некоторого простого числа p группа R_p является IF-группой. Применяя теорему 4.1, получаем, что для этого простого числа p группа A_p является IF-группой, а тогда по следствию 3.5 и группа A является IF-группой. □

Теоремы 4.3 и 4.4 сводят исследование периодических IF-групп к исследованию редуцированных примарных IF-групп.

5. Примарные IF-группы

Перейдём теперь к исследованию примарных сепарабельных IF-групп. Рассмотрим вначале прямые суммы циклических p-групп. Так как никакая ограниченная группа не является IF-группой, то нам нужно рассмотреть неограниченные группы. Введём следующее определение.

Определение 5.1. Пусть A — сепарабельная p-группа. Строго возрастающую последовательность неотрицательных целых чисел $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$ назовём *допустимой* для группы A, если для инвариантов Ульма—Капланского этой группы выполняется система равенств

$$f_A(k) = \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} f_A(i), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{7}$$

Теорема 5.2. *Пусть B — неограниченная p-группа, являющаяся прямой суммой циклических групп. Группа B является IF-группой тогда и только тогда, когда для неё существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.*

Доказательство. Необходимость. Пусть группа B является IF-группой. Заметим, что последовательность всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию, является допустимой для любой сепарабельной p-группы, так как система равенств (7), определяющих допустимую последовательность, имеет в этом случае тривиальный вид: $f_A(k) = f_A(k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Предположим, что последовательность всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию, является единственной допустимой последовательностью для группы B. Если L — вполне характеристическая подгруппа группы B, то согласно теореме 1.10 она имеет вид $L = \bigoplus p^{n_k} B_k$, где n_k удовлетворяет неравенствам 1) и 2) теоремы 1.10. Имеем

$$f_L(n) = r\biggl(\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} p^{n_k} B_k \mid p^{n_k} B_k = \bigoplus \mathbb{Z}(p^{n+1})\biggr) =$$

$$= r\biggl(\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} p^{n_k} B_k \mid k - n_k = n + 1\biggr) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}}(r(p^{n_k}B_k) \mid k - n_k = n+1) = \sum_{k\in\mathbb{N}}(r(B_k) \mid k - n_k - 1 = n) =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{N}}(f_B(k-1) \mid k - n_k - 1 = n).$$

Таким образом,

$$f_L(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}}(f_B(k-1) \mid k - n_k - 1 = n). \tag{8}$$

Из теоремы 1.10 вытекают соотношения

$$(k+1) - n_{k+1} - 1 \geqslant (k+1) - (n_k+1) - 1 = k - n_k - 1, \tag{9}$$
$$(k+1) - n_{k+1} - 1 \leqslant (k+1) - n_k - 1 = (k - n_k - 1) + 1. \tag{10}$$

Пусть

$$i_n = \min_{k\in\mathbb{N}}\{k-1 \mid k - n_k - 1 = n\}.$$

Тогда из (8)—(10) получаем

$$f_L(n) = \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} f_B(i). \tag{11}$$

Среди сумм правой части равенств (11) могут быть и вырожденные, т. е. состоящие из одного слагаемого (это получается в случае, когда $i_{n+1} = i_n + 1$). Пусть $L \cong B$. Тогда с учётом равенства (11) для всякого целого неотрицательного числа n

$$f_B(n) = f_L(n) = \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} f_B(i).$$

Последовательность $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$ является допустимой для группы B, и поэтому по условию теоремы $i_n = n$ для всякого n. Учитывая, что

$$i_n = \min_{k\in\mathbb{N}}\{k-1 \mid k - n_k - 1 = n\},$$

получаем, что $n_k = 0$ для всякого k, т. е. $L = B$. Это противоречит тому, что B является IF-группой.

Достаточность. Запишем группу B в виде $B = \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k$, где $B_k = \bigoplus \mathbb{Z}(p^k)$. Пусть для группы B существует допустимая последовательность $r_0, r_1, r_2, \ldots$, отличная от допустимой последовательности $0, 1, 2, \ldots$. Тогда для всякого $m \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$f_B(m) = \sum_{r=r_m}^{r_{m+1}-1} f_B(r). \tag{12}$$

Возможны два случая: 1) $r_0 \neq 0$; 2) $r_0 = 0$. Рассмотрим их.

Рассмотрим случай 1). Пусть $r_0 \neq 0$. Построим подгруппу L группы B следующим образом:

$$\begin{aligned} L = pB_1 \oplus p^2B_2 \oplus \ldots \oplus p^{r_0}B_{r_0} \oplus p^{r_0}B_{r_0+1} \oplus p^{r_0+1}B_{r_0+2} \oplus \ldots \oplus \\ \oplus p^{r_1-1}B_{r_1} \oplus p^{r_1-1}B_{r_1+1} \oplus p^{r_1}B_{r_1+2} \oplus p^{r_1+1}B_{r_1+3} \oplus \ldots \oplus \\ \oplus p^{r_2-2}B_{r_2} \oplus p^{r_2-2}B_{r_2+1} \oplus p^{r_2-1}B_{r_2+2} \oplus p^{r_2}B_{r_2+3} \oplus \ldots \oplus p^{r_3-3}B_{r_3} \oplus \ldots, \end{aligned}$$

т. е.

$$L = \bigoplus p^{n_k}B_k,$$

где $n_{r_j} = n_{r_{j+1}} = r_j - j$ $(j \in \mathbb{N}_0)$; $n_{r_j+k} = r_j - j + k - 1$ $(1 < k < r_{j+1} - r_j + 1)$. L — собственная подгруппа группы B. Используя теорему 1.10, получаем, что L — вполне характеристическая подгруппа группы B. Более того, $L \cong B$ в силу равенства соответствующих инвариантов Ульма—Капланского. Действительно, из построения группы L и с учётом равенств (7) получаем

$$f_L(m) = f_B(r_m) + f_B(r_m + 1) + \ldots + f_B(r_{m+1} - 1) = f_B(m)$$

для всякого $m \in \mathbb{N}_0$. Значит, $L \cong B$, но $L \neq B$. Следовательно, B является IF-группой.

Рассмотрим случай 2). Пусть $r_0 = 0$. Обозначим через $k+1$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ наименьшее натуральное число, для которого $r_{k+1} > k+1$. Тогда $r_0 = 0$, $r_1 = 1, \ldots, r_k = k$, и допустимая последовательность имеет вид $0, 1, \ldots, k, r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots$. Равенства (12) для такой последовательности запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} & f_B(0) = f_B(0), \\ & f_B(1) = f_B(1), \\ & \quad \ldots \\ & f_B(k-1) = f_B(k-1), \\ & f_B(k) = f_B(k) + f_B(k+1) + \ldots + f_B(r_{k+1} - 1), \\ & f_B(q) = f_B(r_q) + \ldots + f_B(r_{q+1} - 1) \text{ для всякого } q > k \quad (q \in \mathbb{N}_0). \end{aligned} \tag{13}$$

Сумма, стоящая в правой части $(k+1)$-го равенства в (13), является первой невырожденной суммой в (5.7), т. е. суммой, состоящей из более чем одного слагаемого.

Рассмотрим следующую подгруппу L группы B:

$$\begin{aligned} L = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_k \oplus B_{k+1} \oplus pB_{k+2} \oplus \ldots \oplus \\ \oplus p^{r_{k+1}-k-1}B_{r_{k+1}} \oplus p^{r_{k+1}-k-1}B_{r_{k+1}+1} \oplus p^{r_{k+1}-k}B_{r_{k+1}+2} \oplus \ldots \oplus \\ \oplus p^{r_{k+2}-k-2}B_{r_{k+2}} \oplus p^{r_{k+2}-k-2}B_{r_{k+2}+1} \oplus p^{r_{k+2}-k-1}B_{r_{k+2}+2} \oplus \ldots \oplus \\ \oplus p^{r_{k+3}-k-3}B_{r_{k+3}} \oplus \ldots. \end{aligned}$$

Используя теорему 1.10, получаем, что L — вполне характеристическая подгруппа группы B. Учитывая строение группы B, имеем

$$
\begin{aligned}
&f_L(0) = f_B(0),\\
&f_L(1) = f_B(1),\\
&\quad \dots\\
&f_L(k-1) = f_B(k-1),\\
&f_L(k) = f_B(k) + f_B(k+1) + \ldots + f_B(r_{k+1}-1),\\
&f_L(q) = f_B(r_q) + \ldots + f_B(r_{q+1}-1) \text{ для всякого } q > k \quad (q \in \mathbb{N}_0).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Сравнивая (13) и (14), получаем, что $L \cong B$. Так как $L \neq B$, то B является IF-группой. □

Рассмотрим теперь произвольные сепарабельные p-группы.

Теорема 5.3. *Сепарабельная p-группа не является IF-группой, если её базисная подгруппа не является IF-группой.*

Доказательство. Пусть A — сепарабельная p-группа, у которой базисная подгруппа B не является IF-группой. Не умаляя общности, можно считать, что A — редуцированная p-группа. Если A — ограниченная группа, то по теореме 3.2 A не является IF-группой (заметим, что в этом случае базисная подгруппа группы A совпадает с A). Пусть A — неограниченная группа. Предположим, что A — IF-группа. Тогда существует собственная вполне характеристическая подгруппа S группы A, такая что $S \cong A$. Так как A — редуцированная сепарабельная p-группа, то A не содержит элементов бесконечной высоты [16, с. 7]. S — неограниченная вполне характеристическая подгруппа группы A, и поэтому S — широкая подгруппа группы A [21, с. 423]. Следовательно, $S \cap B$ — базисная подгруппа группы S [21, с. 422].

Если $S \cap B = 0$, то, учитывая, что фактор-группа любой p-группы по её базисной подгруппе является делимой группой, получаем, что S — делимая группа, чего быть не может, так как A — редуцированная группа.

Если $S \cap B = B$, то S содержит базисную подгруппу B группы A. Имеем $S + B = A$, так как S — широкая подгруппа группы A, а из того что $B \subset S$, следует $S + B = S$, чего быть не может, так как S — собственная подгруппа группы A.

Итак, $S \cap B$ — собственная ненулевая подгруппа группы B. Так как $S \cong A$, то базисные подгруппы групп S и A также изоморфны, т. е. $S \cap B \cong B$. Так как S — широкая подгруппа группы A, то $S \cap B$ является широкой подгруппой группы B [29, следствие 2.8]. Итак, мы получили, что базисная подгруппа B группы A имеет собственную вполне характеристическую подгруппу $S \cap B$, изоморфную B. Противоречие. □

Теорема 5.4. *Если неограниченная сепарабельная p-группа является IF-группой, то для неё существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.*

Доказательство. Пусть A — неограниченная сепарабельная p-группа, являющаяся IF-группой, и пусть B — её базисная подгруппа. Тогда по теореме 5.3 B — IF-группа. Применяя теорему 5.2, получаем, что для группы B существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию. Так как $f_A(k) = f_B(k)$ для всякого $k \in \mathbb{N}_0$ [29, с. 186], то эта же последовательность будет допустимой и для группы A. □

Периодически полной p-группой называется периодическая часть $T(\bar{B})$ p-адического пополнения $\bar{B}$ прямой суммы B циклических p-групп [16, с. 22]. Впервые эти группы стал изучать Л. Я. Куликов, он называл их замкнутыми группами [9]. Такие группы играют фундаментальную роль при изучении p-групп.

Теорема 5.5. *Для периодически полной p-группы A следующие условия эквивалентны:*

1) *A является IF-группой;*
2) *базисная подгруппа группы A является IF-группой;*
3) *A — неограниченная группа, для которой существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.*

Доказательство. Докажем эквивалентность 1) $\sim$ 2). С учётом теоремы 5.3 нужно доказать только импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть A — периодически полная p-группа и B — её базисная подгруппа, являющаяся IF-группой. В силу теоремы 3.2 B — неограниченная группа, и поэтому A также неограниченная группа. Так как B — IF-группа, то существует собственная вполне характеристическая подгруппа S группы B, такая что $B \cong S$. Понятно, что S является собственной широкой подгруппой группы B. Существует собственная широкая подгруппа S^* группы A, такая что $S^* \cap B = S$ [21, теорема 2.9], причём S — базисная подгруппа группы S^* [21, с. 422]. S^* как широкая подгруппа периодически полной группы является периодически полной группой [1]. Итак, мы получили, что в группе A есть собственная вполне характеристическая подгруппа S^*, такая что базисная подгруппа B группы A изоморфна базисной подгруппе S группы S^*. Так как A и S^* — периодически полные группы, то $A \cong S^*$, т. е. A является IF-группой.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть B — базисная подгруппа группы A, причём B является IF-группой. Если A — ограниченная группа, то $A = B$. Следовательно, B — ограниченная IF-группа, что противоречит теореме 3.6. Если же A — неограниченная группа, то B — неограниченная группа. Учитывая теорему 5.2 и то, что для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ $f_A(k) = f_B(k)$, получаем, что для группы A существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть A — неограниченная группа, для которой существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию. Тогда её базисная подгруппа B обладает тем же свойством. По теореме 5.2 B является IF-группой, и с учётом эквивалентности 2) $\sim$ 1) группа A также является IF-группой. □

Будем говорить, что последовательность инвариантов Ульма—Капланского неограниченной сепарабельной p-группы A является *периодической*, если существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется равенство $f_A(n) = f_A(n+k)$.

Следствие 5.6. *Пусть A — периодически полная p-группа. Если последовательность инвариантов Ульма—Капланского группы A является периодической, то A — IF-группа.*

Доказательство. Пусть A — периодически полная p-группа и существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется равенство $f_A(n) = f_A(n+k)$. Тогда для такой группы последовательность $k, k+1, k+2, \ldots$ является допустимой, и поэтому по теореме 5.5 A является IF-группой. □

Следствие 5.7. *Если для периодически полной p-группы A существует такое кардинальное число γ, что $f_A(n) = \gamma$ для каждого $n \in \mathbb{N}_0$, то A является IF-группой.*

Доказательство. Пусть A — периодически полная p-группа, и пусть для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ $f_A(n) = \gamma$, где γ — некоторое кардинальное число. Тогда такая последовательность инвариантов Ульма—Капланского является периодической, так как $f_A(n) = f_A(n+1)$ для каждого $n \in \mathbb{N}_0$. Применяя следствие 5.6, получаем, что A является IF-группой. □

6. Нередуцированные и делимые группы без кручения, содержащие вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе

Рассмотрим группы без кручения, которые содержат собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе.

Теорема 6.1. *Группа без кручения A содержит собственную вполне характеристическую подгруппу, изоморфную самой группе, тогда и только тогда, когда A не делимая группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A — группа без кручения, которая содержит собственную вполне характеристическую подгруппу S, изоморфную группе A. Предположим, что A — делимая группа. По теореме 1.13 получаем, что $S = A$, что противоречит тому, что S — собственная подгруппа группы A.

Достаточность. Пусть A — группа без кручения, не являющаяся делимой группой. Существует такое натуральное число n, отличное от 1, что $nA \neq A$. Рассмотрим $S = nA$. Тогда S — вполне характеристическая подгруппа группы A. Так как A — группа без кручения, то $S \cong A$. Значит, A содержит собственную вполне характеристическую подгруппу, изоморфную самой группе. □

Таким образом, группа без кручения A, не являющаяся делимой, всегда содержит собственную вполне характеристическую подгруппу вида nA, изоморфную самой группе. Будем рассматривать далее группы без кручения, которые имеют собственную вполне характеристическую подгруппу, отличную от nA, изоморфную самой группе A.

Определение 6.2. Группу без кручения A назовём *IF-группой*, если она содержит собственную вполне характеристическую подгруппу, отличную от nA, которая изоморфна самой группе.

Из теоремы 6.1 вытекает следующий результат.

Теорема 6.3. *Делимая группа без кручения не является IF-группой.*

Рассмотрим нередуцированные группы без кручения.

Теорема 6.4. *Нередуцированная группа без кручения является IF-группой тогда и только тогда, когда её редуцированная часть является IF-группой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A — нередуцированная группа без кручения. Тогда она имеет вид $A = R \oplus D_0$, где D_0 — делимая группа без кручения, R — редуцированная группа без кручения. Пусть A — IF-группа. Тогда существует такая вполне характеристическая подгруппа S группы A, что $S \cong A$, $S \neq A$ и $S \neq nA$. По теореме 1.13 S имеет вид $S = R' \oplus D_0$, где R' — вполне характеристическая подгруппа группы R. Так как $A = R \oplus D_0$ и $S \cong A$, то получаем, что $R' \cong R$ и R' — собственная подгруппа группы R. $S \neq nA$, следовательно, $R' \oplus D_0 \neq n(R \oplus D_0) = nR \oplus D_0$. Получаем, что $R' \neq nR$. Значит, R — IF-группа.

Достаточность. Пусть A — нередуцированная группа без кручения. Тогда $A = R \oplus D_0$, где R — редуцированная группа без кручения, D_0 — делимая группа без кручения. Пусть R — IF-группа. Тогда существует вполне характеристическая подгруппа R' группы R, такая что $R' \cong R$, $R' \neq R$ и $R' \neq nR$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим группу $S = R' \oplus D_0$. S — собственная вполне характеристическая подгруппа группы A, $S \cong A$ и $S \neq nA$. Следовательно, A — IF-группа. □

7. Однородные χ-группы

Учитывая теоремы 6.3 и 6.4, будем рассматривать далее только редуцированные группы.

Пусть $\mathbf{t}$ — некоторый тип. Рассмотрим характеристики v, удовлетворяющие следующим условиям:

а) $v = \left(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}, \ldots\right) \leqslant w$ для некоторой $w \in \mathbf{t}$;

б) $v^{(k)} = \infty$, если тип $\mathbf{t}$ p_k-делим.

Обозначим множество, состоящее из всех характеристик, удовлетворяющих свойствам а), б), и характеристик, членами которых являются только символы ∞, через $\mathfrak{F}(\mathbf{t})$.

Пусть A — группа без кручения. Если $v \in \mathfrak{X}$, то обозначим через $A(v)$ следующую подгруппу группы A: $A(v) = \{a \in A \mid \chi(a) \geqslant v\}$. $A(v)$ — вполне характеристическая подгруппа группы A. Заметим, что если A — редуцированная группа и характеристика v состоит только из символов ∞, то $A(v) = 0$.

Редуцированная группа без кручения A называется *χ-группой*, если всякая её вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = A(v)$, где v — некоторая характеристика [2]. Редуцированная группа без кручения A называется *вполне транзитивной*, если для любых двух её элементов a и b, для которых $\chi(a) \leqslant \chi(b)$, существует эндоморфизм φ этой группы, такой что $\varphi(a) = b$ [24].

Пусть A — однородная χ-группа типа $\mathbf{t}$. В [3] доказано, что любая вполне характеристическая подгруппа S группы A единственным образом представима в виде $S = A(v)$, где v — некоторая характеристика, принадлежащая $\mathfrak{F}(\mathbf{t})$. Заметим, что если $v \in \mathfrak{F}(\mathbf{t})$, где $v = \left(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}, \ldots\right)$, и $v \leqslant w$, где $w = \left(w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}, \ldots\right) \in \mathbf{t}$, то тип группы $A(v)$ определяется характеристикой

$$w - v = \left(w^{(1)} - v^{(1)}, w^{(2)} - v^{(2)}, \ldots, w^{(n)} - v^{(n)}, \ldots\right).$$

Докажем основную теорему данного раздела.

Теорема 7.1. *Однородные χ-группы не являются IF-группами.*

Доказательство. Пусть A — однородная χ-группа типа $\mathbf{t}$. Предположим, что A — IF-группа. Тогда существует такая вполне характеристическая подгруппа S группы A, что $S \cong A$ и $S \neq nA$. Имеем $S = A(v)$, где $v \in \mathfrak{F}(\mathbf{t})$. $A(v)$ — однородная группа. Так как $S \cong A$, то $A(v) \cong A$, и следовательно, тип группы $A(v)$ совпадает с типом группы A.

Учитывая, что $v \in \mathfrak{F}(\mathbf{t})$, получаем существование такой характеристики $w = \left(w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}, \ldots\right)$, принадлежащей типу $\mathbf{t}$, что $v \leqslant w$. Пусть

$$I(w) = \left\{i \in \mathbb{N} \mid w^{(i)} \neq 0 \text{ и } w^{(i)} \neq \infty\right\}.$$

Рассмотрим вначале случай, когда тип $\mathbf{t}$ не является идемпотентным. Имеем, что $I(w)$ — бесконечное множество. Так как $v \in \mathfrak{F}(\mathbf{t})$, то $v^{(i)} = w^{(i)}$ при $i \in \mathbb{N} \setminus I(w)$. Пусть I' — подмножество множества $I(w)$, состоящее из всех натуральных чисел i, для которых $v^{(i)} \neq 0$. Так как $A(v)$ — собственная подгруппа группы A, то $I' \neq \varnothing$. Имеем $w^{(i)} - v^{(i)} \neq w^{(i)}$ для всякого $i \in I'$. Учитывая, что тип группы $A(v)$ определяется характеристикой $w - v$ и $t\big(A(v)\big) = t(A)$, получаем, что I' — конечное множество. Пусть $n = \prod\limits_{i \in I'} p_i^{v^{(i)}}$. Тогда $S = A(v) = nA$. Противоречие.

Пусть теперь тип $\mathbf{t}$ идемпотентен. Тогда множество $I(w)$ конечно. Так как $v \in \mathfrak{F}(\mathbf{t})$ и $v \leqslant w$, то $v^{(i)} = w^{(i)}$ при $i \in \mathbb{N} \setminus I(w)$. Пусть

$$I' = \{i \in \mathbb{N} \mid v^{(i)} \neq 0 \text{ и } i \in I(w)\}.$$

I' является непустым конечным подмножеством множества $I(w)$. Тогда $S = A(v) = nA$, где $n = \prod_{i \in I'} p_i^{v^{(i)}}$. Противоречие. □

Используя то, что всякая однородная вполне транзитивная группа является χ-группой и что всякая однородная редуцированная сепарабельная группа является вполне транзитивной группой [24], получаем следующие результаты.

Следствие 7.2. *Собственная вполне характеристическая подгруппа S однородной вполне транзитивной группы A изоморфна группе A тогда и только тогда, когда $S = nA$ для некоторого натурального числа n, отличного от единицы.*

Следствие 7.3. *Собственная вполне характеристическая подгруппа S однородной редуцированной сепарабельной группы A изоморфна группе A тогда и только тогда, когда $S = nA$ для некоторого натурального числа n, отличного от единицы.*

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями», в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

Литература

[1] Гриншпон С. Я. О некоторых классах примарных абелевых групп, почти изоморфных по вполне характеристическим подгруппам // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1976. — № 2. — С. 23—30.

[2] Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1982. — С. 56—92.

[3] Гриншпон С. Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. матем. — 2002. — Т. 8, вып. 2. — С. 407—473.

[4] Гриншпон С. Я., Никольская М. М. Абелевы p-группы, неизоморфные собственным вполне характеристическим подгруппам // Алгебра, логика и приложения: Тез. докл. — Красноярск, 2010. — С. 27—28.

[5] Гриншпон С. Я., Никольская М. М. Собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные группе // Абелевы группы: Материалы Всерос. симп., посвящённого 95-летию Л. Я. Куликова (Бийск, 19—25 августа 2010). — Бийск, 2010. — С. 29—31.

[6] Гриншпон С. Я., Никольская М. М. Собственные вполне характеристические подгруппы групп без кручения, изоморфные самой группе // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Математика и механика. — 2012. — № 1 (17). — С. 25—30.

[7] Гриншпон С. Я., Никольская (Савинкова) М. М. IF-группы // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Математика и механика. — 2010. — № 1 (9). — С. 5—14.

[8] Гриншпон С. Я., Никольская М. М. Примарные IF-группы // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Математика и механика. — 2011. — № 3 (15). — С. 25—31.

[9] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Матем. сб. — 1941. — № 9. — С. 165—182.

[10] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Матем. сб. — 1945. — № 16. — С. 129—162.

[11] Никольская М. М. IF-группы без кручения // Современные проблемы математики и механики: Материалы II Всерос. молодёжной научной конф. — Томск: Изд-во Томского ун-та, 2011. — С. 33—35.

[12] Савинкова М. М. Вполне характеристические подгруппы абелевых p-групп, изоморфных самой группе // Междунар. алгебраическая конф., посвящённая 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша: тез. докл. — М., 2008. — С. 200—201.

[13] Савинкова М. М. О сепарабельных p-группах, содержащих вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе // Всерос. конф. по математике и механике: тез. докл. 22—25 сентября 2008. — Томск, 2008. — С. 62.

[14] Савинкова М. М. U-последовательности и примарные группы, содержащие собственные изоморфные себе вполне характеристические подгруппы // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Математика и механика. — 2008. — № 2 (3). — С. 56—60.

[15] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[16] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[17] Шерстнева (Ботыгина) А. И. U-последовательности и почти изоморфизм абелевых p-групп по вполне характеристическим подгруппам // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2001. — № 5. — С. 72—80.

[18] Beaumont R. A. Groups with isomorphic proper subgroups // Bull. Amer. Math. Soc. — 1945. — Vol. 51. — P. 381—387.

[19] Beaumont R. A. and Pierce R. S. Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol. 91. — P. 209—219.

[20] Beaumont R. A. and Pierce R. S. Isomorphic direct summands of Abelian groups // Math. Ann. — 1964. — Vol. 153. — P. 21—37.

[21] Benabdallah K. M., Eisenstadt B. J., Irwin J. M., Poluianov E. W. The structure of large subgroups of primary Abelian groups // Acta Math. Acad. Sci. Hung. — 1970. — Vol. 21, no. 3-4. — P. 421—435.

[22] Crawley P. An infinite primary Abelian group without proper isomorphic subgroups // Bull. Amer. Math. Soc. — 1962. — Vol. 68. — P. 463—467.

[23] Goldsmith B., Óhógáin S., Wallutis S. Quasi-minimal groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 2004. — Vol. 132, no. 8. — P. 2185—2195.

[24] Grinshpon S. Ya., Krylov P. A. Fully invariant subgroups, full transitivity and homomorphism groups of Abelian groups // J. Math. Sci. — 2005. — Vol. 128, no. 3. — P. 2894—2997.

[25] Grinshpon S. Ya., Nikolskaya (Savinkova) M. M. Fully invariant subgroups of Abelian p-groups with finite Ulm–Kaplansky invariants // Commun. Algebra. — 2011. — Vol. 39, no. 11. — P. 4273—4282.

[26] Hill P., Megibben Ch. On primary groups with countable basic subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol. 124, no. 1. — P. 49—59.

[27] Kaplansky I. Infinite Abelian groups. — Ann Arbor: Univ. Michigan Press, 1968.

[28] Monk G. S. Abelian p-groups without proper isomorphic pure dense subgroups // Illinois J. Math. — 1970. — Vol. 14, no. 1. — P. 164—177.

[29] Pierce R. Homomorphisms of primary Abelian groups // Topics in Abelian Groups. — Chicago, 1963. — P. 215—310.